Math. P.
448 t

Baabe

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

<36611618320011

<36611618320011

Bayer. Staatsbibliothek

Die

# Differenzial- und Integralrechnung

mit

## Functionen mehrerer Variabeln.

Von

**J. L. Raabe**

Professor.

---

**Der Differenzial- und Integralrechnung zweiten Theiles erste Abtheilung.**

---

**Zürich,**

bei Orell, Füßli und Compagnie.

**1843.**

265 D.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Dem Andenken seines verewigten Lehrers und Freundes:

# J. J. von Littrow,

weiland Direktors der Sternwarte und Professors der Astronomie an der Universität zu Wien.

In dankbarer Erinnerung gewidmet

von dem Verfasser.

# Uebersichtliche Darstellung des Inhaltes.

Bei der Ausarbeitung des zweiten Theiles meines Werkes über Differenzial- und Integralrechnung sah ich mich durch die Reichhaltigkeit des Stoffes genöthiget, denselben in zwei Abtheilungen zu zerfällen. Der vorliegende zweite Band umfaßt die erste Abtheilung und behandelt die Differenzial- und Integralfunctionen zweier und mehrerer Variabeln; ein dritter Band wird die zweite Abtheilung, Differenzial- und Integralgleichungen zweier und mehrerer Variabeln, aufnehmen, mit dem ich, wenn keine unvorhergesehene Hindernisse eintreten, im Laufe der nächsten zwei bis drei Jahre das vorliegende Werk schließen werde. Auch im vorliegenden Bande habe ich zwar, gleichwie im ersten, ganz vorzüglich die Integralrechnung im Auge behalten; dennoch aber habe ich die Differenzialrechnung, wenn auch noch immer nicht ganz erschöpft, doch mit größerer Ausführlichkeit, als es die Ueberschrift dieses Bandes vermuthen läßt, behandelt. So z. B. dürfte der Paragraph über Differenziation von Gleichungen zweier und mehrerer Variabeln eher in der zweiten, als in der vorliegenden Abtheilung vermuthet werden; gleichwohl glaube ich die Aufnahme desselben (§. II., Differenzialrechnung III) in diesem Bande nicht nur durch dessen Nothwendigkeit bei der Integration von Differenzialfunctionen mehrerer Variabeln rechtfertigen zu können; sondern auch, und zwar im höhern Grade damit, daß nicht immer die unmittelbaren Differenziationsergebnisse von Gleichungen zweier und mehrerer

Variabeln, dem engern Begriffe der „Differenzialgleichungen" nachkommen, welche natürlich der zweiten Abtheilung vorbehalten bleiben.

Was die Anordnung oder Vertheilung des Stoffes betrifft, habe ich, gleichwie im ersten Bande, die Differenzialrechnung von der Integralrechnung durch Sonderung in zwei Bücher geschieden. Das dritte Buch des Gesammtwerkes umfaßt die Differenzialrechnung, die ich in zwei Kapitel abgetheilt habe, welche als Fortsetzung der betreffenden Abtheilung im ersten Bande, die fortlaufenden Ueberschriftszahlen tragen. Das vierte Buch des Gesammtwerkes umfaßt die Integralrechnung mit Functionen mehrerer Variabeln und ist in vier Kapitel abgetheilt, deren Ueberschriftszahlen sich denen aus dem ersten Bande in gleicher Weise, wie die der Differenzialrechnung anreihen. Die einzelnen Kapitel, in der Differenzialrechnung sowohl als in der Integralrechnung, sind je nach Beschaffenheit des Stoffes, in Paragraphe abgetheilt worden, deren Ueberschriftszahlen in keiner gegenseitigen Beziehung stehen, und das ganze Werk endlich in einzelne kleinere Abschnitte, die ich Nummern nenne, welche aber in beiden Bänden eine fortlaufende zusammenhängende Reihe von Ueberschriftszahlen tragen.

## Die Differenzialrechnung

(in zwei Kapitel zerfällt).

Das erste oder respective dritte Kapitel der gesammten Differenzialrechnung theilt in zwei abgesonderten Paragraphen sämmtliche zur Differenziation von Functionen und Gleichungen mehrerer Variabeln nöthigen Sätze mit.

§. I. Differenziation der Functionen zweier und mehrerer Variabeln. — Nachdem daselbst das totale vom partiellen Differenziren streng ausgeschieden und die Begriffsbestimmung von partiellen Differenzialquotienten mitgetheilt wurde, ist dann ge-

zeigt worden, daß man zur Kenntniß des totalen Differenzials einer Function mehrerer Variabeln gelangt, wenn man die partiellen Differenzialien oder Differenzialquotienten derselben herstellen kann; und daß endlich, die Herstellung dieser auf eine Wiederholung des Differenzirens einer Function einer Variabeln hinausläuft.

§. II. Differenziation von Gleichungen mit zwei und mehreren Variabeln. — Die fünf ersten Nrn. umfassen die Differenziation einer Gleichung zwischen zwei von einander abhängigen Variabeln, wenn die unendlich kleinwerdende Aenderung der absoluten Variabeln, als Constante gedacht wird; und zwar in dem Falle sowohl, wenn die vorgelegte Gleichung eine endliche, d. h. keinerlei Differenzialien enthaltende, ist, wie auch dann, wenn die vorgelegte Gleichung Differenzialien der Variabeln enthält, welche Gleichung aber alsdann, als Ergebniß einer successiven Differenziation einer endlichen Gleichung angesehen werden muß. In den darauf folgenden drei Nrn. wird gezeigt, 1) wie eine Gleichung der zuletzt erwähnten Art zu umformen sei, wenn die absolute Variable in derselben als Function einer neuen Variabeln auftritt, wodurch das Differenziale der erstern nicht mehr constant, sondern ebenfalls variabel ist; 2) wie in Folge dieser Umformung in jeder vorgelegten, durch successives Differenziren entstanden gedachten Gleichung die absolute mit der relativen Variabeln umgetauscht werden kann, in der Weise, daß wenn in der erstern die unendlich kleinwerdende Aenderung der absoluten Variabeln als Constante erscheint, solches nunmehr bei der relativen Variabeln ein Statt habe; 3) wie in Folge dieser Umtauschung der absoluten mit der relativen Variabeln aus einer Gleichung $x = \psi(y)$ die inverse zu derselben, die ich Reversionsgleichung nenne, durch eine ohne Ende fortlaufende, mit einem Ergänzungsgliede versehene Reihe

hergestellt werden kann. In den beiden Schlußnummern dieses Paragraphen wird das Wesentliche sowohl über partielles als totales Differenziren von Gleichungen mit mehr denn zwei Variabeln mitgetheilt.

Das vierte Kapitel enthält in zwei Paragraphen Anwendungen auf Functionen mehrerer Variabeln.

§. I. Derselbe enthält die Reihen von Taylor und Maclaurin für Functionen mehrerer Variabeln, wie auch die verallgemeinerte Umkehrungsreihe von Lagrange; jede dieser Reihen ist mit dem ihr entsprechenden Ergänzungsgliede versehen.

§. II. Der Maximum- und Minimumzustand einer Function mehrerer Variabeln wird zuerst ganz allgemein erörtert, worauf dann mit jeder nur wünschbaren Ausführlichkeit die Function zweier und gleichfalls noch genügend die Function dreier Variabeln besonders in Untersuchung gezogen, und in Beziehung auf den einen oder den andern Zustand näher bestimmt werden.

## Die Integralrechnung

(in vier Kapitel zerfällt).

Das erste Kapitel der Integralrechnung in vorliegendem Bande, das fünfte der gesammten Integralrechnung, hat zum Gegenstande der Erörterung, die lineare Differenzialfunction mehrerer Variabeln, in der nämlich die Differenzialien der Variabeln nur in ersten und positiven Potenzen vorkommen. — Nachdem, bis und mit der Nr. 287 dieses Kapitels, die Bedingungsgleichungen der Integrabilität einer solchen Differenzialfunction hergestellt und unter der Annahme eines identischen Bestandhabens derselben, die Integralfunctionen derselben herzustellen, gelehrt worden ist, wird in der Nr. 288 und den darauf folgenden Nrn. zur Mittheilung einiger nicht uninteressanten Bemerkungen, über den statthabenden Zusammen-

hang in Rücksicht auf Integrabilität und Nichtintegrabilität einer vorgelegten linearen Differenzialfunction und einer aus derselben durch Transformation abgeleiteten analogen geschritten, wenn in jener, um diese zu erzeugen, die Variabeln durch beliebige Functionen neuer Variabeln ersetzt werden. Da wird denn Ausgangs der Nr. 290 der, für zwei Variabeln begründete, Satz ausgesprochen, daß wenn letztere die gleiche oder eine noch größere Anzahl von Variabeln, als die vorgelegte enthält, jedoch so, daß durch das Einführen, der neuen Variabeln keinerlei gegenseitiger Zusammenhang unter den primitiven Variabeln hervorgerufen wird; — daß dann beide Differenzialfunctionen, die primitive wie die durch Transformation gewonnene, entweder zugleich integrabel oder zugleich nichtintegrabel sind. Hingegen wird in der darauf folgenden Nr., in Nr. 291, gezeigt, daß die durch Transformation gewonnene lineare Differenzialfunction allerdings integrabel werden kann, wenn gleich die ursprünglich vorgelegte es nicht ist, falls beim Umformen der einen in die andere ein Zusammenhang unter den primitiven Variabeln herbei geführt wird, wodurch dann die durch Transformation gewonnene eine geringere Anzahl von Variabeln, als die vorgelegte enthält. Die Schlußnummern dieses Kapitels, von Nr. 292 bis und mit Nr. 295, besprechen die bestimmten Integralwerthe integrabler linearer Differenzialfunction mehrerer Variabeln. Mit aller nur wünschbaren Ausführlichkeit wird hier die Analogie zwischen bestimmten Integralien integrabler linearer Differenzialfunctionen zweier und den einer Variabeln nachgewiesen; am Schlusse, in der Nr. 294 ganz allgemein und in Nr. 295 an einigen besondern Fällen, wird überdieß noch gezeigt, daß die Herstellung des Werthes des bestimmten Integrals einer integrabeln linearen Differenzialfunction zweier Variabeln auf die

Ausmittelung eines einfachen bestimmten Integrals einer Variabeln jedesmal zurück gebracht werden kann.

Das sechste Kapitel, das zum Gegenstande der Untersuchung die Integration der nichtlinearen eingliederigen Differenzialfunctionen einer, zweier und mehrerer Variabeln hat, ist in zwei Paragraphe folgenden Inhaltes zerfällt worden.

§. I. Dieser Paragraph, der gewissermaßen als Einleitung zum vorliegenden sechsten Kapitel angesehen werden kann, stellt das m malige successive Integriren der Differenzialfunction $\varphi(x)\,dx^m$ entweder von m abgesonderten Integrationsoperationen eben so viel einfacher Differenzialformeln, die der Form $f(x)\,dx$ sind, oder auch, durch Zusammenziehung dieser abgesonderten Integrationsoperationen, von einer einzigen Integrationsoperation einer einfachen Differenzialformel, wie die Gleichung (II) Nr. 302 zeigt, abhängig dar. Diese eben genannte Reductionsgleichung (II) ist es auch, welche bei den im darauffolgenden zweiten Paragraphen dieses Kapitels angestellten Untersuchungen zu Grunde gelegt wird.

§. II. Dieser Paragraph handelt von den mehrfachen Integralien eingliedriger nichtlinearer Differenzialfunctionen mehrerer Variabeln. In den drei ersten Nrn. desselben werden mehrfache Integralien der Form:

$$\ldots \int^{(p)} \int^{(n)} \int^{(m)} \varphi(x, y, z, \ldots)\, dx^m\, dy^n\, dz^p \ldots .$$

wo jede der ganzen positiven Zahlen m, n, p, . . . . größer als Eins ist, in analoge und aequivalente, in denen jede dieser Zahlen m, n, p, . . . der positiven Einheit gleich ist, umgesetzt. — Von der Nr. 309 angefangen bis und mit der Nr. 323 werden dann die zweifachen Integralien zweier von einander unabhängigen Variabeln, nämlich $\int\int \varphi(x, y)\,dx\,dy$, besprochen und nach allen Seiten beleuchtet. Zuerst werden die von der Integration herrührenden willkührlichen Größen, von

denen eine eine willkührliche Function von x und die andere eine solche von y ist, unter verschiedenen, der Integralfunction gestellten Anforderungen bestimmt, und in Folge davon die Begriffsbestimmuung eines bestimmten Doppelintegrals festgestellt. Die bestimmten Doppelintegralien bieten in allen Theilen Analogien zu den bestimmten einfachen Integralien dar. Es wird gleichwie bei diesen auch bei jenen von den Integrationsgrenzen der Variabeln eines Doppelintegrals gesprochen; eben so wird der Zusammenhang eines bestimmten Doppelintegrals mit einer Doppelsumme in einer ähnlichen Weise, wie bei den einfachen bestimmten Integralien festgestellt; auch wird über die Zulässigkeit dieses Zusammenhanges in ähnlicher Weise bei Doppelintegralien, wie bei bestimmten einfachen entschieden u. dgl. m. Endlich ist in den sieben letzten der vorhin citirten Nrn. von der Umformung eines Doppelintegrals in ein analoges und aequivalentes die Rede, wenn die primitiven Integrationsvariabeln durch Functionen neuer Variabeln ersetzt werden, die sowohl unter sich in keinerlei Zusammenhang stehen, als auch unter den primitiven Variabeln keinen gegenseitigen Zusammenhang hervorrufen. Das Hauptergebniß dieser Untersuchung befindet sich in gedrängter Darstellung in Nr. 321 zusammengefaßt, woraus das besonders herausgehoben zu werden verdient, daß nicht jedes mit bestimmten Integrationsgrenzen versehene Doppelintegrale zweier Variabeln durch je zwei unter den primitiven und den neueingeführten Variabeln festgestellten Gleichungen, in oben beschriebener Weise, umzuformen möglich ist. — In ganz ähnlicher Weise werden in den noch folgenden Nrn. dieses Paragraphen, von Nr. 324 angefangen bis zur Schlußnummer desselben, die dreifachen Integralien dreier Variabeln, der Form $\int\int\int \varphi(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, discutirt.

Hier dürfte eine Bemerkung, die bei mehrfachen sowohl,

wie auch bei einfachen bestimmten Integralien ihre Anwendung findet, nicht am unrechten Platze sein; es beschlägt dieselbe die Umformung eines bestimmten Integrals in ein demselben analoges und aequivalentes, der wir den in Nr. 333 behandelten Fall, als Anhalt unterlegen. Wären in diesem besondern Falle die auf z Bezug habenden Integrationsgrenzen, statt wie dort 0 und 1, — 1 und + 1, dann würde die Gleichung (c) daselbst, die zur Bestimmung der Grenzwerthe von u nach denen von z dient, für $z = -1$ sowohl, als auch für $z = 1$ die Gleichung $\mathrm{Tang.u} = 0$ dargeboten haben, woraus denn für die obere und untere Grenze für u ein und derselbe Werth, die Null nämlich, sich herausgestellt haben würde; welches offenbar eine Ungereimtheit wäre. In so einem Falle nun, der sein Analogon bei zweifachen sowohl, als beim einfachen Integralien findet, hat man das zur Umformung vorgelegte Integrale, nach der Gleichung (8) Nr. 36 des ersten Bandes, in eine Summe zweier zu zerfällen und den einen durch Zerfällung gewonnenen Theil vorerst zu umformen; diese Zerfällung und Umformung ist dann in einer ähnlichen Weise vorzunehmen, wie wir bei dem vorhin zum Anhalt vorgelegten hypothetischen besondern Fall sofort mittheilen werden. Man zerfälle im besagten dreifachen Integralausdrucke die auf z bezügliche Integrationsoperation in eine Summe zweier, die eine inner den Grenzen — 1 und 0 und die andere inner den Grenzen 0 und + 1; ersetzt man nun im ersten Integralausdrucke die Integrationsvariable z durch — z, so stellt sich das Ergebniß mit geändertem Zeichen, als ein inner den Grenzen 0 und 1 zu vollziehende Integration in Bezug auf z dar; vereinigt man nun noch dieses zu dem vorhin durch Zerfällung gewonnenen zweiten Theile, so hat man den in der cirirten Nr. vorgelegten Fall, was namentlich die Integrationsgrenzen

von z betrifft, wieder hergestellt, und dadurch die oben besonders herausgehobene Schwierigkeit beseitiget.

Im siebenten Kapitel werden nichtlineare mehrgliedrige Differenzialfunctionen mehrerer Variabeln in Beziehung auf Integrabilität untersucht; im Falle des Eintreffens der jedesmal sich herausstellenden Bedingungsgleichungen, wird auch die Integration derselben gelehrt. Es zerfällt dieses Kapitel in vier Paragraphe folgenden Inhaltes.

§. I. Die Untersuchungen dieses Paragraphen betreffen die mehrgliedrigen nichtlinearen Differenzialfunctionen zweier Variabeln, die jedoch keine höhern, als erste Differenzialien der Variabeln enthalten. — Nach Vorausschickung der besondern Fälle, wenn die zu untersuchende Differenzialfunction vom zweiten und dritten Grade (in Beziehung auf die Differenzialien der Variabeln) ist, wird in der Nr. 342 die Differenzialfunction nten Grades zweier Variabeln in Beziehung auf Integrabilität untersucht, und die Bedingungsgleichung, damit solche eine unmittelbar vorhergehende Integralfunction derselben Variabeln und vom $(n-1)$ten Grade in Beziehung auf die Differenzialien derselben zulasse, hergestellt; in der darauf folgenden Nr. 343 dieses Paragraphen wird dann, bei Zugrundelegung der aufgestellten Bedingungsgleichung, die Integration der in Rede stehenden Differenzialfunction vollzogen; — und da stellt sich dann am Schlusse heraus, daß die unmittelbar vorhergehende Integralfunction einer mehrgliedrigen nichtlinearen Differenzialfunction zweier Variabeln vom nten Grade eine Anzahl von $\frac{1}{2}n(n+1)$ willkührlichen Constanten mitführt.

§. II. In diesem Paragraphen werden die Differenzialfunctionen dreier Variabeln discutirt, und zwar lediglich die vom zweiten und dritten Grade in Beziehung auf die Differenzialien der Variabeln. Unter den Ergebnissen dieses Para-

graphen verdient das herausgehoben zu werden, daß wenn eine oder mehrere Größen aus einem Systeme von Gleichungen zu eliminiren ist (wobei, wie sich von selbst versteht, die Anzahl der erstern geringer als die der letztern ist), welche Gleichungen jedoch nicht unmittelbar die zu eliminirenden Größen selbst, sondern die partiellen Differenzialquotienten derselben nach andern in denselben Gleichungen vorkommenden Größen enthalten, daß dann das Ergebniß der Elimination abweichender Beschaffenheit ist, als solches in der Analysis des Endlichen allgemein angenommen wird. Dieses Ergebniß stellt sich durch ein System unter einander wesentlich verschiedener Gleichungen dar, deren Anzahl größer als die Unterschiedszahl ist, so die Anzahl der vorgelegten Gleichungen und die der eliminirten Größen darbietet.

§. **III.** Die allgemeinste Differenzialfunction zweiten Grades mit n Variabeln wird hier in Beziehung auf Integrabilität, ob nämlich solche Ergebniß der Differenziation einer linearen Differenzialfunction derselben n Variabeln sei, in der man die Differenzialien, gleichwie in den beiden vorhergehenden Paragraphen, als constante Größen behandelt, zur Untersuchung vorgelegt. — Nach der Nr. 360 dieses Paragraphen hat man aus einem System von $\frac{1}{2}\,n\,(n+1)$ Gleichungen die je n partiellen Differenzialquotienten von n Größen, im Ganzen sonach $n^2$ partielle Differenzialquotienten, zu eliminiren. Da nun die Anzahl jener von der Anzahl dieser um $\frac{1}{2}\,n\,(n-1)$ übertroffen wird, so werden, wie solches schon im vorhergehenden Paragraphen bei der Differenzialfunction dritten Grades dreier Variabeln geschah, eben so viele unbekannnte Functionen eingeführt; wodurch dann sämmtliche partiellen Differenzialquotienten theils durch bekannte und theils durch die neueingeführten unbekannten Functionen auszudrücken, wie solches die Gleichungen

$(E_1)$, $(E_2)$, . . $(E_n)$ zeigen, möglich erkannt wird. Aus diesen Gleichungen wird nun in Nr. 361 die in Rede stehende Elimination in ganz allgemeiner Weise, d. h. unter jedweder Verfügung über die ganze und positive Zahl $n$, vollzogen, und das Ergebniß dieser Elimination in Nr. 362 durch die Gleichungen $(M)$, $(N)$ . . $(Q)$ symbolisch dargestellt. Diese Gleichungen, die die partiellen Differenzialquotienten sämmtlicher neueingeführten Functionen nach den primitiven Variabeln $x_1, x_2, x_3, . . x_n$ der in Rede stehenden Differenzialfunction 2ten Grades enthalten, sind in den Schlußnummern dieses Paragraphen für die besondern Annahmen $n=2$, $n=3$, $n=4$ zur Elimination dieser neueingeführten Function zu Grunde gelegt worden; mit welchen Ergebnissen dann auch die Bedingungsgleichungen der Integrabilität für diese eben erwähnten speciellen Differenzialfunctionen zweiten Grades erhalten worden sind. Ueberdieß ist in der Nr. 363 eigens noch und zwar ganz allgemein gezeigt worden, wie, beim Eintreffen dieser Bedingungsgleichungen, die unmittelbar vorhergehende Integralfunction jedesmal herzustellen sei, und daß dieselbe auch jedesmal eine Anzahl von $\frac{1}{2} n (n + 1)$ willkührlichen Constanten einführt.

§. IV. Die Differenzialfunction jedweden Grades und beliebiger Ordnung einer und mehrerer Variabeln wird hier zur Untersuchung in ähnlicher Weise, wie in den drei vorhergehenden Paragraphen vorgelegt, d. h., in wiefern man dieselbe als Ergebniß einer unmittelbaren Differenziation zu erklären berechtiget sei. Der Unterschied besteht hier lediglich darin, daß, ungleich wie dort, auch die Differenzialien der Variabeln variabel festgesetzt und daher die vorgelegte Differenzialfunction auch höhere Differenzialien der Variabeln enthaltend vorausgesetzt wurde. Auch hier werden nicht allein die Bedingungs-

gleichungen der Integrabilität hergestellt, sondern auch der Beweis wird daselbst für das Umgekehrte geführt, daß nämlich beim Statthaben der Bedingungsgleichungen die vorgelegte Differenzialfunction in der That durch eine einzige Differenziation entstanden sei, wo alsdann die Herstellung der unmittelbar vorhergehenden Integralfunction auf ein bereits gelöstes Problem sich reducirt.

Das achte Kapitel der Integralrechnung bietet Anwendungen der zwei-, drei- und mehrfachen bestimmten Integralien dar, die, in vier Paragraphen abgetheilt, folgende Gegenstände betreffen.

§. I. Hier werden Functionen einer, zweier und mehrerer Variabeln durch zwei-, vier- und mehrfache bestimmte Integralien ausgedrückt. Der Vorzug dieser Darstellungsweise der Functionen vor der nach der Reihe von Taylor oder Maclaurin besteht darin, daß während nach dieser das Intervall des darzustellenden Functiontheiles nicht von unserem Belieben abhängt, solches nach jener immer zuerst festgestellt und darnach auch ausgedrückt werden kann. So ist man z. B. mittelst des in Nr. 391 begründeten Satzes jede Function einer allgemeinen Größe für alle innerhalb zweier bestimmten Zahlengrößen fallenden Werthe der letztern, die, wenn dieselben nur nicht die Continuitätsgrenzen der Function überschreiten, ganz beliebig sein können, darzustellen in der Lage, welches offenbar mittelst des maclaurin'schen Theorems nie erreicht werden kann. Denn abgesehen von den Fällen, wo das maclaurin'sche Theorem ganz und gar unbrauchbar ist, repräsentirt die Reihe dieses Theorems die betreffende Function für alle Werthe der allgemeinen Größe, für welche erstere convergent ist. Außer den Hauptsätzen, die das Endziel dieses Paragraphen sind, enthält derselbe noch eine ganze Reihe von Hülfssätzen, mittelst deren erstere erhalten worden,

und über deren Bedeutung aus dem nachfolgenden Inhaltsverzeichnisse am schnellsten Aufklärung erlangt werden dürfte.

§. II. Als Anwendung der im vorausgehenden Paragraphen gewonnenen Sätze wird in diesem die analytische Darstellung gemischter Functionen in einigen besondern Fällen sowohl, wie auch ganz allgemein für eine Variable gezeigt. Unter den besondern Fällen verdient folgender herausgehoben zu werden. Die in Nr. 411 durch die Gleichheit (f) dargestellte gemischte Function von x, f(x), stellt in Intervallen von je $\frac{\pi}{2}$, im ganzen Bereiche der reellen Werthe von x, abwechselnd den Sinus von x und den Cosinus von x vor. Als Folgerung dieser gemischten Function sind dann in der darauf folgenden Nr. 412 die Summenwerthe der beiden ohne Ende fortlaufenden Reihen:

$$\text{Sin.}x + \tfrac{1}{3}\,\text{Sin}\,3x + \tfrac{1}{5}\,\text{Sin.}\,5x + \ldots\ldots,$$
$$\text{Cos.}x - \tfrac{1}{3}\,\text{Cos.}\,3x + \tfrac{1}{5}\,\text{Cos.}\,5x - \ldots\ldots,$$

für alle reellen Werthe von x festgestellt werden.

§. III. Mit Hülfe derselben Sätze des ersten Paragraphen dieses Kapitels sind im vorliegenden einige bestimmte Integralien ausgemittelt und andere in gegenseitige Abhängigkeit gebracht worden.

§. IV. Zwei- und mehrfache Integralien mit variabeln Integrationsgrenzen. — Gleichwie der vorausgehende, enthält auch der vorliegende Paragraph eine ziemliche Anzahl besonderer Fälle, die einzeln im folgendem Inhaltsverzeichnisse aufgeführt sind, und vorzüglich Fragen beschlagen, die auf die Identität von Doppelintegralien mit Doppelsummen, von dreifachen Inegralien mit dreifachen Summen u. dgl. m. beruhen. Die Unterlagen dieser Fragen sind allerdings geometrischer Beschaffenheit; dieselben sind jedoch rein analytisch behandelt worden, und nur im Vorbeigehen gleichsam ist jedesmal auch der geometrischen Bedeutung derselben Erwähnung geschehen. — Die

beiden Schlußnummern dieses Paragraphen behandeln endlich die Herstellung der Differenzialquotienten bestimmter einfacher sowohl wie mehrfacher Integralien nach einer allgemeinen von der Integrationsvariabeln unabhängigen Größe, falls diese nicht nur in der zu integrirenden Differenzialfunction, sondern auch in den Integrationsgrenzen enthalten ist.

# Inhaltsverzeichniß.

---

## Die Differenzialrechnung.

### Drittes Kapitel. Seite 1.


§. I. Differenziation der Functionen zweier und mehrer Variabeln Seite 1.

Begriffsbestimmung einer Function mehrerer Variabeln, Continuität und Discontinuität derselben . . . . . Nr. 247

Ueber das partielle und totale Differenziren einer Function zweier Variabeln . . . . . „ 248 — 249

Dasselbe, betreffend die Function einer beliebigen Anzahl von Variabeln . . . . . „ 250

Zweite und höhere Differenzialien, partielle sowohl als totale, einer Function mehrerer Variabeln, wie auch die gegenseitigen Beziehungen unter den partiellen Differenzialquotienten einer solchen Function . . . . . „ 251 — 254

§. II. Differenziation von Gleichungen mit zwei und mehrern Variabeln. Seite 14.

Differenziation der Gleichung: $y = f(x)$ . . . . . „ 255

Differenziation der Gleichung: $F(x; y) = 0$ . . . . . „ 256

Die aufeinanderfolgenden Differenzialien derselben Gleichung und die Herstellung der successiven Differenzialquotienten von y nach x . . . . . „ 257 — 258

Ueber das Differenziren der Gleichung:

$$F(x, y, y_1, y_2, y_3, \ldots y_n) = 0,$$

wo $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ die aufeinander folgenden Differenzialquotienten von y nach x vorstellen . . . „ 259

Ueber die Umformung dieser Gleichung, wenn in derselben die absolute Variable x, als Function einer neuen Variabeln auftritt . . . . . Nr. 260
Bei einer besondern Verfügung der eingeführten Function in der vorhergehenden Nr. kann die Gleichung der zweitvorhergehenden Nr. so umgeformt werden, daß y als absolute und x als relative Variable auftritt . . . . „ 261
Anwendung dieser Umformung zur Ableitnng einer Reversionsgleichung . . . . . „ 262
Ueber das totale und partielle Differenziren von Gleichungen mit mehr denn zwei Variabeln . . . . . „ 263 — 264

Viertes Kapitel. Anwendungen auf Functionen mehrerer Variabeln. Seite 37.

§. I. Die Reihen von Taylor und Maclaurin für Functionen mehrerer Variabeln, und verallgemeinerte Umkehrungsreihe von Lagrange. Seite 37.

Die Taylor'sche Reihe für Functionen zweier Variabeln sammt dem Ergänzungsgliede . . . . . „ 265
Die Maclaurin'sche Reihe gleichfalls für Functionen zweier Variabeln, ebenfalls mit dem Ergänzungsgliede . . „ 266
Die Taylor'sche und Maclaurin'sche Reihe für Functionen irgend einer Anzahl Variabeln, jede mit dem betreffenden Ergänzungsgliede . . . . . „ 267
Die verallgemeinerte Lagrange'sche Umkehrungsreihe, sammt dem Ergänzungsgliede . . . . . „ 268

§. II. Ueber den Maximum- oder Minimumzustand einer Function zweier und mehrerer Variabeln. Seite 50.

Für den Maximum- oder Minimumzustand einer Function mehrerer Variabeln sind die ersten partiellen Differenzialquotienten der Function nach jeder der Variabeln, und zwar jeder für sich, der Null gleich . . . . . „ 269
Umformung eines algebraischen Ausdruckes zweiten Grades von n allgemeinen Größen in eine algebraische Summe von n quadratischen Ausdrücken . . . . . „ 270
Anwendung des allgemeinen Ergebnisses vorhergehender Nr. auf die Fälle $n = 2$, $n = 3$ . . . . . „ 271
Nähere Feststellung des Kriteriums über den Maximum- oder Minimumzustand einer Function zweier Variabeln . „ 272 — 275
Dasselbe für eine Function dreier Variabeln . . . . . „ 276

## Die Integralrechnung.

Fünftes Kapitel. Integration linearer Differenzialfunctionen zweier und mehrerer Variabeln. Seite 70.

Einleitende Bemerkungen und Begriffsbestimmung einer linearen Differenzialfunction mehrerer Variabeln . . . . Nr. 277 — 278
Bedingungsgleichung der Integrabilität einer linearen Differenzialfunction zweier Variabeln . . . . . „ 279
Bedingungsgleichungen der Integrabilität eiuer linearen Differenzialfunction dreier Variabeln . . . . . „ 280
Dasselbe für eine lineare Differenzialfunction von n Variabeln. „ 281
Ueber die Integration einer linearen Differenzialfunction zweier Variabeln, wenn die für dieselbe aufgestellte Bedingungsgleichung der Integrabilität ein Statt hat . . . . „ 282
Dasselbe für eine lineare Differenzialfunction dreier Variabeln. „ 283
Dasselbe für eine lineare Differenzialfunction von vier Variabeln. „ 284
Dasselbe für eine lineare Differenzialfunction von n Variablen. „ 285
Eine integrable lineare Differenzialfunction kann auch nach der im ersten Theile mitgetheilten „Ableitungsmethode" wie auch nach der „Methode des Zurückführens auf dem Wege der Substitution" integrirt werden; letztere auf einige besondere Fälle zur Anwendung gebracht . . . „ 286 — 287
Eine lineare Differenzialfunction mehrerer Variabeln bleibt in Beziehung auf Integrabilität oder Nichtintegrabilität unverändert, wenn die primitiven Variabeln durch Functionen neuer Variabeln in gleicher Anzahl mit den erstern ersetzt werden . . . . . „ 288 — 289
Dasselbe trifft ein, wenn die Anzahl der primitiven Variabeln von der der neueingeführten übertroffen wird . . „ 290
Wenn hingegen die Anzahl der neueingeführten Variabeln von der der primitiven übertroffen wird, ist es gar wohl möglich, daß die umgeformte Differenzialfunction eine Integralfunction gestatte, wenn gleich die vorgelegte eine solche nicht zuläßt . . . . . „ 291
Ueber die bestimmten Integralien integrabler linearer Differenzialfunctionen zweier und mehrerer Variabeln . . „ 292 — 295

Sechstes Kapitel. Nichtlineare, eingliedrige Differenzialfunctionen einer, zweier und mehrerer Variabeln. Seite 112.

Einleitende Bemerkungen . . . . . „ 296

§. I. Integration der eingliedrigen nichtlinearen Differenzialfunction einer Variabeln. Seite 113.

Ueber das natürlichste Verfahren zur Kenntniß des Endintegrals der Differenzialfunction:

$$\varphi(x)\ dx^m$$

zu gelangen und über die Mißstände denen dasselbe unterliegt Nr. 297

Ableitung einer Recursionsgleichung für die Herstellung desselben Integrals . . . . . „ 298

Auflösung dieser Recursionsgleichung oder Darstellung des mfachen Integrals:

$$\int^{(m)} \varphi(x)\ dx^m$$

durch m in keinerlei gegenseitiger Abhängigkeit stehenden einfachen Integralien . . . . . „ 299

Anwendung dieser gewonnenen Auflösung auf einen besondern Fall . . . . . „ 300

Dasselbe mfache Integrale von einer einzigen noch zu vollziehenden Integrationsoperation abhängig dargestellt . „ 301 — 302

Zwei verschiedene Arten die m willkührlichen Constanten dieses mfachen Integrals zu bestimmen . . . . . „ 303

In welcher Weise das Integrationsverfahren nach der „Ableitungsmethode" sowohl als das nach der „Methode des Zurückführens auf dem Wege der Substitution" bei mfachen Integralausdrücken in Anwendung zu bringen sei „ 304

§. II. Integration der eingliedrigen nichtlinearen Differenzialfunctionen zweier und mehrerer Variabeln. Seite 125.

Das natürlichste Verfahren die Integralfunction zu:

$$\int^{(n)} \int^{(m)} \varphi(x,y)\ dx^m\ dy^n$$

herzustellen, und über den Mißstand, dem solches unterliegt . . . . . „ 305

Die Herstellung derselben Integralfunction wird von einem einzigen Doppelintegrale zweier Variabeln abhängig dargestellt . . . . . „ 306

Eben so wird die Integralfunction zu:

$$\int^{(p)} \int^{(n)} \int^{(m)} \varphi(x,y,z)\ dx^m\ dy^n\ dz^p$$

von der Ausmittelung eines einzigen dreifachen Integrals dreier Variabeln abhängig dargestellt . . . . . „ 307

Einleitender Uebergang zu den zwei-, drei- und mehrfachen Integralien mit zwei, drei und mehreren von einander unabhängigen Variabeln . . . . . „ 308

Ueber die dem Doppelintegrale:

$$\int\int \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

entsprechende Integralfunction, und über die willkührlichen Functionen, die dieselbe mitführt . . . . . Nr. 309

Ueber die verschiedenen Arten die willkührlichen Functionen, die die Integralfunction besagten Doppelintegrals mitführt, zu bestimmen . . . . . „ 310 — 311

Feststellung des Begriffes eines bestimmten Doppelintegrals und Begründung einiger einfachen Umformungsgleichungen desselben . . . . . „ 312

Jedes bestimmte Doppelintegrale stellt unter Beschränkungen, denen bei einfachen bestimmten Integralien analog, Werthe von Doppelsummen dar . . . . . „ 313 — 315

Einige allgemeine Bemerkungen über bestimmte Doppelintegralien „ 316

Umformung eines bestimmten Doppelintegrals in ein demselben analoges und aequivalentes, wenn eine der Integrationsvariabeln durch eine gegebene Function der andern und einer neuen Variabeln ersetzt wird . . . . . „ 317

Dasselbe, wenn beide Integrationsvariabeln des vorgelegten Doppelintegrals durch Functionen zweier neuen Variabeln ersetzt werden . . . . . „ 318 — 319

Aufklärung eines scheinbaren Paradoxon bei dieser Umformung eines Doppelintegrals . . . . . „ 320

Gedrängte Zusammenstellung der Ergebnisse dieser Umformung. „ 321

Anwendung dieser Umformung auf zwei besondere Fälle; der zweite Fall führt auf die Reductionsgleichung:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(ax^2 + by^2)\, dx\, dy = \frac{\pi}{4\sqrt{ab}} \int_0^\infty \varphi(x)\, dx. \quad „ \; 322$$

Ueber die verschiedenen Darstellungsweisen der bei besagter Umformung vorkommenden Größe $\triangle$ . . . . . „ 323

Die Integralfunction des dreifachen Integrals:

$$\int\int\int \varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz;$$

dieselbe führt drei willkührliche Functionen ein . . . . „ 324

Bestimmung der in dieser Integralfunction eingeführten willkührlichen Functionen durch Anforderungen, welchen erstere genügen soll . . . . . „ 325

Begriffsbestimmung eines bestimmten dreifachen Integrals und Begründung einiger Umformungsgleichungen desselben. „ 326

Ueber den Zusammenhang eines bestimmten dreifachen Integrals mit dreifachen Summen . . . . . „ 327

Ueber die Umformung eines dreifachen bestimmten Integrals dreier Variabeln, wenn zwei derselben durch Functionen der dritten und zwei neueingeführten Variabeln ersetzt werden. Nr. 328
Dasselbe in seiner ganzen Allgemeinheit, wenn nämlich die drei primitiven Variabeln durch Functionen drei neuer Variabeln ersetzt werden . . . . . „ 329 — 332
Anwendung auf einen besondern Fall . . . . . „ 333
Anwendung auf einen zweiten besondern Fall, wodurch die Reductionsgleichung:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty q(ax^2 + by^2 + cz^2)\,dx\,dy\,dz = \frac{\pi}{4\sqrt{abc}} \int_0^\infty q(x)\sqrt{x}\,dx$$

gewonnen wird . . . . . „ 334
Ueber die verschiedenen Darstellungsformen der bei dieser Umformung eingeführten Größe $\triangle'$ . . . . . „ 335

Siebentes Kapitel. Nichtlineare, mehrgliedrige Differenzialfunctionen zweier und mehrerer Variabeln. Seite 203.

Einleitende Bemerkungen . . . . . „ 336

§. I. Mehrgliedrige nichtlineare Differenzialfunctionen zweier Variabeln. Seite 204.

Bedingungsgleichung der Integrabilität für eine in der Ueberschrift angedeuteten Differenzialfunction zweiten Grades „ 337
Integration derselben Differenzialfunction, wenn die Bedingungsgleichung realisirt wird . . . . . „ 338
Anwendung auf einen besondern Fall . . . . . „ 339
Bedingungsgleichung der Integrabilität einer in der Ueberschrift angedeuteten Differenzialfunction dritten Grades. „ 340
Integration dieser Differenzialfunction beim Eintreffen der Bedingungsgleichung . : . . . . . „ 341
Bedingungsgleichung der Integrabilität für den allgemeinsten Fall einer in der Ueberschrift angedeuteten Differenzialfunction . . . . . „ 342
Integration derselben, wenn die Bedingungsgleichung eintrifft. „ 343

§. II. Mehrgliedrige nichtlineare Differenzialfunctionen dreier Variabeln. Seite 223.

Die in der Ueberschrift angedeutete Differenzialfunction zweiten Grades wird in Beziehung auf Integrabilität zur Untersuchung vorgelegt; vorläufig werden drei Bedingungsgleichungen abgeleitet . . . . . „ 344

Die Gründe, die zur Behauptung berechtigen, daß die in vorhergehender Nr. gewonnenen drei Bedingungsgleichungen den ganzen Umfang der in Rede stehenden Frage erschöpfen, und über deren Unzulänglichkeit . . . . Nr. 345 — 346

Außer den in Nr. 344 aufgestellten drei Bedingungsgleichungen werden noch drei neue von diesen wesentlich verschiedene Bedingungsgleichungen abgeleitet . . . . „ 347

Integration der in Rede stehenden Differenzialfunction unter der Annahme eines identischen Bestehens sämmtlicher sechs Bedingungsgleichungen . . . . . „ 348

Beleuchtung des allgemeinen Verfahrens durch Anwendung desselben auf einen besondern Fall . . . . . „ 349

Die Untersuchungen in Rücksicht auf Integrabilität einer in der Ueberschrift angedeuteten Differenzialfunction dritten Grades werden durch Aufstellung von 10 Gleichungen, aus denen 6 Größen zu eliminiren sind, eingeleitet . „ 350

Ueber die Schwierigkeiten die in Rede stehende Elimination vollständig durchzuführen . . . . . „ 351

Es werden zum Behuf dieser Elimination den 10 Gleichungen noch 8 neue mit eben so vielen unbekannten Functionen beizugeben, aus denen dann die in Rede stehende Elimination bewirkt wird; das Ergebniß wird durch 18 Gleichungen dargestellt, aus welchen die eingeführten 8 neuen Functionen noch zu eliminiren sind . . . . „ 352

Den 18 Gleichungen, dem Ergebnisse der vorhergehenden Nr., werden 6 neue mit eben so vielen unbekannten Functionen beigegeben; aus diesen werden die 8 in vorhergehender Nr. eingeführten Functionen eliminirt und es erübrigen 18 Gleichungen, aus denen noch die in vorliegender Nr. eingeführten 6 Functionen zu eliminiren sind. „ 353

Endlich wird auch die Elimination dieser 6 Functionen bewerkstelliget; das Ergebniß, ein System von 10 Gleichungen, drückt die Bedingung der Integrabilität der gegenwärtig in Rede stehenden Differenzialfunction aus. „ 354

Es wird nachgewiesen, daß beim Statthaben der in vorhergehender Nr. gewonnenen Bedingungsgleichungen die vorgelegte Differenzialfunction nothwendig eine Integralfunction zuläßt; auch werden die Mittel zur Kenntniß derselben zu gelangen angegeben . . . . . „ 355

Beleuchtung der allgemeinen Ergebnisse der vorhergehenden Nr. an einem besondern Fall . . . . . „ 356

Schlußbemerkungen . . . . . „ 357

§. III. Mehrgliedrige Differenzialfunction zweiten Grades von n Variabeln. Seite 257.

Eine in der Ueberschrift angedeutete Differenzialfunction wird zur Untersuchung in Beziehung auf Integrabilität vorgelegt . . . . . Nr. 358

Das erste Ergebniß der Untersuchung stellt sich durch ein System von $\frac{1}{2}n(n+1)$ Gleichungen dar, aus denen $n.n$ oder $n^2$ partielle Differenzialquotienten von n unbekannten Functionen zu eliminiren sind . . . . . „ 359

Behufs dieser Elimination werden $\frac{1}{2}n(n-1)$ Gleichungen, die eben so viele unbekannte Functionen mitführen, den Gleichungen der vorhergehenden Nr. beigegeben und geordnet zusammengestellt . . . . . „ 360

Die Elimination, von der in der zweitvorhergehenden Nr. die Rede war, wird in ihrer Totalität vollzogen und das Ergebniß symbolisch zusammengestellt . . . . . „ 361 — 362

Aus den Ergebnissen der letzten Nr. sind die Bedingungsgleichungen der Integrabilität jedesmal sehr leicht herzustellen möglich; unter Voraussetzung eines identischen Bestehens derselben wird die Existenz der Integralfunction, und die Art und Weise dieselbe zu erhalten nachgewiesen . . . . . „ 363

Anwendung auf die besondern Fälle $n=2, 3, 4$ . . . „ 364 — 366

Unter den 20 Bedingungsgleichungen, die die Annahme $n=4$ darbietet, bieten drei eine merkwürdige Beziehung zu den siebenzehn übrigen dar . . . . . „ 367

Ein besonderer Fall, der Annahme $n=4$ entsprechend, wird nach den allgemeinen Vorschriften behandelt . . . „ 368

§. IV. Mehrgliedrige Differenzialfunction mehrerer Variabeln jedweden Grades und beliebiger Ordnung. Seite 285.

Einleitende Bemerkungen betreffend den Grad, die Ordnungs- und Klassenzahl einer in der Ueberschrift angedeuteten Differenzialfunction . . . . . „ 369

Die allgemeinste Differenzialfunction mter Ordnung einer Variabeln wird in Beziehung auf Integrabilität zur Untersuchung vorgelegt; es werden m unbekannte Functionen, die in ($\alpha$), eingeführt, welche zuletzt bestimmt werden, und eine Bedingungsgleichung, die erste der Gleichungen in (6), darbieten . . . . . „ 370 — 372

Beim Statthaben der aufgestellten Bedingungsgleichung und bei Zugrundelegung der für die unbekannten m Functionen gewonnenen Bestimmungen wird dann nachgewiesen, daß die vorgelegte Differenzialfunction Ergebniß einer unmittelbaren Differenziation einer Function sei, welche, mit Hülfe der eben erwähnten m Functionen, von der Integration einer integrabeln linearen Differenzialfunction abhängig dargestellt wird . . . . . Nr. 373 — 377

Die schon öfters erwähnten m Functionen, wie die Form der Bedingungsgleichung der Integrabilität sind noch anderer Darstellungsformen fähig . . . . . „ 378 — 379

Anwendung der allgemeinen Ergebnisse auf einen besondern Fall. „ 380

Für die Differenzialfunction höherer Ordnung einer bestimmten Klassenzahl k zweier Variabeln werden die Bedingungsgleichungen der Integrabilität sammt den nöthigen Hülfsfunctionen, die zur Integration derselben unerläßlich sind, abgeleitet . . . . . „ 381 — 382

Es wird umgekehrt nachgewiesen, daß beim Statthaben der in den vorhergehenden zwei Nrn. abgeleiteten Gleichungen die vorgelegte Differenzialfunction nothwendig integrabel sei, und zwar mittelst Integration einer integrabeln linearen Differenzialfunction mehrerer Variabeln . . . . . „ 383

Anwendung der allgemeinen Ergebnisse auf einen besondern Fall. „ 384

Zusammenstellung der Ergebnisse für den allgemeinsten Fall der in der Ueberschrift dieses Paragraphen angedeuteten Differenzialfunction . . . . . „ 385

Vorführung eines besondern Falles dreier Variabeln . . „ 386

Achtes Kapitel. Anwendungen der zwei-, drei und mehrfachen bestimmten Integralien. Seite 331.

§. I. Darstellung von Functionen einer und mehrerer Variabeln durch mehrfache bestimmte Integralien. Seite 331.

Einleitende Bemerkungen . . . . . „ 387

Beweisführung des Satzes, daß zugleich mit der Gleichung

$$\int_a^A \varphi(x)\,\mathrm{Cos}.\alpha x\,dx = F(\alpha)$$

auch folgende

$$\varphi(x') = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F(\alpha)\,\mathrm{Cos}.x'\alpha\,d\alpha$$

besteht, unter gewissen Beschränkungen und Modificationen jedoch der hier vorkommenden allgemeinen Zeichen und Größen . . . . . „ 388

Gleichfalls unter gewissen Beschränkungen und Modifikationen besteht zugleich mit der Gleichung:

$$\int_a^A \varphi(x)\,\mathrm{Sin.}\alpha x\,dx = F'(\alpha)$$

die folgende:

$$\varphi(x') = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F'(\alpha)\,\mathrm{Sin.}x'\alpha\,d\alpha \quad . \quad . \quad . \text{ Nr. } 389$$

Folgerungen aus den zwei vorausgeschickten Sätzen zur Begründung einiger untergeordneten Sätze, die zuletzt auf den durch folgende Gleichheit ausgedrückten, unter eigens bezeichneten Restrictionen bestehenden Satz führen:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_a^A \varphi(x')\,\mathrm{Cos.}\alpha(x-x')\,dx'\,d\alpha \quad . \text{ „ } 390 - 391$$

Als Folge des vorhergehenden Satzes geht auch der folgende hervor:

$$q(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty} q(x')\,\mathrm{Cos.}\alpha(x-x')\,dx'\,d\alpha\,,$$

wobei jedoch die Function $q(x)$ für alle Werthe von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ continuirlich verbleiben muß „ 392

Mittelst des in Nr. 391 aufgestellten Satzes ist man auch irgend ein abgegrenztes Intervall einer Function einer allgemeinen Größe darzustellen im Stande . . . . . „ 393

Vier Hülfssätze, denen in den Nrn. 388 und 389 analog, werden für Functionen zweier allgemeinen Größen abgeleitet . . . . . „ 394 — 397

In Folge dieser vier Hülfssätze werden einige untergeordnete Sätze zur Darstellung von Functionen zweier Variabeln abgeleitet . . . . . „ 398 — 399

In Folge dieser untergeordneten Sätze stellt sich folgender Hauptsatz, jedoch unter gewissen Restrictionen, begründet heraus:

$$q(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_b^B\int_a^A q(x',y')\mathrm{Cos.}\alpha(x-x')\mathrm{Cos.}\beta(y-y')dx'dy'd\alpha d\beta \text{ Nr. } 400$$

In Folge endlich dieses Hauptsatzes geht folgender heraus:

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x',y')\mathrm{Cos.}\alpha(x-x')\mathrm{Cos.}\beta(y-y')dx'dy'd\alpha d\beta\,,$$

wobei jedoch die Function $\varphi(x,y)$ für alle reellen Werthe von x und y continuirlich verbleiben muß . . . . Nr. 401

Mittelst des Hauptsatzes in Nr. 400 ist man auch ein abgegrenztes Intervall einer Function zweier Variabeln analytisch anzugeben im Stande . . . . . Nr. 402
Angabe eines ähnlichen Haupt- und Folgesatzes für Functionen dreier Variabeln . . . . . „ 403
Auch mittelst dieses Hauptsatzes ist jedes begrenzte Intervall einer Function dreier Variabeln analytisch darstellbar . „ 404

§. II. Darstellung gemischter Functionen durch algebraische Summen mehrfacher Integralien. Seite 366.

Ueber identische, verschiedene und gemischte Functionen . . „ 405
Darstellung einer gemischten Function von x, die innerhalb der Grenzen 0 und 1 einerlei mit $x^2$ und innerhalb der Grenzen 1 und 2 mit $x^3$ einerlei ist . . . . . „ 406
Verificirung des Ergebnisses vorhergehender Nr. . . . „ 407
Darstellung einer gemischten Function, die für die Zwischenwerthe zu 0 und $\frac{\pi}{2}$ von x mit Sin.x, für die Zwischenwerthe zu $\frac{\pi}{2}$ und $\pi$ mit Cos.x, für die Zwischenwerthe zu $\pi$ und $\frac{3\pi}{2}$ wieder mit Sin.x u. s. w. übereinstimmende Resultate darbietet . . . . . „ 408
Darstellung einer gemischten Function, die für die Zwischenwerthe zu 0 und $-\frac{\pi}{2}$ von x mit Cos.x, für die zu $-\frac{\pi}{2}$ bis $-\pi$ mit Sin.x, für die zu $-\pi$ bis $-\frac{3\pi}{2}$ wieder mit Cos.x u. s. w. übereinstimmend ist . . . „ 409
Darstellung einer gemischten Function von x, die von $-\frac{4n+1}{2}\pi$ bis $+\frac{4n+1}{2}\pi$ abwechselnd, in den Intervallen von je $\frac{\pi}{2}$, die Functionen Cos.x und Sin.x repräsentirt . . . . . „ 410
Darstellung derselben gemischten Function vorhergehender Nr. unter der besondern Annahme eines unendlich großwerdenden Werthes für n . . . . . „ 411
Anwendung des Ergebnisses vorhergehender Nr. auf die Summation einiger trigonometrischen Reihen . . . . . „ 412
Das Problem der Darstellung einer gemischten Function einer allgemeinen Größe allgemein gefaßt und gelöst . . „ 413
Auch gemischte Functionen zweier und mehrerer Variabeln sind analytisch darstellbar; Erläuterung durch einen besondern Fall . . . . . „ 414

§. III. Darstellung der Werthe bestimmter Integralien nach der Ableitungsmethode, wenn solche als Functionen der in denselben vor-

kommenden allgemeinen Größen angesehen werden. Seite 396

Einleitende Bemerkungen . . . . . Nr. 415

Das bestimmte Integrale $\int_0^\infty e^{-xz^m} dz$ wird als Function der positiven Größe x angesehen und für diese Werthe bloß analytisch ausgedrückt; in Folge davon sind folgende bestimmte Integralien ermittelt worden:

$$\int_0^\infty x^{a-1} \text{Cos.}\, bx\, dx\,, \quad \int_0^\infty x^{a-1} \text{Sin.}\, bx\, dx\,,$$

$$\int_0^\infty x^{a-1} \text{Cos.}(bx^c)\, dx\,, \quad \int_0^\infty x^{a-1} \text{Sin.}(bx^c)\, dx\,,$$

$$\int_0^\infty x^{a-1} \text{Cos.}\, bx \log.x\, dx\,, \quad \int_0^\infty x^{a-1} \text{Sin.}\, bx \log.x\, dx\,. \quad \text{„ } 416$$

In ähnlicher Weise wird von dem bestimmten Integrale

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin.}\, az}{z}\, e^{-xz}\, dz\,,$$

als Function der positiven Größe x betrachtet, ausgegangen, wo dann folgende Doppelintegralien bestimmt werden:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\text{Cos.}\, ax\, \text{Sin.}\, az}{\alpha^2 + z^2}\, dz\, d\alpha\,, \quad \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\text{Sin.}\, ax \text{Sin.}\, az}{\alpha^2 + z^2} \cdot \frac{\alpha}{z}\, dz\, d\alpha\,,$$

und folgende Relation begründet wird:

$$\int_0^\infty \text{Arctang.}\, bx\, \text{Cos.}\, ax\, dx = -\frac{1}{a} \int_0^\infty \frac{\text{Sin.}\frac{a}{b} z}{1 + z^2}\, dz \quad \text{Nr. } 417$$

Von der Function der positiven Größe x, nämlich von $\int_1^\infty e^{-xz} \frac{dz}{z}$, ausgehend, gelangt man auf die Relationen:

$$\int_0^\infty \text{Arctang.}\, bx\, \text{Cos.}\, ax\, \frac{dx}{x} = \tfrac{\pi}{2} \int_1^\infty e^{-\frac{a}{b} z}\, \frac{dz}{z}\,,$$

$$\int_0^\infty \log.(1 + b^2x^2)\, \text{Sin.}\, ax\, \frac{dx}{x} = \pi \int_1^\infty e^{-\frac{a}{b} z}\, \frac{dz}{z}\,,$$

wie auf die Bestimmungen folgender Integralien:

$$\int_m^\infty \frac{1}{e^{\frac{b}{2}x} \pm e^{-\frac{b}{2}x}} \cdot \frac{dx}{x}, \quad \int_m^\infty \frac{e^{\frac{b}{2}x}}{e^{bx} - e^{-bx}} \cdot \frac{dx}{x}$$ Nr. 418 — 419

Das bestimmte Integrale $\int_a^b \varphi(z)\, e^{-xz}\, dz$ wird gleichfalls

als Function der positiven Größe x ausgedrückt und zur Erzielung mehrerer interessanten Relationen benutzt. „ 420

In einer der in vorhergehender Nr. aufgestellten Relationen wird $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ angenommen, welche Annahme die Bestimmung folgender Integralien herbeiführt:

$$\int_0^\infty \log.\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+a}{\sqrt{1+x^2}-a}\right)\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \int_0^\infty \text{Arctang.}\left(\frac{a}{\sqrt{1+x^2}}\right)\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log.\left(\frac{1+a\,\text{Cos.}x}{1-a\,\text{Cos.}x}\right)\frac{dx}{\text{Cos.}x}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Arctang.}\,(a\,\text{Cos.}x)\,\frac{dx}{\text{Cos.}x},$$

$$\int_0^1 \log.\left(\frac{1+a\sqrt{1-x^2}}{1-a\sqrt{1-x^2}}\right)\frac{dx}{1-x^2}, \quad \int_0^1 \text{Arctang.}\,(a\sqrt{1-x^2})\,\frac{dx}{1-x^2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log.\left(\frac{1+a\,\text{Sin.}x}{1-a\,\text{Sin.}x}\right)\frac{dx}{\text{Sin.}x}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Arctang.}\,(a\,\text{Sin.}x)\,\frac{dx}{\text{Sin.}x}$$ Nr. 421

Andere zwei Annahmen über die Functionen $\varphi(z)$ führen auf interessante Beziehung unter bestimmten Integralien verschiedener Formen . . . . . Nr. 422 — 423

Die in beiden vorhergehenden Nrn. gewonnenen Beziehungen führen viel allgemeinere herbei, die die folgenden bestimmten Integralien:

$$\int_0^1 \log.\left(\frac{1+a\sqrt{1-c^2x^2}}{1-a\sqrt{1-c^2x^2}}\right)\frac{1-Ax^2}{(1-c^2x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}\,dx,$$

$$\int_0^1 \log.\left(\frac{\sqrt{1-c^2x^2}+a}{\sqrt{1-c^2x^2}-a}\right)\frac{1-Ax^2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}\,dx,$$

$$\int_0^1 \text{Arctang.}\,(a\sqrt{1-c^2x^2})\,\frac{1-Ax^2}{(1-c^2x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}\,dx,$$

$$\int_0^1 \text{Arctang.}\left(\frac{a}{\sqrt{1-c^2x^2}}\right)\frac{1-Ax^2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}\,dx\,,$$

$$\int_0^1 \text{Arctang.}\left(\frac{1}{a\sqrt{1-c^2x^2}}\right)\frac{1-Ax^2}{(1-c^2x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}\,dx\,,$$

$$\int_0^1 \text{Arctang.}\left(\frac{\sqrt{1-c^2x^2}}{a}\right)\frac{1-Ax^2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}\,dx\,,$$

von andern minder complicirten in Abhängigkeit versetzen . . . . . Nr. 424

§. IV. Ueber zwei- und mehrfache Integralien mit variabeln Integrationsgrenzen. Seite 433.

Einleitende Bemerkung . . . . . „ 425

Das Doppelintegrale:

$$\int_a^A \int_X^{X'} \varphi(x, y)\,dy\,dx\,,$$

wo a und A constante Größen, X und X′ Functionen von x sind, wird in ein mit constanten Integrationsgrenzen versehenes Doppelintegrale umgesetzt . . . „ 426

Anwendungen dieses allgemeinen Verfahrens auf die zwei Doppelintegralien:

$$\int_{-c}^{+c}\int_{-\sqrt{c^2-x^2}}^{+\sqrt{c^2-x^2}} \varphi(x, y)\,dy\,dx\,,\qquad \int_0^a\int_0^{b\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^m\right]^{\frac{1}{n}}} \varphi(x, y)\,dy\,dx \quad „ 427$$

Auf Doppelintegralien mit variabeln Integrationsgrenzen wird man geführt, wenn erstere Repräsentanten von Doppelsummen sind . . . . . „ 428

Ein solches Problem ist folgendes: Das Doppelintegrale $\int\int \varphi(x, y)\,dy\,dx$ soll, als Doppelsumme aufgefaßt, über sämmtliche reellen Werthe von x und y ausgedehnt werden, die in die Function:

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$$

gesetzt, derselben, mitbegriffen den Nullwerth, nur negative Werthe beilegen . . . . . „ 429

Specialisirung der Function $\varphi(x, y)$, wodurch die Quadratur der Ellipse erhalten wird . . . . . Nr. 430

Zweite Specialisirung derselben Function $q(x, y)$, die die Planirung des dreiachsigen Ellipsoids bezweckt . . . „ 431

Ein zweites Problem, wo eine Doppelsumme durch ein Doppelintegrale mit variabeln Integrationsgrenzen dargestellt wird, ist folgendes: Das Doppelintegrale $\int\int \varphi(x,y)dydx$ soll über die reellen Werthe von x und y ausgedehnt werden, die der Function:

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 ,$$

mitbegriffen den Nullwerth, entweder bloß positive oder bloß negative Resultate beilegen . . . . . „ 432

Die zweifache Stellung des in vorangehender Nr. behandelten Problems führt auf folgende zwei Relationen unter Doppelintegralien:

$$\int_0^{k'} \int_{a\sqrt{1+\frac{k'^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2}}} F(x, y)\, dx\, dy = \int_a^{a\sqrt{1+\frac{k'^2}{b^2}}} \int_0^{b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}} F(x, y)\, dy\, dx ,$$

$$\int_0^{\infty} \int_{a\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2}}}^{\infty} F(x, y)\, dx\, dy = \int_a^{\infty} \int_0^{b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}} F(x, y)\, dy\, dx \quad „ 433$$

Die allgemeinen Ergebnisse der beiden vorhergehenden Nrn. auf die Quadratur der Hyparbel zur Anwendung gebracht „ 434

Ein drittes Problem, den beiden bereits mitgetheilten analog, ist: Das Doppelintegrale $\int\int q(x, y)\, dy\, dx$ wird über die reellen Werthe von x und y ausgedehnt, die der Function:

$$f(x, y) = y^2 - px ,$$

mitbegriffen den Nullwerth, entweder nur negative oder nur positive Resultate beilegen . . . . . „ 435

Die zweifache Auffassung des in vorangehender Nr. behandelten Problems führt auf folgende Relationen unter Doppelintegralien:

$$\int_0^{\frac{1}{p}k'^2}\int_0^{\sqrt{px}} F(x,y)\,dy\,dx = \int_0^{k'}\int_{\frac{1}{p}y^2}^{\frac{1}{p}k'^2} F(x,y)\,dx\,dy\,,$$

$$\int_0^{k}\int_0^{\sqrt{px}} F(x,y)\,dy\,dx = \int_0^{\sqrt{pk}}\int_{\frac{1}{p}y^2}^{k} F(x,y)\,dx\,dy\,,$$

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\sqrt{px}} F(x,y)\,dy\,dx = \int_0^{\infty}\int_{\frac{1}{p}y^2}^{\infty} F(x,y)\,dx\,dy\,,$$

wie auf eine Gleichheit zur Darstellung einer für alle reellen Werthe der allgemeinen Größe continuirlichen Function . . . . . Nr. 436

Interpretation eines Doppelintegrals mit variabeln Integrationsgrenzen, wodurch folgende Relationen:

$$\int_0^{a}\int_0^{my} \varphi(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{ma}\int_{\frac{x}{m}}^{a} \varphi(x,y)\,dy\,dx\,,$$

$$\int_0^{ma}\int_0^{\frac{x}{m}} \varphi(x,y)\,dy\,dx = \int_0^{a}\int_{my}^{ma} \varphi(x,y)\,dx\,dy\,,$$

wie noch mehrere andere erhalten worden sind . . . . . „ 437

Das dreifache Integrale:

$$\int_a^A\int_X^{X'}\int_{f(x,y)}^{f'(x,y)} \varphi(x,y,z)\,dz\,dy\,dx\,,$$

wo a und A constante Größen, X und X′ Functionen von x, f(x, y) und f′(x, y) Functionen von x und y sind, wird in ein analoges und aequivalentes mit constanten Integrationsgrenzen umgesetzt . . . . . „ 438

Anwendung des allgemeinen Verfahrens auf:

$$\int_0^{a}\int_0^{b\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^m\right]^{\frac{1}{n}}}\int_0^{c\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^m-\left(\frac{y}{b}\right)^n\right]^{\frac{1}{p}}} \varphi(x,y,z)\,dz\,dy\,dx\,.$$ „ 439

Wenn ein dreifaches Integrale, als dreifache Summe aufgefaßt wird, wird verlangt: daß das dreifache Integrale $\int\int\int \varphi(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$ sämmtliche reelle Werthe von x, y und z beschlage, die in die Function:

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

gesetzt, derselben, den Nullwerth mitbegriffen nur Resultate mit negativen Zeichen beilegen . . . . . Nr. 440

Specialisirung der Function $q(x, y, z)$ in vorhergehender Nr. 1) für die Kubirung eines dreiachsigen Ellipsoids ; 2) für die Bestimmung der Trägheitsmomente desselben Ellipsoids um die drei Hauptachsen desselben; 3) zur Ausmittelung einer Function, deren partielle Differenzialquotienten bezüglich drei in derselben vorkommenden Größen die Attraktion dieses Ellipsoids auf einen Punkt vorstellen . . . . . „ 441

Der unter III. der vorhergehenden Nr. behandelte Fall, nach einem von Dirichlet mitgetheilten Verfahren, auf die Ausmittelung eines fünffachen bestimmten Integrals zurückgebracht . . . . . „ 442 — 443

Reduction des dreifachen Integrals:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\{\mu(Ax^2+By^2+Cz^2+2Dx+2Ey+2Fz+G)\}\,dx\,dy\,dz$$

auf ein einfaches bestimmtes Integrale einer Variabeln. „ 445

Endliche Zurückführung des in Nr. 441 gewonnenen fünffachen Integrals auf ein einfaches bestimmtes Integrale einer Variabeln . . . . . „ 446 — 447

Begründung der Gleichheit:

$$\frac{d.\int_a^A \varphi(x,\alpha)\,dx}{d\alpha} = \int_a^A \frac{d.\varphi(x,\alpha)}{d\alpha}\,dx + \frac{dA}{d\alpha}\,\varphi(A,\alpha) - \frac{da}{d\alpha}\,\varphi(a,\alpha)$$ Nr. 448

Begründung ähnlicher Gleichheiten für zwei- und dreifache Integralien . . . . . Nr. 449

# Zweiter Theil

der

# Differenzial- und Integralrechnung.

---

## Erste Abtheilung.

# Drittes Buch.

# Die Differenzialrechnung.

## Zweiten Theiles erste Abtheilung.

## Drittes Kapitel.

### §. I.

### Differenziation der Functionen zweier und mehrerer Variabeln.

247. Alles, was in der Einleitung zum ersten Theile über Functionen einer allgemeinen Größe mitgetheilt wurde, läßt sich mit geringen Abänderungen auch auf Functionen mit zwei und mehrern allgemeinen Größen ausdehnen.

I. Der in den Nrn. 1 und 6 mitgetheilte Begriff einer Function lautet nun wie folgt:

> Jede algebraische Verrichtung mit mehrern allgemeinen Größen x, y, z, . . ., deren Werth von den Werthen dieser allgemeinen Größen abhängig ist, wird eine Function dieser allgemeinen Größen genannt.

Je nachdem die algebraischen Verrichtungen mit den allgemeinen Größen endlicher oder unendlicher Anzahl sind, nennt man gleich wie bei einer allgemeinen Größe diese Function algebraisch oder transcendent.

Auch die Bezeichnung der Functionen bleibt dieselbe, wie im ersten Theile. So stellt man unter:

$$F(x, y, z, \ldots),$$

wo die auf das Functionszeichen F folgenden allgemeinen Größen durch Kommata gesondert sind, irgend eine Function der allgemeinen Größen x, y, z, ... dar; eben so durch:

$$f(x, y, z, \ldots), \quad \psi(x, y, z, \ldots), \quad \varphi(x, y, z, \ldots)$$

andere Functionen derselben allgemeinen Größen.

II. Auch der Begriff der Continuität ist bei Functionen von mehr denn einer allgemeinen Größe derselbe, als solcher bei einer allgemeinen Größe Nr. 14 und 15 festgestellt worden; die Continuitätsgrenzen aber können für die verschiedenen allgemeinen Größen ungleich sein. Es kann z. B. einer Function zweier allgemeinen Größen x und y, für die allgemeine Größe x innerhalb der Grenzwerthe a und b, hingegen für die allgemeine y innerhalb a′ und b′ continuirlich sein. Wenn sonach eine solche Function der Operation des Differenzirens unterzogen werden soll, dann ist dieses für jede allgemeine Größe oder Variable nur im Bereiche der ihr entsprechenden Continuitätsgrenzen gestattet.

III. Auch behalten wir den im ersten Theil aufgestellten Begriff von Discontinuität einer Function bei; nämlich, wenn eine Function mehrerer allgemeinen Größen bei einer unendlich kleinen Zu- oder Abnahme einer oder mehrerer dieser allgemeinen Größen eine unendlich großwerdende, oder auch nur eine endliche Aenderung des Werthes erleidet, dann wird die Function in diesem Momente eine discontinuirliche genannt. Im letztern Falle, wenn nämlich die Aenderung der Function endlicher Beschaffenheit ist, werden wir diesen Zustand der Discontinuität durch ein vorgesetztes endlich noch näher bezeichnen.

Alles andere, die Functionen mehrerer Variabeln ausschließlich betreffende, versparen wir auf gelegentliche Mittheilung, und übergehen schon in der nächstfolgenden Nr. zur Entwickelung und Angabe der Regeln, Functionen mit mehrern allgemeinen Größen oder Variabeln den Operationen des Differenzirens zu unterziehen.

248. Wir beginnen mit dem einfachsten Falle, mit einer Function zweier allgemeinen Größen oder Variabeln x und y. — Sei dieselbe durch f(x, y) vorgestellt, und der Kürze wegen durch den einen Buchstaben u angedeutet, so daß man

$$u = f(x,y)$$

habe; dann bieten sich im Bereiche jener Werthe von x und y, für die noch u continuirlich verbleibt, folgende Momente zur Erörterung dar, die die verschiedenen Gesichtspunkte, unter denen eine solche Function u den Operationen des Differenzirens unterzogen werden kann, feststellen.

a) Die Ermittelung der unendlich kleinwerdenden Aenderung von u, wenn x die unendlich kleinwerdende Aenderung $\omega$ oder dx erleidet, y hingegen unveränderlich oder constant bleibt.

b) Dieselbe Erörterung unter der genau entgegengesetzten Annahme; d. h., wenn y eine unendlich kleinwerdende Aenderung $\omega'$ oder dy eingeht, die unendlich kleinwerdende Aenderung von u zu ermitteln, falls x alsdann constant gedacht wird.

c) Endlich bleibt noch die unendlich kleinwerdende Aenderung von u anzugeben, wenn x und y zugleich die respektiven unendlich kleinwerdenden Aenderungen $\omega$ und $\omega'$, oder dx und dy eingehen.

In jedem dieser Fälle wird die unendlich kleinwerdende Aenderung von u das Differenziale von u genannt; und um möglichen Mißverständnissen vorzubeugen, wird dasselbe in den zwei ersten partielles, im dritten und letzten hingegen totales Differenziale genannt. So wird im Falle a) das partielle Differenziale von u nach x, im Falle b) das partielle Differenziale von u nach y und im Falle c) endlich, das totale Differenziale von u nach x sowohl, als nach y verlangt.

Das partielle Differenziale von u nach x deuten wir durch $\overset{x}{d}.u$, das von u nach y durch $\overset{y}{d}.u$ und das totale Differenziale von u durch d.u an. Zur Herstellung dieser dreierlei Differenzialien gehen wir sofort in der nächstfolgenden Nr. über.

249. Lassen wir in der in vorangehender Nr. zu Grunde gelegten Function von x und y, nämlich in f(x,y), die allgemeine Größe x in $x+\omega$ übergehen, belassen aber y als Constante; so nähert sich, nach dem Fundamentaltheorem in Nr. 16 des ersten Theiles, der Grenzausdruck.

$$\text{Lim}: \frac{f(x+\omega, y) - f(x,y)}{\omega},$$

wo das Grenzzeichen auf das unendliche Abnehmen von $\omega$ Bezug hat, im Bereiche jener Werthe von x, für die f(x,y) continuirlich verbleibt, einer neuen Function von x (die auch y enthalten kann), die, wie am angeführten Orte, abgeleitete der Function f(x,y) nach x genannt und durch:

$$\frac{d.f(x,y)}{dx}, \text{ oder } \frac{du}{dx}$$

angedeutet wird. — Dieses vorausgesetzt, hat man zur Bestimmung des partiellen Differenzials von u nach x, oder des Symbols $\underset{x}{d.u}$, die Gleichung:

$$\underset{x}{d.u} = \frac{du}{dx}\,dx.$$

Aus ähnlichem Grunde hat man zur Bestimmung des partiellen Differenzials von u nach y, oder des Symbols $\underset{y}{d.u}$, die Gleichung:

$$\underset{y}{d.u} = \frac{du}{dy}\,dy,$$

wo also die Ausdrücke:

$$\frac{du}{dx} \text{ und } \frac{du}{dy}$$

die abgeleiteten Functionen der Function f(x,y) oder von u, erstere nach x und letztere nach y, vorstellen.

Diese Ausdrücke werden auch aus leicht zu ersehenden Gründen, partielle Differenzialquotienten oder Differenzialcoefficienten der Function u genannt, und zwar wird $\frac{du}{dx}$ der partielle Differenzialquotient von u nach x, und $\frac{du}{dy}$ der partielle Differenzialquotient von u nach y genannt; jener wird gefunden, indem man in u, oder in f(x,y), die allgemeine Größe y als Constante behandelt, und lediglich den Differenzialquotienten von u nach x sucht; dieser hingegen wird durch das Gegentheil hievon gefunden, nämlich x wird als Constante behandelt, und von u wird der Differenzialquotient nach y hergestellt.

Endlich zur Bestimmung des totalen Differenzials von u übergehend, lassen wir in der vorgelegten Function f(x,y)

x in $x + \omega$, und y in $y + \omega'$

übergehen, und nehmen dann den Unterschied dieser geänderten Function und der ursprünglichen f(x,y); oder vielmehr, wir nehmen den Grenzwerth dieses Unterschiedes unter der Annahme, $\omega$ und $\omega'$ seien von einander unabhängige und unendlich kleinwerdende Größen: dann ist das Endergebniß, das eine unendlich kleinwerdende Größe vorstellen muß, wenn anders u noch im Zustande der Continuität gedacht wird, das verlangte totale Differenziale von u.

Diesem zufolge hat man die Gleichung:

$$d.u = \text{Lim}: \{ f(x+\omega, y+\omega') - f(x,y) \},$$

die mit jeder der nun folgenden zwei Gleichungen:

$$d.u = \text{Lim}: \omega \left\{ \frac{f(x+\omega, y+\omega') - f(x,y+\omega')}{\omega} \right\}$$

$$+ \text{Lim}: \omega' \left\{ \frac{f(x, y+\omega') - f(x,y)}{\omega'} \right\},$$

$$d.u = \text{Lim}: \omega' \left\{ \frac{f(x+\omega, y+\omega') - f(x+\omega,y)}{\omega'} \right\}$$

$$+ \text{Lim}: \omega \left\{ \frac{f(x+\omega, y) - f(x,y)}{\omega} \right\}$$

gleichbedeutend ist.

Diese zwei Gleichungen gehen, nach dem was oben über partielle Differenzialquotienten mitgetheilt worden, in folgende über:

$$d.u = \omega \frac{d.\, f(x, y+\omega')}{dx} + \omega' \frac{d.\, f(x,y)}{dy},$$

$$d.u = \omega' \frac{d.\, f(x+\omega, y)}{dy} + \omega \frac{d.\, f(x,y)}{dx};$$

subtrahirt man diese von einander, so ergiebt sich die Gleichung:

$$o = \omega \left\{ \frac{d.\, f(x,y+\omega')}{dx} - \frac{d.\, f(x,y)}{dx} \right\} - \omega' \left\{ \frac{d.\, f(x+\omega,y)}{dy} - \frac{d.\, f(x,y)}{dy} \right\};$$

bedenkt man nun den Umstand, die Größen $\omega$ und $\omega'$ sind, die Beschränkung ausgenommen unendlich kleinwerdende Größen vorzustellen, in jeder andern Beziehung durchaus willkührlich und an keinen gegenseitigen Zusammenhang gebunden, dann kann die letzte Gleichung nur insofern Bestand haben, als man folgende Gleichungen

$$\frac{d.\, f(x,y+\omega')}{dx} = \frac{d.\, f(x,y)}{dx}, \quad \frac{d.\, f(x+\omega, y)}{dy} = \frac{d.\, f(x,y)}{dy}$$

feſtſtellt*), wodurch dann jede der beiden vorhergehenden Gleichungen, wenn $\omega$ durch dx und $\omega'$ durch dy erſetzt wird, auf folgende führt:

$$d.u = \frac{d.\,f(x,y)}{dx}\,dx + \frac{d.\,f(x,y)}{dy}\,dy,$$

oder auch auf:

$$d.u = \frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy, \qquad (A)$$

wo, wie oben bemerkt wurde, $\frac{du}{dx}$ den partiellen Differenzialquotienten von u nach x, wie $\frac{du}{dy}$ den partiellen Differenzialquotienten von u nach y vorſtellt.

Man hat alſo auch:

$$d.u = \underset{x}{d.u} + \underset{y}{d.u},$$

aus welcher Gleichung wir folgendes Theorem zur Herſtellung des totalen Differenzials einer Function u zweier Variabeln x und y gewinnen: Das totale Differenziale einer Function zweier Variabeln iſt der Summe der partiellen Differenzialien dieſer Function, nach jeder einzelnen genommen, gleich.

250. Durch analoge Betrachtungen und Schlüſſe, wie ſolche in der vorangehenden Nr. zur Anwendung gebracht worden, folgert man, wenn $f(x, y, z, \ldots)$ irgend eine Function der Variabeln $x, y, z, \ldots$ vorſtellt, die der Kürze wegen durch u angedeutet wird, die Gleichung:

$$d.u = \frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy + \frac{du}{dz}\,dz + \ldots; \qquad (B)$$

die das totale Differenziale von u repräſentirt, in der die Ausdrücke:

$$\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \ldots$$

*) Man dürfte z. B. nur die Annahme $\omega' = \sqrt[m]{\omega}$ treffen, ſo hebt man dadurch die unerläßliche Eigenthümlichkeit dieſer Größen, unendlich kleinwerdend zu ſein, nicht auf, und die vorige durch Subtraktion gewonnene Gleichung bietet nach Weglaſſung des gemeinſchaftlichen Faktors $\sqrt[m]{\omega}$ die zwei ſo eben gefolgerten Gleichungen dar.

der Ordnung nach, die partiellen Differenzialquotienten von u nach

$$x, y, z, \ldots$$

vorstellen. Aus dieser Gleichung entnimmt man die Allgemeinheit des Ausgangs vorhergehender Nr. aufgestellten Theorems, nämlich: das totale Differenziale einer Function jedweder Anzahl von Variabeln ist der Summe der partiellen Differenzialien dieser Function nach jeder Variabeln genommen gleich.

Das Differenziren einer Function mehrerer Variabeln erscheint sonach auf das einer Variabeln zurückgebracht.

251. Die in den zwei vorangeschickten Nrn. eingeführten partiellen Differenzialquotienten werden im Allgemeinen Functionen der ursprünglichen Variabeln $x, y, z, \ldots$ sein (Theorem in Nr. 16), und können sonach abermaligen Differenziationen, partiellen sowohl als totalen, unterzogen werden.

Lassen wir der Einfachheit wegen u nur eine Function dreier Variabeln x, y, z sein, und setzen Kürze halber

$$u_1 = \frac{du}{dx}, \quad u_2 = \frac{du}{dy}, \quad u_3 = \frac{du}{dz};$$

so besteht nach der vorangehenden Nr. die Gleichung:

$$d.u = u_1\,dx + u_2\,dy + u_3\,dz, \tag{a}$$

und aus gleichen Gründen auch folgende drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} d.u_1 &= \frac{du_1}{dx}\,dx + \frac{du_1}{dy}\,dy + \frac{du_1}{dz}\,dz, \\ d.u_2 &= \frac{du_2}{dx}\,dx + \frac{du_2}{dy}\,dy + \frac{du_2}{dz}\,dz, \\ d.u_3 &= \frac{du_3}{dx}\,dx + \frac{du_3}{dy}\,dy + \frac{du_3}{dz}\,dz; \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

mittelst welcher wir in der folgenden Nr. das totale zweite Differenziale von u herstellen werden.

Um solches jedoch unter möglichst einfacher Form zu erhalten, führen wir nur vorübergehend und bloß zur Vereinfachung der Darstellung folgende Abkürzungen ein:

$$u_{1,1} = \frac{du_1}{dx}, \quad u_{1,2} = \frac{du_1}{dy}, \quad u_{1,3} = \frac{du_1}{dz},$$

$$u_{2,1} = \frac{du_2}{dx}, \quad u_{2,2} = \frac{du_2}{dy}, \quad u_{2,3} = \frac{du_2}{dz},$$

$$u_{3,1} = \frac{du_3}{dx}, \quad u_{3,2} = \frac{du_3}{dy}, \quad u_{3,3} = \frac{du_3}{dz};$$

gehen dann zur Erzielung dieser Vereinfachung auf den Ursprung der Größen:

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad u_{1,2}, \quad u_{1,3}, \quad u_{2,3}, \quad \ldots$$

zurück: so gelangen wir auf Relationen unter mehrern dieser Größen die besagte Vereinfachung herbeiführen.

Da unter der gegenwärtigen Voraussetzung

$$u = f(x,y,z)$$

ist, so hat man:

$$u_1 = \text{Lim}: \left\{ \frac{f(x+\omega, y, z) - f(x, y, z)}{\omega} \right\},$$

$$u_2 = \text{Lim}: \left\{ \frac{f(x, y+\omega', z) - f(x, y, z)}{\omega'} \right\},$$

$$u_3 = \text{Lim}: \left\{ \frac{f(x, y, z+\omega'') - f(x, y, z)}{\omega''} \right\},$$

wo die Grenzzeichen auf die unendlich kleinwerdenden Größen $\omega$, $\omega'$, $\omega''$ Bezug haben. Aus jeder dieser Gleichungen erhält man ein System von drei neuen Gleichungen, die die Werthe von:

$$u_{1,1}, \quad u_{1,2}, \quad u_{1,3}; \quad u_{2,1}, \quad u_{2,2}, \quad u_{2,3}; \quad u_{3,1}, \quad u_{3,2}, \quad u_{3,3}$$

darstellen, und die wir in derselben Ordnung hier folgen lassen:

$$u_{1,1} = \text{Lim}: \left\{ \frac{f(x+2\omega, y, z) - 2f(x+\omega, y, z) + f(x, y, z)}{\omega^2} \right\},$$

$$u_{1,2} = \text{Lim}: \left\{ \frac{f(x+\omega, y+\omega', z) - f(x, y+\omega', z) - f(x+\omega, y, z) + f(x, y, z)}{\omega\omega'} \right\},$$

$$u_{1,3} = \text{Lim}: \left\{ \frac{f(x+\omega, y, z+\omega'') - f(x, y, z+\omega'') - f(x+\omega, y, z) + f(x, y, z)}{\omega\omega''} \right\},$$

$$u_{2,1} = \text{Lim}: \left\{ \frac{f(x+\omega, y+\omega', z) - f(x+\omega, y, z) - f(x, y+\omega', z) + f(x, y, z)}{\omega'\omega} \right\},$$

$$u_{2,2} = \text{Lim}: \left\{ \frac{f(x, y+2\omega', z) - 2f(x, y+\omega', z) + f(x, y, z)}{\omega'^2} \right\},$$

$$u_{2,3} = \text{Lim}: \left\{ \frac{f(x, y+\omega', z+\omega'') - f(x, y, z+\omega'') - f(x, y+\omega', z) + f(x, y, z)}{\omega'\omega''} \right\},$$

$$u_{3,1} = \text{Lim:} \left\{ \frac{f(x+\omega, y, z+\omega'') - f(x+\omega, y, z) - f(x, y, z+\omega'') + f(x, y, z)}{\omega''\omega} \right\},$$

$$u_{3,2} = \text{Lim:} \left\{ \frac{f(x, y+\omega', z+\omega'') - f(x, y+\omega', z) - f(x, y, z+\omega'') + f(x, y, z)}{\omega''\omega'} \right\},$$

$$u_{3,3} = \text{Lim:} \left\{ \frac{f(x, y, z+2\omega'') - 2f(x, y, z+\omega'') + f(x, y, z)}{\omega''^2} \right\}.$$

Vergleicht man die zweite und vierte, dritte und siebente, sechste und achte dieser neun Gleichungen, so stellen sich die vorhin erwähnten Relationen folgendermaßen dar:

$$u_{1,2} = u_{2,1}, \quad u_{1,3} = u_{3,1}, \quad u_{2,3} - u_{3,2},$$

welche folgendes Theorem, die auf einander folgenden partiellen Differenzialquotienten betreffend, darbieten: Wenn zu einer Function mehrerer Variabeln der partielle Differenzialquotient nach einer Variabeln hergestellt wird, dann zu diesem der partielle Differenzialquotient nach einer andern Variabeln; so kann auch die Ordnungsfolge dieser zweierlei partiellen Differenziationen geradezu umgekehrt werden, um gleichwohl dasselbe Endresultat zu erzielen.

Geht man ferner auf die ersten Bedeutungen der Symbole:

$$u_{1,2}, \quad u_{1,3}, \quad u_{2,1}, \ldots$$

zurück, so stellen sich diese eben gewonnenen Relationen, wie folgt dar:

$$\frac{\text{d.}\frac{du}{dx}}{dy} = \frac{\text{d.}\frac{du}{dy}}{dx},$$

$$\frac{\text{d.}\frac{du}{dx}}{dz} = \frac{\text{d.}\frac{du}{dz}}{dx},$$

$$\frac{\text{d.}\frac{du}{dy}}{dz} = \frac{\text{d.}\frac{du}{dz}}{dy};$$

oder, wenn man einen durch zweimaliges Differenziren von u, zuerst nach x und hierauf nach y, erzeugten partiellen Differenzialquotienten durch:

$$\frac{d^2u}{dxdy}$$

andeutet, und wenn den Ausdrücken:

$$\frac{d^2u}{dydx}, \quad \frac{d^2u}{dxdz}, \quad \frac{d^2u}{dzdx}, \quad \frac{d^2u}{dydz}, \quad \frac{d^2u}{dzdy}$$

analoge Bedeutungen beigelegt werden; dann stellen folgende Gleichungen:

$$\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d^2u}{dydx}, \quad \frac{d^2u}{dzdx} = \frac{d^2u}{dxdz}, \quad \frac{d^2u}{dydz} = \frac{d^2u}{dzdy}, \qquad (c)$$

die angekündigten Relationen dar.

Gemäß dieser eben festgestellten Bezeichnung wird man auch die Symbole:

$$u_{1,1}, \quad u_{2,2}, \quad u_{3,3}$$

durch

$$\frac{d^2u}{dxdx}, \quad \frac{d^2u}{dydy}, \quad \frac{d^2u}{dzdz},$$

oder durch

$$\frac{d^2u}{dx^2}, \quad \frac{d^2u}{dy^2}, \quad \frac{d^2u}{dz^2}$$

darstellen; und die oben aufgestellten Gleichungen (b) gehen nunmehr in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} d.u_1 = d.\frac{du}{dx} &= \frac{d^2u}{dx^2}dx + \frac{d^2u}{dxdy}dy + \frac{d^2u}{dxdz}dz, \\ d.u_2 = d.\frac{du}{dy} &= \frac{d^2u}{dxdy}dx + \frac{d^2u}{dy^2}dy + \frac{d^2u}{dydz}dz, \\ d.u_3 = d.\frac{du}{dz} &= \frac{d^2u}{dxdz}dx + \frac{d^2u}{dydz}dy + \frac{d^2u}{dz^2}dz, \end{aligned}\right\} \qquad (b')$$

die wir in der folgenden Nr. bei der Herstellung des zweiten totalen Differenzials von u benutzen werden.

252. Aus der Gleichung (a) vorangehender Nr. gewinnen wir für das zweite Differenziale der Function u, nämlich für $d^2u$, zunächst die Gleichung:

$$d^2u = d.(u_1dx) + d.(u_2dy) + d.(u_3dz),$$

aus der wir unter der Annahme, die unendlich kleinwerdenden Zunahmen von x, y und z, nämlich:

$\omega$, $\omega'$, $\omega''$, oder dx, dy, dz

sind von den Variabeln x, y und z unabhängig, folgende Gleichung ziehen:

$$d^2u = dx\, d.u_1 + dy\, d.u_2 + dz\, d.u_3 ;$$

werden hier die Ergebnisse der Gleichungen (b′) vorangehender Nr. eingesetzt, so erhält man die Gleichung:

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2} dx^2 + \frac{d^2u}{dy^2} dy^2 + \frac{d^2u}{dz^2} dz^2$$
$$+ 2\frac{d^2u}{dxdy} dxdy + 2\frac{d^2u}{dxdz} dxdz + 2\frac{d^2u}{dydz} dydz , \qquad (d)$$

die, vermöge der Relationen in (c) vorhergehender Nr., mit folgender gleichbedeutend ist:

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2} dx^2 + \frac{d^2u}{dy^2} dy^2 + \frac{d^2u}{dz^2} dz^2$$
$$+ 2\frac{d^2u}{dydx} dxdy + 2\frac{d^2u}{dzdx} dxdz + 2\frac{d^2u}{dzdy} dydz . \qquad (d')$$

Behandelt man aber in der am Eingange aufgestellten Bestimmungsgleichung für $d^2u$ die Differenzialien dx, dy, dz, als von x, y und z dependirend; dann ist noch zu den Ausdrücken rechts der letzten zwei Gleichungen folgender Ausdruck:

$$\frac{du}{dx} d^2x + \frac{du}{dy} d^2y + \frac{du}{dz} d^2z$$

beizusetzen, so daß man unter dieser Annahme folgende Bestimmungsgleichung für $d^2u$ hat:

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2} dx^2 + \frac{d^2u}{dy^2} dy^2 + \frac{d^2u}{dz^2} dz^2$$
$$+ 2\frac{d^2u}{dxdy} dxdy + 2\frac{d^2u}{dxdz} dxdz + 2\frac{d^2u}{dydz} dydz$$
$$+ \frac{du}{dx} d^2x + \frac{du}{dy} d^2y + \frac{du}{dz} d^2z . \qquad (e)$$

Werden nun die einfachen partiellen Differenzialquotienten, wie:

$$\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$$

partielle Differenzialquotienten erster Ordnung, und die zweifachen, wie

$$\frac{d^2u}{dxdy}$$

andeutet, und wenn den Ausdrücken:

$$\frac{d^2u}{dydx}, \quad \frac{d^2u}{dxdz}, \quad \frac{d^2u}{dzdx}, \quad \frac{d^2u}{dydz}, \quad \frac{d^2u}{dzdy}$$

analoge Bedeutungen beigelegt werden; dann stellen folgende Gleichungen:

$$\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d^2u}{dydx}, \quad \frac{d^2u}{dzdx} = \frac{d^2u}{dxdz}, \quad \frac{d^2u}{dydz} = \frac{d^2u}{dzdy}, \tag{c}$$

die angekündigten Relationen dar.

Gemäß dieser eben festgestellten Bezeichnung wird man auch die Symbole:

$$u_{1,1}, \quad u_{2,2}, \quad u_{3,3}$$

durch

$$\frac{d^2u}{dxdx}, \quad \frac{d^2u}{dydy}, \quad \frac{d^2u}{dzdz},$$

oder durch

$$\frac{d^2u}{dx^2}, \quad \frac{d^2u}{dy^2}, \quad \frac{d^2u}{dz^2}$$

darstellen; und die oben aufgestellten Gleichungen (b) gehen nunmehr in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} d.u_1 = d.\frac{du}{dx} &= \frac{d^2u}{dx^2}dx + \frac{d^2u}{dxdy}dy + \frac{d^2u}{dxdz}dz, \\ d.u_2 = d.\frac{du}{dy} &= \frac{d^2u}{dxdy}dx + \frac{d^2u}{dy^2}dy + \frac{d^2u}{dydz}dz, \\ d.u_3 = d.\frac{du}{dz} &= \frac{d^2u}{dxdz}dx + \frac{d^2u}{dydz}dy + \frac{d^2u}{dz^2}dz, \end{aligned}\right\} \tag{b'}$$

die wir in der folgenden Nr. bei der Herstellung des zweiten totalen Differenzials von u benutzen werden.

252. Aus der Gleichung (a) vorangehender Nr. gewinnen wir für das zweite Differenziale der Function u, nämlich für $d^2u$, zunächst die Gleichung:

$$d^2u = d.(u_1dx) + d.(u_2dy) + d.(u_3dz),$$

aus der wir unter Annahme unendlich kleinwerdenden Zuwachsen von

$\omega$, $\omega'$, $\omega''$, oder dx, dy, dz

sind von den Variabeln x, y und z unabhängig, folgende Gleichung ziehen:

$$d^2u = dx\,d.u_1 + dy\,d.u_2 + dz\,d.u_3\,;$$

werden hier die Ergebnisse der Gleichungen (b′) vorangehender Nr. eingesetzt, so erhält man die Gleichung:

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2u}{dz^2}dz^2$$
$$+ 2\frac{d^2u}{dxdy}dxdy + 2\frac{d^2u}{dxdz}dxdz + 2\frac{d^2u}{dydz}dydz\,, \qquad (d)$$

die, vermöge der Relationen in (c) vorhergehender Nr., mit folgender gleichbedeutend ist:

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2u}{dz^2}dz^2$$
$$+ 2\frac{d^2u}{dydx}dxdy + 2\frac{d^2u}{dzdx}dxdz + 2\frac{d^2u}{dzdy}dydz\,. \qquad (d')$$

Behandelt man aber in der am Eingange aufgestellten Bestimmungsgleichung für $d^2u$ die Differenzialien dx, dy, dz, als von x, y und z dependirend; dann ist noch zu den Ausdrücken rechts der letzten zwei Gleichungen folgender Ausdruck:

$$\frac{du}{dx}d^2x + \frac{du}{dy}d^2y + \frac{du}{dz}d^2z$$

beizusetzen, so daß man unter dieser Annahme folgende Bestimmungsgleichung für $d^2u$ hat:

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2u}{dz^2}dz^2$$
$$+ 2\frac{d^2u}{dxdy}dxdy + 2\frac{d^2u}{dxdz}dxdz + 2\frac{d^2u}{dydz}dydz$$
$$+ \frac{du}{dx}d^2x + \frac{du}{dy}d^2y + \frac{du}{dz}d^2z\,. \qquad (e)$$

Werden nun die einfachen partiellen Differenzialquotienten, wie:

$$\frac{du}{dx}\,,\ \frac{du}{dy}\,,\ \frac{du}{dz}$$

partielle Differenzialquotienten erster Ordnung, und die zweifachen, wie

$$\frac{d^2u}{dx^2}, \quad \frac{d^2u}{dy^2}, \quad \frac{d^2u}{dz^2}, \quad \frac{d^2u}{dxdy}, \quad \frac{d^2u}{dxdz}, \quad \frac{d^2u}{dydz},$$

deren Bedeutung wir in vorhergehender Nr. festgestellt, partielle Differenzialquotienten zweiter Ordnung genannt; so zeigen uns die hier aufgestellten Gleichungen, daß das zweite Differenziale einer Function, wie $f(x, y, z)$, unter der ersten hier getroffenen Annahme, nur von partiellen Differenzialquotienten zweiter Ordnung abhängig sei, während unter der zweiten Annahme, außer diesen auch noch die partiellen Differenzialquotienten erster Ordnung bei der Darstellung des zweiten Differenzials der Function u mit erscheinen.

**253.** Auf analogem Wege wie in Nr. **251** gelangt man auch auf folgende Gleichungen:

$$\text{d.}\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^3u}{dx^3}dx + \frac{d^3u}{dx^2dy}dy + \frac{d^3u}{dx^2dz}dz,$$

$$\text{d.}\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d^3u}{dy^2dx}dx + \frac{d^3u}{dy^3}dy + \frac{d^3u}{dy^2dz}dz,$$

$$\text{d.}\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{d^3u}{dz^2dx}dx + \frac{d^3u}{dz^2dy}dy + \frac{d^3u}{dz^3}dz,$$

$$\text{d.}\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d^3u}{dx^2dy}dx + \frac{d^3u}{dxdy^2}dy + \frac{d^3u}{dxdydz}dz,$$

$$\text{d.}\frac{d^2u}{dzdx} = \frac{d^3u}{dzdx^2}dx + \frac{d^3u}{dzdxdy}dy + \frac{d^3u}{dz^2dx}dz,$$

$$\text{d.}\frac{d^2u}{dydz} = \frac{d^3u}{dydzdx}dx + \frac{d^3u}{dy^2dz}dy + \frac{d^3u}{dydz^2}dz,$$

wo z. B. der Ausdruck

$$\frac{d^3u}{dy^2dx}$$

partieller Differenzialquotient dritter Ordnung genannt wird und andeutet: die Function $f(x, y, z)$, oder u, sei zweimal nach einander partiell nach y und das Ergebniß einmal partiell nach x zu differenziren, das Ergebniß einer jedesmaligen Differenziation aber ist sofort in den entsprechenden Differenzialquotienten umzusetzen; eben so zeigt der partielle Differenzialquotient dritter Ordnung:

$$\frac{d^3u}{dxdydz},$$

daß dieselbe Function u zuerst partiell nach x, dann nach y und endlich nach z zu differenziren, und jedesmal in den entsprechenden Differenzialquotienten umzusetzen sei.

Aehnliche Relationen, wie die partiellen Differenzialquotienten zweiter Ordnung in den Gleichungen (c) Nr. 251 eingehen, finden auch unter den partiellen Differenzialquotienten dritter Ordnung Statt. So z. B. bestehen folgende:

$$\frac{d^3u}{dy^2dx} = \frac{d^3u}{dydxdy} = \frac{d^3u}{dxdy^2},$$

$$\frac{d^3u}{dxdydz} = \frac{d^3u}{dxdzdy} = \frac{d^3u}{dydxdz} = \ldots.$$

u. dgl. m.

Mit Hülfe dieser Relationen und der am Eingange aufgestellten Gleichungen erhält man für das totale dritte Differenziale von u die Gleichung:

$$d^3u = \frac{d^3u}{dx^3}dx^3 + \frac{d^3u}{dy^3}dy^3 + \frac{d^3u}{dz^3}dz^3$$
$$+ 3\frac{d^3u}{dx^2dy}dx^2dy + 3\frac{d^3u}{dxdy^2}dxdy^2$$
$$+ 3\frac{d^3u}{dx^2dz}dx^2dz + 3\frac{d^3u}{dxdz^2}dxdz^2$$
$$+ 3\frac{d^3u}{dy^2dz}dy^2dz + 3\frac{d^3u}{dydz^2}dydz^2$$
$$+ 6\frac{d^3u}{dxdydz}dxdydz,$$

die wir aus der Gleichung (d), also unter der Voraussetzung abgeleitet haben, daß die Differenzialien von x, y, z unendlich kleinwerdende, aber constante Größen sind.

254. Wird nach der in den vorangehenden Nrn. befolgten Weise fortgefahren, so erscheint jedes totale Differenziale von u durch partielle Differenzialquotienten von u darstellbar, und zwar nach einem aus den bisher behandelten wenigen Fällen leicht erkennbaren Bildungsgesetze. Bei diesem Anlasse überzeugt man sich alsbald von der Richtigkeit folgender allgemeinen Relation unter den partiellen Differenzialquotienten nter Ordnung:

$$\frac{d^nu}{dx^ady^bdz^c} = \frac{d^nu}{dx^{a'}dy^{b'}dz^{c'}dx^{a''}dy^{b''}dz^{c''}\ldots},$$

wo a, b, c, a′, b′, c′, a″, b″, c″, . . . ganze positive Zahlenwerthe, Null mitbegriffen, vorstellen, die folgenden Bedingungen nachkommen:

$$a + b + c = n,$$
$$a' + a'' + a''' + \ldots = a,$$
$$b' + b'' + b''' + \ldots = b,$$
$$c' + c'' + c''' + \ldots = c.$$

Es ergiebt sich aus all' dem bis jetzt Mitgetheilten, daß das Differenziren einer Function mehrerer Variabeln auf die wiederholte Differenziation derselben Function nach einer Variabeln, oder auf die Herstellung von partiellen Differenzialquotienten hinaus läuft. Bei jedem dieser partiellen Differenzialquotienten — da ein solcher auch als abgeleitete Function anzusehen ist — findet das Amper'sche Theorem (Nr. 16 des ersten Theiles der Differenzialrechnung) in seinem ganzen Umfange Statt, wie auch umgekehrt kann von den partiellen Differenzialquotienten nur in so weit Gebrauch gemacht werden, als die Prämissen dieses Theorems realisirt erscheinen, d. h. insofern die allgemeinen Größen der Function im Bereiche jener Werthe gedacht sind, die die Continuität der Function nicht stören.

---

## §. II.

## Differenziation von Gleichungen mit zwei und mehrern Variabeln.

255. Hat man eine Gleichung zwischen zwei allgemeinen oder variabeln Größen y und x, in der eine, z. B. y, gesondert vorkömmt und einer Function der zweiten x gleich ist, wie etwa in folgender Gleichung:

$$y = f(x), \qquad (1)$$

wo f(x) eine beliebige Function von x vorstellt; so läßt sich der Einfluß einer unendlich kleinwerdenden Aenderung von x auf y mit Hülfe des im ersten Theile der Differenzialrechnung Mitgetheilten sehr leicht bestimmen. Daselbst befaßten wir uns nämlich mit der Angabe der unendlich kleinwerdenden Aenderung der Function, falls

die allgemeine Größe derselben eine derartige Aenderung einging; im vorliegenden Falle nimmt die allgemeine Größe oder die relative Variable y (Einleitung Nr. 11) die Stelle dieser Function ein.

Stellt man sonach die unendlich kleinwerdende Aenderung von y durch dy dar, so hat man:

$$dy = f_1(x)\,dx, \text{ oder } dy = \frac{d.f(x)}{dx}\,dx,$$

welche Gleichung das Ergebniß der Differenziation der Gleichung (1) ist, und den Werth von dy darstellt.

Da man

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)$$

hat, so nennt man, gleichwie der Ausdruck rechts Differenzialquotient der Function f(x) genannt wird, auch den Ausdruck links, nämlich $\frac{dy}{dx}$, wofür auch bisweilen $y_1$ wird gesetzt werden, den Differenzialquotienten von y nach x; und man hat:

$$y_1 = \frac{dy}{dx} = f_1(x) = \frac{df(x)}{dx}. \qquad (2)$$

Auf gleiche Weise findet man den Einfluß einer unendlich kleinwerdenden Aenderung von x auf $y_1$, oder das Differenziale von $y_1$, das dieser letzten Gleichung (2) entspricht. Beachtet man nämlich die im ersten Theile der Differenzialrechnung eingeführte Bezeichnung, so hat man:

$$dy_1 = f_2(x)\,dx,$$

aus der sofort der Werth des zweiten Differenzials von y oder $d^2y$ gefolgert wird; denn es ist:

$$dy_1 = d.\frac{dy}{dx},$$

sonach hat man, wenn dx als Constante behandelt wird,

$$dy_1 = \frac{ddy}{dx}, \text{ oder } dy_1 = \frac{d^2y}{dx},$$

die, mit der vorigen Gleichung verbunden, auf

$$d^2y = f_2(x)\,dx^2$$

führt. Bezeichnet man die zweite Ableitung oder den zweiten Differenzialquotienten von y nach x, nämlich $\frac{d^2y}{dx^2}$, durch $y_2$, so hat man:

$$y_2 = \frac{d^2y}{dx^2} = f_2(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}.$$

Wird auf diesem Wege fortgefahren, so erhält man allgemein, wenn dx oder die unendlich kleinwerdende Aenderung von x, als von x unabhängig angesehen wird, für das nte Differenziale von y die Gleichung:

$$d^n y = f_n(x)\,dx^n$$

und für die eben so oftmalige Ableitung von y, oder für $y_n$, die Gleichung:

$$y_n = \frac{d^n y}{dx^n} = f_n(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

256. Nach dem, was in vorhergehender Nr. mitgetheilt wurde, kann und darf jede gesonderte Gleichung zweier Variabeln in Bezug auf diese Variabeln differenzirt werden; woraus das Verhältniß der gegenseitigen Aenderungen der Variabeln, falls diese unendlich kleinwerdend sind, entnommen werden kann. Dasselbe bei einer ungesonderten Gleichung zweier Variabeln zu erzielen, wollen wir mit vorliegender Nr. zeigen.

Besteht die Gleichung:

$$F(x,y) = 0, \qquad (1)$$

wo der Ausdruck zur Linken irgend eine Function von x und y vorstellt; so haben wir vorerst zu zeigen, daß das Ergebniß der Differenziation dieses Ausdruckes, nach x und y zugleich, ebenfalls der Null gleich sei.

Denken wir uns dieses darzuthun aus der Gleichung (1) y als Function von x ermittelt, und setzen dieses Ergebniß, das durch f(x) vorgestellt sein mag, statt y in dieselbe Gleichung (1) zurück; so stellt sich die in Bezug auf x völlig identische Gleichung heraus:

$$F[x, f(x)] = 0;$$

diese, die für jeden Werth von x Bestand hat, bietet, wenn in derselben x in $x + \omega$ umgesetzt wird, auch folgende Gleichheit dar:

$$F[x + \omega, f(x + \omega)] = 0.$$

Wird nun unter $\omega$ eine unendlich kleinwerdende Größe gedacht und in diesen beiden Gleichheiten unter x ein solcher Werth, der noch im Bereiche der Continuitätsgrenzen der Function f(x) fällt, dann hat man;

$$f(x + \omega) = f(x) + \omega f_1(x) = y + \omega y_1;$$

setzt man hier

$$\omega y_1 = \omega_1, \text{ also } f(x + \omega) = y + \omega_1,$$

wo $\omega_1$ nach der getroffenen Annahme über x gleichfalls einen unendlich klein werdenden Werth vorstellt, so ergeben sich folgende gleichzeitig bestehenden Gleichungen:

$$F(x,y) = 0, \; F(x + \omega, \; y + \omega_1) = 0.$$

Subtrahirt man von der zweiten die erste dieser Gleichungen, und berücksichtiget das im vorausgeschickten Paragraphen Nr. 249. Mitgetheilte; so stellt sich die oben angekündigte Gleichung:

$$d.\, F\,(x,\, y) = 0$$

heraus, d. h. beim Zugrundelegen einer Gleichung wie (1) findet gleichfalls das totale Differenziale derselben nach x sowohl, als nach y Statt, welches zu zeigen, wir uns vorgesetzt.

Der Grenzwerth des Ergebnisses der vorhin erwähnten Subtraktion wird gleichfalls nach Nr. 249 durch folgende Gleichung dargestellt:

$$\frac{dF(x,y)}{dx}\,\omega + \frac{dF(x,y)}{dy}\,\omega_1 = 0,$$

die, wenn für $\omega_1$ deren Werth $\omega y_1$ restituirt, und die ganze Gleichung durch $\omega$ dividirt wird, in folgende übergeht:

$$\frac{dF(x,y)}{dx} + \frac{dF(x,y)}{dy}\,y_1 = 0; \qquad (2)$$

aus der auf's deutlichste hervorgeht, daß man, auch ohne Auflösung der Gleichung (1) in Bezug auf y, dennoch zur Kenntniß des derselben entsprechenden Differenzialquotienten von y nach x, durch partielle Differenzialquotienten der Function F(x, y), jedesmal gelangen könne.

Die eben aufgestellte Gleichung (2) ist mit der folgenden

$$\frac{dF(x,y)}{dx} + \frac{dF(x,y)}{dy}\,\frac{dy}{dx} = 0, \qquad (2')$$

wie auch mit dieser:

$$\frac{dF(x,y)}{dx}\,dx + \frac{dF(x,y)}{dy}\,dy = 0 \qquad (2'')$$

gleichbedeutend, die sämmtlich nur insofern Bestand haben, als die rela-

Wird auf diesem Wege fortgefahren, so erhält man allgemein, wenn dx oder die unendlich kleinwerdende Aenderung von x, als von x unabhängig angesehen wird, für das nte Differenziale von y die Gleichung:

$$d^n y = f_n(x)\,dx^n$$

und für die eben so oftmalige Ableitung von y, oder für $y_n$, die Gleichung:

$$y_n = \frac{d^n y}{dx^n} = f_n(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

256. Nach dem, was in vorhergehender Nr. mitgetheilt wurde, kann und darf jede gesonderte Gleichung zweier Variabeln in Bezug auf diese Variabeln differenzirt werden; woraus das Verhältniß der gegenseitigen Aenderungen der Variabeln, falls diese unendlich kleinwerdend sind, entnommen werden kann. Dasselbe bei einer ungesonderten Gleichung zweier Variabeln zu erzielen, wollen wir mit vorliegender Nr. zeigen.

Besteht die Gleichung:

$$F(x,y) = 0, \qquad (1)$$

wo der Ausdruck zur Linken irgend eine Function von x und y vorstellt; so haben wir vorerst zu zeigen, daß das Ergebniß der Differenziation dieses Ausdruckes, nach x und y zugleich, ebenfalls der Null gleich sei.

Denken wir uns dieses darzuthun aus der Gleichung (1) y als Function von x ermittelt, und setzen dieses Ergebniß, das durch f(x) vorgestellt sein mag, statt y in dieselbe Gleichung (1) zurück; so stellt sich die in Bezug auf x völlig identische Gleichung heraus:

$$F[x, f(x)] = 0;$$

diese, die für jeden Werth von x Bestand hat, bietet, wenn in derselben x in $x + \omega$ umgesetzt wird, auch folgende Gleichheit dar:

$$F[x + \omega, f(x + \omega)] = 0.$$

Wird nun unter $\omega$ eine unendlich kleinwerdende Größe gedacht und in diesen beiden Gleichheiten unter x ein solcher Werth, der noch im Bereiche der Continuitätsgrenzen der Function f(x) fällt, dann hat man;

$$f(x + \omega) = f(x) + \omega f_1(x) = y + \omega y_1;$$

setzt man hier

$$\omega y_1 = \omega_1, \text{ also } f(x + \omega) = y + \omega_1,$$

wo $\omega_1$ nach der getroffenen Annahme über x gleichfalls einen unendlich klein werdenden Werth vorstellt, so ergeben sich folgende gleichzeitig bestehenden Gleichungen:

$$F(x,y) = 0, \; F(x + \omega, \; y + \omega_1) = 0.$$

Subtrahirt man von der zweiten die erste dieser Gleichungen, und berücksichtiget das im vorausgeschickten Paragraphen Nr. 249. Mitgetheilte; so stellt sich die oben angekündigte Gleichung:

$$d.\, F\,(x,\, y) = 0$$

heraus, d. h. beim Zugrundelegen einer Gleichung wie (1) findet gleichfalls das totale Differenziale derselben nach x sowohl, als nach y Statt, welches zu zeigen, wir uns vorgesetzt.

Der Grenzwerth des Ergebnisses der vorhin erwähnten Subtraktion wird gleichfalls nach Nr. 249 durch folgende Gleichung dargestellt:

$$\frac{dF(x,y)}{dx}\,\omega + \frac{dF(x,y)}{dy}\,\omega_1 = 0,$$

die, wenn für $\omega_1$ deren Werth $\omega y_1$ restituirt, und die ganze Gleichung durch $\omega$ dividirt wird, in folgende übergeht:

$$\frac{dF(x,y)}{dx} + \frac{dF(x,y)}{dy}\,y_1 = 0; \qquad (2)$$

aus der auf's deutlichste hervorgeht, daß man, auch ohne Auflösung der Gleichung (1) in Bezug auf y, dennoch zur Kenntniß des derselben entsprechenden Differenzialquotienten von y nach x, durch partielle Differenzialquotienten der Function F(x, y), jedesmal gelangen könne.

Die eben aufgestellte Gleichung (2) ist mit der folgenden

$$\frac{dF(x,y)}{dx} + \frac{dF(x,y)}{dy}\,\frac{dy}{dx} = 0, \qquad (2')$$

wie auch mit dieser:

$$\frac{dF(x,y)}{dx}\,dx + \frac{dF(x,y)}{dy}\,dy = 0 \qquad (2'')$$

gleichbedeutend, die sämmtlich nur insofern Bestand haben, als die rela-

tive Variable y, aus (1) bestimmt, als continuirliche Function von x erkannt wird; oder, diese Gleichungen bestehen nur für jene Werthe von x, für die y, aus (1) bestimmt gedacht, den Zustand der Continuität nicht verläßt.

257. Mit Zugrundelegung der Gleichungen (1) und (2) vorangehender Nr. kann die Bestimmung des zweiten Differenzialcoefficienten oder Differenzialquotienten von y nach x, nämlich die Bestimmung von $y_2$ vorgenommen werden. — Es enthält nämlich der Ausdruck zur Linken der Gleichung (2) die drei Variabeln x, y und $y_1$; stellen wir denselben zur Vereinfachung der Darstellung durch $F'(x,y,y_1)$ dar, so haben wir:

$$F'(x, y, y_1) = 0; \qquad (2''')$$

wenn nun y aus Gleichung (1) und $y_1$ aus (2) vorhergehender Nr. bestimmt, und die Ergebnisse in die so eben aufgestellte Gleichung gesetzt werden, also $f(x)$ für y und $f_1(x)$ für $y_1$: dann hat man folgende, in Bezug auf x identische Gleichung:

$$F'\left(x, f(x), f_1(x)\right) = 0.$$

Läßt man hier x in $x + \omega$ übergehen, so hat man vorerst, wenn nämlich $\omega$ eine unendlich kleinwerdende Größe ist, folgende Gleichungen:

$$f(x + \omega) = f(x) + \omega f_1(x) = y + \omega y_1,$$
$$f_1(x + \omega) = f_1(x) + \omega f_2(x) = y_1 + \omega y_2;$$

und da diese nur insofern bestehen, als die Ausdrücke:

$$\omega y_1 \text{ und } \omega y_2$$

unendlich kleinwerdende Werthe vorstellen; so geht nunmehr obige Gleichung durch's Umsetzen von x in $x + \omega$ in:

$$F'(x + \omega, y + \omega_1, y_1 + \omega_2) = 0$$

über, wo man

$$\omega_1 = \omega y_1 \text{ und } \omega_2 = \omega y_2$$

gesetzt hat, und wo dem eben Gesagten zu Folge $\omega$, $\omega_1$, $\omega_2$ unendlich kleinwerdende Größen repräsentiren.

Subtrahirt man von dieser die Gleichung (2'''), so bietet sich, nach Nr. 250, als Grenzwerth dieses Unterschiedes folgende Gleichung dar:

$$\frac{du'}{dx}\omega + \frac{du'}{dy}\omega_1 + \frac{du'}{dy_1}\omega_2 = 0,$$

wo man zur Abkürzung

$$u' = F'(x,y,y_1) = \frac{dF(x,y)}{dx} + \frac{dF(x,y)}{dy}\, y_1$$

gesetzt, und wo die Ausdrücke:

$$\frac{du'}{dx}, \quad \frac{du'}{dy}, \quad \frac{du'}{dy_1}$$

nach der Ordnung ihrer Folge, die partiellen Differenzialquotienten von $u'$ nach $x$, nach $y$ und nach $y_1$ vorstellen.

Restituirt man hier die Werthe für $\omega_1$ und $\omega_2$, theilt hierauf das Ergebniß durch $\omega$; so erhält man:

$$\frac{du'}{dx} + \frac{du'}{dy}\, y_1 + \frac{du'}{dy_1}\, y_2 = 0, \qquad (I)$$

aus der, auch ohne nähere Beschreibung, die Vorschrift, eine Gleichung wie (2) vorhergehender Nr. zu differenziren, sehr leicht entnommen wird.

Werden überdieß noch die angezeigten partiellen Differenzialquotienten ausgeführt, wo man:

$$\frac{du'}{dx} = \frac{d^2F(x,y)}{dx^2} + \frac{d^2F(x,y)}{dxdy}\, y_1,$$

$$\frac{du'}{dy} = \frac{d^2F(x,y)}{dxdy} + \frac{d^2F(x,y)}{dy^2}\, y_1,$$

$$\frac{du'}{dy_1} = \frac{dF(x,y)}{dy}$$

erhält; so geht die vorangehende Gleichung über in

$$\frac{d^2F(x,y)}{dx^2} + 2\,\frac{d^2F(x,y)}{dxdy}\, y_1 + \frac{d^2F(x,y)}{dy^2}\, y_1^2 + \frac{dF(x,y)}{dy}\, y_2 = 0, \qquad (3)$$

welche als Ergebniß der Differenziation von Gleichung (2) vorangehender Nr. anzusehen, und zum Werthe von $y_2$ oder von $\frac{d^2y}{dx^2}$ führt.

Dieselbe besteht jedoch blos für jene Werthe von $x$, im Bereiche deren die aus den Gleichungen (1) und (2) vorangehender Nr. gefolgerten Werthe von $y$ und $y_1$, als continuirliche Functionen dieser allgemeinen Größe $x$ sich herausstellen.

258. Um $y_3$ oder $\frac{d^3y}{dx^3}$ zu erhalten, stellen wir einstweilen den

Ausdruck zur Linken in Gleichung (3) vorangehender Nr. abwechselnd durch $F''(x, y, y_1, y_2)$ oder auch durch $u''$ vor, wodurch diese Gleichung unter einfacherer Form, wie folgt, dargestellt wird:

$$F''(x, y, y_1, y_2) = 0.$$

Wenn nun die aus (1), (2), (3) der zwei vorangehenden Nrn. gefolgerten, oder nur gefolgert gedachten Werthe von $y$, $y_1$, $y_2$ durch die Gleichungen:

$$y = f(x),\ y_1 = f_1(x),\ y_2 = f_2(x)$$

dargestellt werden, so erhält man, nach Einsetzung dieser Werthe in diese, so eben aufgestellte Gleichung, folgende in Bezug auf $x$ identische Gleichung:

$$F''\big(x, f(x), f_1(x), f_2(x)\big) = 0.$$

Wird ferner unter $x$ eine Zahlengröße gedacht, die noch im Bereiche der Continuitätsgrenzen der Functionen:

$$f(x),\ f_1(x),\ f_2(x)$$

fällt, und läßt man $x$ in $x + \omega$ übergehen; so hat man, wenn $\omega$ unendlich kleinwerdend gedacht wird, vorerst die Gleichungen:

$$\begin{aligned} f(x + \omega) &= f(x) + \omega f_1(x) = y + \omega y_1 = y + \omega_1, \\ f_1(x + \omega) &= f_1(x) + \omega f_2(x) = y_1 + \omega y_2 = y_1 + \omega_2, \\ f_2(x + \omega) &= f_2(x) + \omega f_3(x) = y_2 + \omega y_3 = y_2 + \omega_3, \end{aligned}$$

wo $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ ohne Ende abnehmende Größen vorstellen und der Kürze wegen statt

$$\omega y_1,\ \omega y_2,\ \omega y_3$$

gesetzt worden sind. Mittelst dieser Gleichungen erhält man, zugleich mit der am Eingange aufgestellten Gleichung, auch folgende:

$$F''(x + \omega, y + \omega_1, y_1 + \omega_2, y_2 + \omega_3) = 0,$$

die durch Subtraktion verbunden, auf folgende Grenzgleichung führen:

$$\frac{du''}{dx}\omega + \frac{du''}{dy}\omega_1 + \frac{du''}{dy_1}\omega_2 + \frac{du''}{dy_2}\omega_3 = 0,$$

oder auch, vermöge der Werthe von $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, auf:

$$\frac{du''}{dx} + \frac{du''}{dy}y_1 + \frac{du''}{dy_1}y_2 + \frac{du''}{dy_2}y_3 = 0, \qquad \text{(II)}$$

welche letztere eine Gleichung wie (3) differenziren lehrt.

Berücksichtiget man die Bedeutung von $u''$ und differenzirt man diese partiell nach x, nach y, nach $y_1$ und nach $y_2$; so erhält man, nach Einführung der Ergebnisse dieser Differenziationen in die letzte Gleichung, folgende:

$$\frac{d^3F(x,y)}{dx^3} + 3\,\frac{d^3F(x,y)}{dx^2dy}\,y_1 + 3\,\frac{d^3F(x,y)}{dxdy^2}\,y_1^2 + \frac{d^3F(x,y)}{dy^3}\,y_1^3$$
$$+ 3\,\frac{d^2F(x,y)}{dxdy}\,y_2 + 3\,\frac{d^2F(x,y)}{dy^2}\,y_1y_2 + \frac{dF(x,y)}{dy}\,y_3 = 0, \quad (4)$$

aus der der Werth von $y_3$, oder der dritte Differenzialquotient von y nach x ermittelt werden kann.

Auf dem bis jetzt befolgten Wege fortgefahren, gelangt man auch auf Gleichungen, die $y_4$, $y_5$, $y_6$, . . . enthalten, bei deren Herstellung wir aber nicht verweilen, da solches nunmehr in theoretischer Beziehung keiner besondern Schwierigkeit unterliegen kann. Der Umstand ist jedoch nicht außer Acht zu lassen, daß alle diese Gleichungen, wie (2), (3), (4) u. s. w. nur insofern Bestand haben, als die aus den Gleichungen (1), (2), (3) u. s. w. gefolgerten Werthe von y, $y_1$, $y_2$, u. s. w. continuirliche Functionen von x sind; so besteht z. B. die so eben angegebene Gleichung (4) nur für jene Werthe von x, für die y, $y_1$ und $y_2$ aus den Gleichungen (1), (2) und (3) gezogen, als continuirliche Functionen von x erscheinen.

259. In den vorausgeschickten drei Nrn. gingen wir von der Gleichung (1) aus und zeigten, daß, auch ohne diese Gleichung in Bezug auf y aufzulösen, dennoch durch eine successive Differenziation derselben die Differenzialquotienten von y nach x, nämlich $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$, . . . sich herstellen lassen. Die successiven Differenziationen rechtfertigten wir, indem wir jedesmal eine in Bezug auf die allgemeine Größe x identische Gleichung herstellten. Nun fällt aber diese Stütze weg, sobald man nicht von der eben citirten Gleichung (1), sondern von einer, wie etwa die folgende:

$$F(x, y, y_1, y_2, y_3, \ldots y_n) = 0 \quad (A)$$

auszugehen sich angewiesen sieht, in der $y_1$, $y_2$, $y_3$, . . . $y_n$ successive Differenzialquotienten von y nach x, vom ersten bis zum nten vorstellen.

Handelt es sich nun darum, bei alleiniger Zugrundelegung dieser

Gleichung den Werth von $y_{n+1}$ oder vom $(n+1)$ten Differenzialquotienten derselben Variabeln y nach x anzugeben; so fällt die vorhin erwähnte Stütze, diese hier vorgelegte Gleichung in eine Gleichheit oder in eine in Bezug auf x identische Gleichung umzuformen, weg, wenn nicht vorerst dargethan wird: es existirt auch eine Function von x, die sammt ihren successiven Differenzialquotienten statt

$$y,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_n$$

in diese Gleichung gesetzt, dieselbe in eine identische umsetzen. Da aber nach dem gegenwärtigen Stand unserer Wissenschaft dieser Anforderung nicht entsprochen werden kann; so erlaubt man sich, das Dasein einer solchen Function auch ohne Begründung anzunehmen, wodurch allein eine Differenziation dieser Gleichung (A) gerechtfertigt werden kann. Durch Betrachtungen, denen der letzten drei Nrn. ganz ähnlich, gelangt man dann, als Ergebniß dieser Differenziation auf die Gleichung:

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}\,y_1 + \frac{du}{dy_1}\,y_2 + \frac{du}{dy_2}\,y_3 + \ldots + \frac{du}{dy_n}\,y_{n+1} = 0,$$

wo $y_{n+1}$ den $(n+1)$ten Differenzialquotienten von y nach x vorstellt, und wo der Kürze wegen:

$$u \text{ statt } F(x,\ y,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_n)$$

gesetzt worden ist.

260. Wenn eine Gleichung wie (A) vorangehender Nr. vorliegt, geht man, wie daselbst erwähnt wurde, von der Voraussetzung aus, für y existirt eine Function von x, die sammt den aus derselben gefolgerten Werthen von $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ in (A) substituirt, letztere in eine identische Gleichung umsetzen. Wir haben hierbei x als die absolute und y als die relative Variable angesehen. — Nun ist es bisweilen zweckdienlich, x als Function einer neuen Variabeln anzusehen, wo nunmehr diese neue Variable, die durch t vorgestellt sein mag, die absolute ist. Da alsdann auch y, und zwar vermittelt durch x, eine Function von t ist; so wollen wir in vorliegender Nr. zeigen, wie die successiven Differenzialquotienten von y nach x in denen von y nach t umzusetzen, d. h. wie bei besagter Abänderung der absoluten Variabeln die Gleichung (A) zu umformen sei.

Stellt man diese vermittelnde Gleichung durch

$$x = \psi(t)$$

dar, dann durch $\frac{dy}{dx}$ den Differenzialquotienten von y nach x und analog durch $\frac{dx}{dt}$ den Differenzialquotienten von x nach t; so hat man, wegen:

$$dy = \frac{dy}{dx}\,dx, \text{ und } dx = \frac{dx}{dt}\,dt,$$

die Gleichung:

$$dy = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}\,dt,$$

aus der

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \qquad (a)$$

gefolgert wird. Diese Gleichung, die den Differenzialquotienten von y nach t, als Produkt der Differenzialquotienten von y nach x und von x nach t darstellt, dient als Grundlage bei Herstellung des gegenseitigen Differenzialquotienten zweier allgemeinen Größen, deren Abhängigkeit nicht unmittelbar durch eine Gleichung gegeben, sondern wenn dieselbe durch andere allgemeine Größen vermittelt wird, deren gegenseitige Beziehungen durch eine genügende Anzahl von Gleichungen festgestellt sind. So ist die folgende Gleichung:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dz} \cdot \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dt},$$

eine Erweiterung dieser Gleichung (a); in dieser ist u unmittelbar als Function von t gegeben vorausgesetzt worden, und die Abhängigkeit zwischen y und t erscheint hier durch die Abhängigkeit zwischen z und u, zwischen x und z und zwischen y und x vermittelt.

Stellt man, eine Vereinfachung in der Darstellung zu erzielen, die Differenzialquotienten:

$$\frac{dx}{dt} \text{ und } \frac{dy}{dt} \text{ durch } x_1' \text{ und } y_1'$$

dar, und durch $y_1$ den Differenzialquotienten von y nach $x_1$; so geht obige Gleichung (a) über in:

$$y_1' = y_1\, x_1'.$$

Differenzirt man diese, so hat man:

$$dy_1' = x_1'\, dy_1 + y_1\, dx_1',$$

die wegen der Gleichungen:

$$dy_1 = y_2 dx = y_2 \frac{dx}{dt}\, dt, \quad dx_1' = \frac{dx_1'}{dt}\, dt,$$

in folgende übergeht:

$$dy_1' = \left(y_2 x_1' \frac{dx}{dt} + y_1 \frac{dx_1'}{dt}\right) dt,$$

oder auch in:

$$dy_1' = \left(y_2 x_1'^2 + y_1 \frac{dx_1'}{dt}\right) dt;$$

aus der

$$\frac{dy_1'}{dt} = y_2 x_1'^2 + y_1 \frac{dx_1'}{dt}$$

gezogen wird.

Nun hat man:

$$\frac{dy_1'}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \text{ und } \frac{dx_1'}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2};$$

wenn sonach analog wie oben die Differenzialquotienten zweiter Ordnung nach t, nämlich:

$$\frac{d^2x}{dt^2} \text{ und } \frac{d^2y}{dt^2} \text{ durch } x_2' \text{ und } y_2'$$

dargestellt werden; dann stellt folgende Gleichung das Ergebniß der Differenziation der Gleichung (a) dar:

$$y_2' = y_2 x_1'^2 + y_1 x_2'.$$

Wird auch diese Gleichung differenzirt, so ergiebt sich zunächst:

$$dy_2' = x_1'^2\, dy_2 + x_2'\, dy_1 + 2 y_2 x_1'\, dx_1' + y_1 dx_2';$$

nun ist:

$$dy_2 = y_3 dx, \; dy_1 = y_2 dx, \; dx_1' = \frac{dx_1'}{dt}\, dt, \; dx_2' = \frac{dx_2'}{dt}\, dt$$

und wegen

$$dx = \frac{dx}{dt}\, dt = x_1'\, dt,$$

daher hat man folgende Gleichung:

$$dy_2' = \left(y_3 x_1'^3 + y_2 x_1' x_2' + 2 y_2 x_1' x_2' + y_1 \frac{dx_2'}{dt}\right) dt,$$

aus welcher folgende gezogen wird:

$$\frac{dy_2'}{dt} = y_3 x_1'^3 + 3 y_2 x_1' x_2' + y_1 \frac{dx_2'}{dt};$$

es ist aber

$$\frac{dy_2'}{dt} = \frac{d^3y}{dt^3} \text{ und } \frac{dx_2'}{dt} = \frac{d^3x}{dt^3},$$

wenn sonach die Differenzialquotienten dritter Ordnung von y und x nach t respective durch:

$$y_3' \text{ und } x_3'$$

angedeutet werden, so hat man:

$$y_3' = y_3 x_1'^3 + 3 y_2 x_1' x_2' + y_1 x_3'.$$

Eben so findet man

$$y_4' = y_4 x_1'^4 + 6 y_3 x_1'^2 x_2' + y_2 (4 x_1' x_3' + 3 x_2'^2) + y_1 x_4',$$

wo der Kürze wegen:

$$y_4' \text{ und } x_4' \text{ statt } \frac{d^4y}{dt^4} \text{ und } \frac{d^4x}{dt^4}$$

gesetzt worden ist.

Stellen wir die gefundenen Ergebnisse zusammen, so haben wir:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= y_1 x_1', \\ y_2' &= y_2 x_1'^2 + y_1 x_2', \\ y_3' &= y_3 x_1'^3 + 3 y_2 x_1' x_2' + y_1 x_3', \\ y_4' &= y_4 x_1'^4 + 6 y_3 x_1'^2 x_2' + y_2 (4 x_1' x_3' + 3 x_2'^2) + y_1 x_4', \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

u. s. w.,

aus welchen folgende Gleichungen gezogen werden:

$$\left.\begin{aligned} x_1' y_1 &= y_1', \\ x_1'^3 y_2 &= y_2' x_1' - y_1' x_2', \\ x_1'^5 y_3 &= y_3' x_1'^2 - 3 y_2' x_1' x_2' + y_1' (3 x_2'^2 - x_1' x_3'), \\ x_1'^7 y_4 &= y_4' x_1'^3 - 6 y_3' x_1'^2 x_2' + y_2' (15 x_1' x_2'^2 - 4 x_1'^2 x_3') \\ &\quad - y_1' (15 x_2'^3 - 10 x_1' x_2' x_3' + x_1'^2 x_4'), \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

u. s. w.

in welchen letztern die Differenzialquotienten:

$$x_1', x_2', x_3', x_4', \ldots$$
$$y_1', y_2', y_3', y_4', \ldots$$

sämmtlich auf die absolute Variable t, und die Differenzialquotienten zur Linken daselbst, nämlich:

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ \ldots$$

auf die vermittelnde Variable zwischen y und t, nämlich auf x Bezug haben.

Stellt man in den obigen Gleichungen (c) die auf t Bezug habenden Differenzialquotienten in allgemein üblicher Weise dar, multiplicirt dann solche in der Ordnung ihrer Aufeinanderfolge mit

$$dt,\ dt^3,\ dt^5,\ dt^7,\ \ldots;$$

so stellen sich diese Gleichungen (c) auch folgendermaßen dar:

$$\left.\begin{aligned}
y_1 dx &= dy\\
y_2 dx^3 &= dx\,d^2y - d^2x\,dy,\\
y_3 dx^5 &= dx^2 d^3y - 3\,dx\,d^2x\,d^2y + \{3\,(d^2x)^2 - dx\,d^3x\}\,dy,\\
y_4 dx^7 &= dx^3 d^4y - 6\,dx^2 d^2x\,d^3y + \{15\,dx\,(d^2x)^2 - 4\,dx^2 d^3x\}\,d^2y\\
&\quad - \{15\,(d^2x)^3 - 10\,dx\,d^2x\,d^3x + dx^2 d^4x\}\,dy,
\end{aligned}\right\} \quad (c')$$

u. s. w.

wo sämmtliche Differenzialien auf die absolute Variable t Bezug haben.

Setzt man die für $y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots$ gewonnenen Ergebnisse, entweder die aus (c′) oder die aus (c) in die Gleichung (A) vorvorangehender Nr.; so erhält man die Umgeformte derselben in verlangter Weise.

Das allgemeine Bildungsgesetz der Gleichungen (c) und (c′) unter einer speciellen Annahme über die Beschaffenheit der Function $\psi(t)$ werden wir noch in der folgenden Nr. mittheilen.

261. Wir setzen Eingangs vorhergehender Nr. die Abhängigkeit zwischen x und t durch die Gleichung:

$$x = \psi(t)$$

fest, wo $\psi(t)$ jede Function von t vorstellen konnte; da wir uns einmal zur Annahme berechtiget erklärten, es existirt eine Function von x, die für y in Gleichung (A) Nr. 259 gesetzt, derselben identisch ein Genüge thut: so ist über diese willkührliche Function $\psi(t)$ auch dergestalt zu verfügen möglich, daß man

$$y = t$$

habe, wodurch nunmehr

$$x = \psi(y)$$

erhalten wird.

Nach dieser Annahme über die gegenseitige Abhängigkeit der drei Variablen x, y und t ist letztere sehr leicht zu eliminiren möglich, und man hat:

$$y_1' = 1\,,\ y_2' = 0\,,\ y_3' = 0\,,\ y_4' = 0\,,\ \text{u. s. w.}$$

$$x_1' = \frac{dx}{dy},\ x_2' = \frac{d^2x}{dy^2},\ x_3' = \frac{d^3x}{dy^3},\ x_4' = \frac{d^4x}{dy^4},\ \text{u. s. w.};$$

wodurch dann die Gleichungen (c) vorhergehender Nr. in folgende, viel einfachere übergehen:

$$y_1 = \frac{dy}{dx},$$

$$y_2 = -\frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2},$$

$$y_3 = \frac{dy}{dx}\left(3\left(\frac{d^2x}{dx^2}\right)^2 - \frac{d^3x}{dx^3}\right),$$

$$y_4 = -\frac{dy}{dx}\left(15\left(\frac{d^2x}{dx^2}\right)^3 - 10\,\frac{d^2x}{dx^2}\,\frac{d^3x}{dx^3} + \frac{d^4x}{dx^4}\right),$$

. . . . . .;

wo die Differenzialien rechterhand allerdings auf t sich beziehen, wegen des eben getroffenen Zusammenhanges zwischen t und y aber, die Differenzialien von x, als auf y Bezug habend, angesehen werden dürfen; setzt man daher folgende Gleichungen fest:

$$\frac{dx}{dy} = x_1\,;\ \frac{d^2x}{dy^2} = x_2\,,\ \frac{d^3x}{dy^3} = x_3\,,\ \frac{d^4x}{dy^4} = x_4\ \text{u. s. w.}$$

so hat man auch:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{x_1}, \\ y_2 &= -\frac{1}{x_1}\frac{x_2}{x_1^2}, \\ y_3 &= \frac{1}{x_1}\left(3\,\frac{x_2^2}{x_1^4} - \frac{x_3}{x_1^3}\right), \\ y_4 &= -\frac{1}{x_1}\left(15\,\frac{x_2^3}{x_1^6} - 10\,\frac{x_2x_3}{x_1^5} + \frac{x_4}{x_1^4}\right) \end{aligned}\right\} \quad (c'')$$

u. s. w.

Werden diese Ergebnisse in die Gleichung (A), Nr. 259 eingesetzt, dann stellt sich solche in der Weise umgeformt dar, daß nunmehr y die absolute und x die relative Variable ist; denn die so erhaltene Umgeformte enthält außer y und x auch die Größen:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots$$

welche die successiven Differenzialquotienten von x nach y vorstellen.

In der Integralrechnung, namentlich bei der Integration der Differenzialgleichungen bietet sich öfters der Anlaß dar, solche Umformungen ihres guten Erfolges wegen vorzunehmen; um jedoch hier schon eine Anwendung derselben zu zeigen, werden wir in der nächstfolgenden Nr. mit Hülfe der zuletzt aufgestellten Gleichungen (c'') die sogenannte Reversionsgleichung ableiten, zu welchem Zwecke wir noch das allgemeine Bildungsgesetz derselben durch eine Recursion mittheilen.

Deuten wir den Differenzialquotienten irgend einer der Größen:

$$y, y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots$$

nach x dadurch an, indem wir dieselbe mit runden Klammern umgeben und rechts derselben den Zeiger 1 unten beisetzen; so sind die obigen Gleichungen (c'') mit den folgenden gleich bedeutend:

$$y_1 = \frac{1}{x_1},\quad y_2 = \frac{1}{x_1}(y_1)_1,\quad y_3 = \frac{1}{x_1}(y_2)_1,\quad y_4 = \frac{1}{x_1}(y_3)_1,\quad \text{u. s. w.}$$

wo sonach $(y_1)_1$ den Differenzialquotienten von $y_1$, oder von dessen Werth $\frac{1}{x_1}$ nach y vorstellt, wo ferner $(y_2)_1$ den Differenzialquotienten von:

$$y_2 = -\frac{x_2}{x_1^3}$$

nach y, und wo $(y_3)_1$ den Differenzialquotienten von:

$$y_3 = \frac{1}{x_1}\left(3\,\frac{x_2^2}{x_1^4} - \frac{x_3}{x_1^3}\right)$$

gleichfalls nach y u. s. w. vorstellt; wobei man folgende Gleichungen:

$$dx_1 = x_2 dy,\quad dx_2 = x_3 dy,\quad dx_3 = x_4 dy,\quad \text{u. s. w.},$$

als bestehend angenommen hat.

Um nun die allgemeine Gültigkeit des durch die obigen Gleichun-

gen ausgesprochenen Bildungsgesetzes darzuthun, nämlich daß man allgemein:

$$y_n = \frac{1}{x_1}(y_{n-1})_1 \qquad (B)$$

habe, bedenke man, daß nach dem oben getroffenen Uebereinkommen folgende Gleichung besteht:

$$(y_{n-1})_1 = \frac{dy_{n-1}}{dy};$$

nun ist

$$dy_{n-1} = y_n dx,$$

daher hat man auch

$$(y_{n-1})_1 = y_n \frac{dx}{dy},$$

woraus

$$y_n = \frac{dy}{dx}(y_{n-1})_1, \text{ oder } y_n = \frac{1}{x_1}(y_{n-1})_1.$$

gezogen wird, w. z. z. w.

262. Eine nicht unwichtige Anwendung der in vorangehender Nr. gewonnenen Ergebnisse ist, wie daselbst erwähnt wurde, die Herstellung einer Reversionsgleichung.

Hat man nämlich die Gleichung:

$$x = \psi(y) \qquad (I)$$

wo $\psi(y)$ irgend eine Function von y bedeutet, so wollen wir die Gleichung, die umgekehrt, y als Function von x darstellt, die Reversionsgleichung zur vorgelegten nennen.

Die Function von x, durch die wir y ausdrücken, werden wir, wie sogleich gezeigt werden soll, als eine nach aufsteigenden ganzen Potenzen von x, ohne Ende fortlaufende Reihe darstellen, die auch ein Ergänzungsglied, ähnlich dem bei der Taylor'schen oder Maclaurin'schen Reihe der ersten Abtheilung der Differenzialrechnung, mitführen wird.

Aus der hier vorgelegten Gleichung (I) wird unmittelbar entnommen, daß y eine Function von x sein muß; stellt man diese

einstweilen durch f(x) dar, so bietet das Maclaurin'sche Theorem (Nr. 27, Gleich. (24)) folgende Entwickelung dar:

$$f(x) = f(0) + xf_1(0) + \frac{x^2}{1.2} f_2(0) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{x^{k-1}}{1.2.3..(k-1)} f_{k-1}(0) + \frac{x^k}{1.2.3..k} f_k(\alpha x)$$

die wie folgt gestellt werden kann:

$$y = y^{(0)} + x\, y_1{}^{(0)} + \frac{x^2}{1.2} y_2{}^{(0)} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{x^{k-1}}{1.2.3..(k-1)} y_{k-1}{}^{(0)} + \frac{x^k}{1.2.3...k} y_k{}^{(\alpha x)}, \quad \text{(II)}$$

wo

$$y^{(0)}, \; y_1{}^{(0)}, \; y_2{}^{(0)}, \; \ldots \; y_{k-1}{}^{(0)}$$

die der Annahme $x = 0$ entsprechenden Werthe von $y$, $y_1$, $y_2$, .. $y_{k-1}$ vorstellen, und $y_k{}^{(\alpha x)}$ den Werth von:

$$y_k = \frac{d^k y}{dx^k}$$

vorstellt, falls man im Ergebnisse des kten Differenzialquotienten von y nach x, x in $\alpha x$ umsetzt, wobei $\alpha$ einen positiven echtgebrochenen Zahlenwerth bedeutet.

Nun hat man nach der vorangehenden Nr.

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{x_1}, \\ y_2 &= \frac{1}{x_1}(y_1)_1, \\ y_3 &= \frac{1}{x_1}(y_2)_1, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_{k-1} &= \frac{1}{x_1}(y_{k-2})_1, \\ y_k &= \frac{1}{x_1}(y_{k-1})_1; \end{aligned}\right\} \quad \text{(III)}$$

bestimmt man nach und nach die Ausdrücke zur Linken dieser Gleichungen, indem man von der Gleichung (I) ausgeht; stellt hierauf

gleichfalls mit Zuziehung der Gleichung (I) die Werthe der Ausdrücke:

$$y^{(0)},\ y_1^{(0)},\ y_2^{(0)},\ \ldots\ y_{k-1}^{(0)},\ y_k^{(\alpha x)}$$

her; setzt endlich die so gewonnenen Ergebnisse in (II) ein: so stellt diese dann die verlangte inverse zur Gleichung (I) vor.

Den richtigen Gebrauch dieser Gleichungen zu ersehen, legen wir uns folgende Gleichung:

$$x = e^y - 1$$

zur Umkehrung vor.

Man findet zuerst:

$$x_1 = e^y,\ \text{also}\ \frac{1}{x_1} = e^{-y}$$

mithin erhält man:

$$y_1 = e^{-y}\ \text{und}\ (y_1)_1 = -1.e^{-y};$$

aus der letztern gewinnt man:

$$y_2 = -1.e^{-2y}\ \text{und}\ (y_2)_1 = 1.2\,e^{-2y};$$

aus dieser wiederum folgende:

$$y_3 = 1.2\,e^{-3y}\ \text{und}\ (y_3)_1 = -1.2.3\,e^{-3y};$$

eben so giebt diese Gleichung folgende:

$$y_4 = -1.2.3\,e^{-4y}\ \text{und}\ (y_4)_1 = 1.2.3.4\,e^{-4y};$$

wenn in dieser Weise fortgesetzt wird, ergiebt sich allgemein:

$$y_{k-1} = (-1)^{k-2}\ 1.2.3\ \ldots\ (k-2)\,e^{-(k-1)y};$$

und da aus dieser

$$(y_{k-1})_1 = (-1)^{k-1}\ 1.2.3\ \ldots\ (k-2)\ (k-1)\,e^{-(k-1)y}$$

gezogen wird, so hat man auch:

$$y_k = (-1)^{k-1}\ 1.2.3.4\ \ldots\ (k-1)\,e^{-ky}.$$

Wird nun in der vorgelegten Gleichung $x = 0$ angenommen, so erhält man:

$$e^{y^{(0)}} = 1\ \text{und}\ e^{-y^{(0)}} = 1,$$

mithin hat man:

$$y^{(0)} = 0,\ y_1^{(0)} = 1,\ y_2^{(0)} = -1,\ y_3^{(0)} = 1.2,\ y_4^{(0)} = -1.2.3,$$

und allgemein:

$$y_{k-1}^{(0)} = (-1)^{k-2} \cdot 1.2.3.4 \ldots (k-2);$$

ferner hat man, nach der vorgelegten Gleichung,

$$e^{-y} = \frac{1}{1+x},\ \text{also}\ e^{-ky} = \frac{1}{(1+x)^k},$$

folglich hat man auch:

$$y_k^{(\alpha x)} = (-1)^{k-1} \cdot 1.2.3.4 \ldots (k-1) \cdot \frac{1}{(1+\alpha x)^k},$$

und die allgemeine Gleichung (II) geht im vorliegenden besondern Fall in folgende über:

$$y = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots . \frac{(-1)^{k-2}}{k-1}x^{k-1} + \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{x}{1+\alpha x}\right)^k,$$

oder auch, beachtend die Bedeutung von y, in:

$$\log.(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots \frac{(-1)^{k-2}}{k-1}x^{k-1} + \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{x}{1+\alpha x}\right)^k,$$

wo $\alpha$ einen zwischen 0 und 1 fallenden Zahlenwerth vorstellt.

Das letzte Glied dieser Gleichung stellt die Ergänzung vor, falls man mit dem vorletzten Gliede, in der Bestimmung von log. (1+x), die Rechnung abbricht; dieses letzte Glied muß beim unendlichen Zunehmen des Stellenzeigers k Null zum Grenzwerthe darbieten, und damit dieses auch statthabe, darf die allgemeine Größe x die Einheit nicht übertreffen. Denn erlaubt man sich die Annahme $x = 1 + u$, wo u einen positiven Werth vorstellt, so verfüge man über die willkührliche aber echtgebrochene Zahlengröße $\alpha$ dergestalt, daß man

$$\alpha < \frac{u}{1+u} \text{ oder } \alpha = \frac{\beta u}{1+u},$$

habe, wo $\beta$ positiv und kleiner als eins ist; alsdann stellt sich der Bruch:

$$\frac{x}{1+\alpha x} \text{ durch } \frac{1+u}{1+\beta u},$$

und folglich numerisch größer als die Einheit dar, welcher, auf die unendlich großwerdende Potenz k erhoben, trotz dem unendlich kleinwerdenden Faktor $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$, nicht den Nullwerth, sondern einen unendlich großwerdenden Werth als Grenze darbietet. Läßt man aber in der letzten Gleichung für x jeden Zahlenwerth von 0 bis 1 gelten, so verschwindet dieses Ergänzungsglied mit dem unendlichen Zunehmen von k, und die Gleichung:

$$\log.(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots \frac{(-1)^{k-2}}{k-1}x^{k-1}$$

besteht für alle Werthe von $x = 0$ bis $x = 1$ mit desto größerer Genauigkeit, je größer der Zahlenwerth für k angenommen wird.

263. Nachdem das Differenziren einer Gleichung mit zwei Variabeln, als zur Genüge erörtert, angenommen werden darf, übergehen wir nunmehr zur Differenziation einer Gleichung mit mehr als zwei Variabeln. Hierbei beschränken wir uns jedoch auf den Fall dreier Variabeln, da aus diesem Falle das Verhalten bei jenen mit vier und mehreren Variabeln leicht entnommen werden kann.

Zuerst legen wir uns den Fall vor, wenn eine der drei Variabeln gesondert von den beiden andern durch eine Gleichung dargestellt ist.

Hat man nämlich die Gleichung:

$$z = f(x, y),$$

wo f(x. y) irgend eine Function von x und y bedeutet, so kann diese Gleichung bei der Annahme, x und y stehen in keinerlei gegenseitigen Abhängigkeit, unter folgenden drei Gesichtspunkten der Differenziation unterzogen werden.

a) Das Differenziale von z zu finden, wenn entweder x eine unendlich kleinwerdende Aenderung erleidet und y unverändert bleibt, oder unter der gerade entgegengesetzten Voraussetzung.

b) Das Differenziale von z zu finden, wenn x und y zugleich unendlich kleinwerdende Aenderungen eingehen.

c) Wenn (was jedoch erst in der folgenden Nr. wird besprochen werden) eine der drei Variabeln x,y,z eine unendlich kleinwerdende Aenderung erleidet, den Einfluß hievon auf jede der beiden andern durch Differenziation der vorgelegten Gleichung zu ermitteln.

Der Fall in a) ist bereits in Nr. 249 erörtert und genügend gelöst worden. — Man hat zur Bestimmung des Differenzials von z, falls die Variable x eine unendlich kleinwerdende Aenderung dx erleidet, die Gleichung:

$$\underset{x}{d.z} = \frac{dz}{dx}\,dx\,, \quad \text{oder} \quad \underset{x}{d.z} = \frac{d.f(x,y)}{dx}\,dx\,;$$

eben so hat man zur Bestimmung des Differenzials von z, wenn y die unendlich kleinwerdende Aenderung dy eingeht, die Gleichung:

$$\underset{y}{d.z} = \frac{dz}{dy}\,dy\,, \quad \text{oder} \quad \underset{y}{d.z} = \frac{d.f(x,y)}{dy}\,dy\,,$$

wo

$$\frac{dz}{dx} \text{ und } \frac{dz}{dy}\,,$$

respective, die partiellen Differenzialquotienten von z oder von f(x,y) nach x und nach y vorstellen, die nach derselben citirten Nr. keinerlei Schwierigkeit in der Herstellung unterliegen.

Um den Fall in b) zu lösen hat man, nach dem Begriffe eines Differenzials überhaupt, die Gleichung:

$$dz = \text{Lim}: \{f(x+\omega, y+\omega') - f(x,y)\}\,,$$

wo $\omega$ statt dx und $\omega'$ statt dy gesetzt wurde; mit Zuziehung des in derselben Nr. 249 Mitgetheilten erhält man nun:

$$dz = \frac{dz}{dx}\,dx + \frac{dz}{dy}\,dy.$$

Auch das zweite und die höhern Differenzialien von z sind sämmtlich mit Hülfe des in den Nrn. 251 — 254 Mitgetheilten darzustellen möglich; so z. B. hat man für das totale zweite Differenziale von z folgende Gleichung:

$$d^2z = \frac{d^2z}{dx^2}\,dx^2 + 2\,\frac{d^2z}{dxdy}\,dxdy + \frac{d^2z}{dy^2}\,dy^2\,,$$

wenn man nämlich die Differenzialien von x und y zwar als unbestimmte unendlich kleinwerdende Größen, jedoch als von x und y unabhängig oder als Constante behandelt.

**264.** Hat man eine Gleichung zwischen x, y und z der Form:

$$f(x,y,z) = 0\,,$$

die keine der drei Variabeln von den übrigen abgesondert enthält,

oder die keine der Variabeln durch die beiden andern ausgedrückt darstellt; so werden die drei Fälle a), b) und c) der vorangehenden Nr. in folgender Weise erlediget.

Betreffend den in a) vorgeführten Fall, denken wir uns in der hier vorgelegten Gleichung y als Constante; alsdann sind wir solche nach Nr. 256 in Bezug auf x und z zu differenziren berechtiget.

Das Ergebniß dieser Differenziation stellt dann die Gleichung:

$$\frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dz}\,dz = 0$$

dar, wo zur Abkürzung u statt $f(x, y, z)$ gesetzt wurde. Aus dieser Gleichung fließt die folgende:

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 0\,, \qquad (\alpha)$$

die den partiellen Differenzialquotienten von z nach x, nämlich $\frac{dz}{dx}$, und folglich auch das Differenziale von z bestimmt, falls blos x eine unendlich kleinwerdende Aenderung eingeht.

In ähnlicher Weise erhält man die Gleichung:

$$\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} = 0, \qquad (\beta)$$

mittelst der der partielle Differenzialquotient von z nach y oder $\frac{dz}{dy}$, und mithin auch das Differenziale von z bestimmt werden kann, wenn lediglich y eine unendlich kleinwerdende Aenderung eingeht, x hingegen constant bleibt.

Den in vorhergehender Nr. in b) vorgelegten Fall zu lösen, bedenke man, daß aus der hier am Eingange vorgelegten Gleichung eine der Variabeln, z. B. die z, als Function von x und y jedenfalls gedacht werden kann; diesem zufolge hat man als totales Differenziale von z die Bestimmungsgleichung:

$$dz = \frac{dz}{dx}\,dx + \frac{dz}{dy}\,dy\,;$$

werden aus $(\alpha)$ und $(\beta)$ die partiellen Differenzialquotienten:

$$\frac{dz}{dx} \text{ und } \frac{dz}{dy}$$

bestimmt und deren Ergebnisse in die eben aufgestellte Gleichung eingesetzt, so erhält man:

$$\frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy + \frac{du}{dz}\,dz = 0\,,$$

welche Gleichung zur Kenntniß des Differenzials einer der drei Variabeln x, y, z führt, falls die beiden andern unendlich kleinwerdende Aenderungen eingehen.

Da ferner diese eben gewonnene Gleichung mit dem Ergebnisse der Differenziation der vorgelegten Gleichung nach allen drei Variabeln identisch ist; so schließen wir hieraus, daß man auch eine Gleichung mit drei Variabeln, gleich wie eine Gleichung mit zweien, nach allen Variabeln differenziren darf.

Um endlich den Fall c) vorangehender Nr. zu lösen, legen wir in irgend einer zwischen dreien Variabeln x, y, z vorgelegten Gleichung einer der Variabeln, z. B. der Variabeln z, eine unendlich kleinwerdende Aenderung bei; alsdann erfahren wir den Differenzialquotienten von x nach z durch folgende analoge zur Gleichung ($\alpha$):

$$\frac{du}{dz} + \frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dz} = 0\,,$$

wo $u = f(x,y,z)$ und $f(x,y,z) = 0$ die vorgelegte Gleichung zwischen den drei Variabeln x, y, z ist. Eben so bietet folgende analoge zu ($\beta$) den Differenzialquotienten von y nach z dar:

$$\frac{du}{dz} + \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dz} = 0.$$

Bestimmt man aus diesen zwei Gleichungen die Differenzialquotienten

$$\frac{dx}{dz} \text{ und } \frac{dy}{dz}\,,$$

und setzt die Ergebnisse in die Ausdrücke rechterhand folgender zwei Gleichungen:

$$\underset{z}{d}.x = \frac{dx}{dz}\,dz\,,\quad \underset{z}{d}.y = \frac{dy}{dz}\,dz\,,$$

so stellen dieselben die Lösung des Falles in c) vor.

# Viertes Kapitel.

## Anwendungen auf Functionen mehrerer Variabeln.

### §. I.

### Die Reihen von Taylor und Maclaurin für Functionen mehrerer Variabeln, und verallgemeinerte Umkehrungsreihe von Lagrange.

265. Es wird hinreichen, die Reihen von Taylor und Maclaurin für Functionen zweier Variabeln einer ausführlichen Entwickelung zu unterlegen, um den Gang sowohl als das Endergebniß bei Functionen von mehr denn zwei Variabeln hieraus abzuziehen.

Stellt man durch $f(x,y)$ irgend eine Function von $x$ und $y$ vor, und setzt die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + hz\,, \\ y' &= y + h'z\,, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

wie auch

$$U = f(x', y') = f(x + hz\,,\ y + h'z) \qquad (2)$$

fest, wo also $U$ dieselbe Function von $x'$ und $y'$ vorstellt, als solche $f(x,y)$ von $x$ und $y$ ist; so kann man, da $x'$ und $y'$ nach den Gleichungen (1) von $z$ dependiren, die Größe $U$ als Function von $z$ ansehen, und solche nach Maclaurin's Theorem für Functionen einer Variabeln (Nr. 27, Gleich. 24) nach aufsteigenden und ganzen Potenzen von $z$ entwickeln.

Diesem nach hat man:

$$U = U^{(0)} + \left(\frac{dU}{dz}\right)^{(0)} z + \left(\frac{d^2U}{dz^2}\right)^{(0)} \frac{z^2}{1.2} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \left(\frac{d^{k-1}U}{dz^{k-1}}\right)^{(0)} \frac{z^{k-1}}{1,2.3\ldots(k-1)} + \left(\frac{d^kU}{dz^k}\right)^{(\alpha z)} \frac{z^k}{1.2.3\ldots k}\,,$$

wo

$$U^{(0)}, \left(\frac{dU}{dz}\right)^{(0)}, \left(\frac{d^2U}{dz^2}\right)^{(0)}, \ldots\ldots \left(\frac{d^{k-1}U}{dz^{k-1}}\right)^{(0)}$$

der Ordnung nach die Werthe von:

$$U, \frac{dU}{dz}, \frac{d^2U}{dz^2}, \ldots \frac{d^{k-1}U}{dz^{k-1}}$$

vorstellen, wenn in diesen $z = o$ angenommen wird, und wo ferner

$$\left(\frac{d^kU}{dz^k}\right)^{(\alpha z)}$$

der Repräsentant von

$$\frac{d^kU}{dz^k}$$

ist, wenn man in diesem $\alpha z$ statt z setzt, wobei $\alpha$ einen positiven echtgebrochenen Zahlenwerth vorstellt.

Da U unmittelbar durch $x'$ und $y'$ gegeben ist, diese, vermittelt durch die Gleichungen (1), von z dependiren; so hat man, beachtend die Gleichung (a) Nr. 260.,

$$\frac{dU}{dz} = \frac{dU}{dx'}\frac{dx'}{dz} + \frac{dU}{dy'}\frac{dy'}{dz},$$

und da man nach Gleichung (1) hat:

$$\frac{dx'}{dz} = h, \quad \frac{dy'}{dz} = h',$$

so erhält man:

$$\frac{dU}{dz} = \frac{dU}{dx'}h + \frac{dU}{dy'}h'.$$

Nach derselben citirten Gleichung (a) Nr. 260 hat man ferner:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{dU}{dx'}\frac{dx'}{dx} \text{ und } \frac{dU}{dy} = \frac{dU}{dy'}\frac{dy'}{dy},$$

welche, da die Gleichungen (1)

$$\frac{dx'}{dx} = 1 \text{ und } \frac{dy'}{dy} = 1$$

geben, in folgende übergehen:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{dU}{dx'} \text{ und } \frac{dU}{dy} = \frac{dU}{dy'};$$

daher stellt sich die obige, den Differenzialquotienten von U nach z darstellende Gleichung auch folgendermaßen dar:

$$\frac{dU}{dz} = \frac{dU}{dx}h + \frac{dU}{dy}h'. \qquad (3)$$

Differenzirt man diese Gleichung partiell nach z, so erhält man unmittelbar folgende:

$$\frac{d^2U}{dz^2} = \left(\frac{d^2U}{dxdx'}\frac{dx'}{dz} + \frac{d^2U}{dxdy'}\frac{dy'}{dz}\right)h + \left(\frac{d^2U}{dydx'}\frac{dx'}{dz} + \frac{d^2U}{dydy'}\frac{dy'}{dz}\right)h';$$

führt man hier die oben für $\frac{dx'}{dz}$ und $\frac{dy'}{dz}$ aufgestellten Werthe ein, so hat man auch:

$$\frac{d^2U}{dz^2} = \frac{d^2U}{dxdx'}h^2 + \left(\frac{d^2U}{dxdy'} + \frac{d^2U}{dydx'}\right)hh' + \frac{d^2U}{dydy'}h'^2;$$

beachtet man endlich die Gleichungen:

$$\frac{dx'}{dx} = 1 \text{ und } \frac{dy'}{dy} = 1,$$

wodurch

$$\frac{d^2U}{dxdx'} = \frac{d^2U}{dx^2}, \quad \frac{d^2U}{dxdy'} = \frac{d^2U}{dxdy}, \quad \frac{d^2U}{dydx'} = \frac{d^2U}{dydx}, \quad \frac{d^2U}{dydy'} = \frac{d^2U}{dy^2}$$

erhalten wird; so ergiebt sich mit Beziehung auf die erste der Gleichungen (c) Nr. 251 folgende Gleichung:

$$\frac{d^2U}{dz^2} = \frac{d^2U}{dx^2}h^2 + 2\frac{d^2U}{dxdy}hh' + \frac{d^2U}{dy^2}h'^2, \qquad (4)$$

welche den zweiten Differenzialquotienten von U nach z darstellt.

Wird auch diese Gleichung partiell nach z differenzirt, so erhält man mit Zuziehung derselben Betrachtungen, die uns auf (3) und (4) geführt, folgendes Endergebniß:

$$\frac{d^3U}{dz^3} = \frac{d^3U}{dx^3}h^3 + 3\frac{d^3U}{dx^2dy}h^2h' + 3\frac{d^3U}{dxdy^2}hh'^2 + \frac{d^3U}{dy^3}h'^3.$$

Wird in dieser Weise fortgefahren, so erhält man:

$$\frac{d^{k-1}U}{dz^{k-1}} = \frac{d^{k-1}U}{dx^{k-1}}h^{k-1} + \binom{k-1}{1}\frac{d^{k-1}U}{dx^{k-2}dy}h^{k-2}h' + \binom{k-1}{2}\frac{d^{k-1}U}{dx^{k-3}dy^2}h^{k-2}h'^2$$

$$+ \ldots\ldots\ldots + \binom{k-1}{k-1}\frac{d^{k-1}U}{dy^{k-1}}h'^{k-1}, \qquad (5)$$

wie auch:

$$\frac{d^k U}{dz^k} = \frac{d^k U}{dx^k} h^k + \binom{k}{1} \frac{d^k U}{dx^{k-1} dy} h^{k-1} h' + \binom{k}{2} \frac{d^k U}{dx^{k-2} dy^2} h^{k-2} h'^2$$

$$+ \ldots\ldots\ldots + \binom{k}{k} \frac{d^k U}{dy^k} h'^k . \qquad (6)$$

Setzt man nun in den Gleichungen (2) bis (5) $z = o$ voraus, so bieten, wenn der Kürze der Darstellung wegen,

$$u = f(x, y) \qquad (7)$$

gesetzt wird, diese Gleichungen (2) bis (5) folgende Bestimmungen dar:

$$U^{(0)} = u ,$$

$$\left(\frac{dU}{dz}\right)^{(0)} = \frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} h' ,$$

$$\left(\frac{d^2 U}{dz^2}\right)^{(0)} = \frac{d^2 u}{dx^2} h^2 + 2 \frac{d^2 u}{dx dy} hh' + \frac{d^2 u}{dy^2} h'^2 ,$$

. . . . . .

$$\left(\frac{d^{k-1} U}{dz^{k-1}}\right)^{(0)} = \frac{d^{k-1} u}{dx^{k-1}} h^{k-1} + \binom{k-1}{1} \frac{d^{k-1} u}{dx^{k-2} dy} h^{k-2} h' + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \binom{k-1}{k-2} \frac{d^{k-1} u}{dx dy^{k-2}} h h'^{k-2} + \binom{k-1}{k-1} \frac{d^{k-1} u}{dy^{k-1}} ,$$

und man erhält:

$$f(x + hz, y + h'z) =$$

$$= u + \left(\frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} h'\right) z + \left(\frac{d^2 u}{dx^2} h^2 + 2 \frac{d^2 u}{dx dy} hh' + \frac{d^2 u}{dy^2} h'^2\right) \frac{z^2}{1.2}$$

$$+ \left(\frac{d^3 u}{dx^3} h^3 + 3 \frac{d^3 u}{dx^2 dy} h^2 h' + 3 \frac{d^3 u}{dx dy^2} h h'^2 + \frac{d^3 u}{dy^3} h'^3\right) \frac{z^3}{1.2.3}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \left(\begin{array}{l} \dfrac{d^{k-1} u}{dx^{k-1}} h^{k-1} + \binom{k-1}{1} \dfrac{d^{k-1} u}{dx^{k-2} dy} h^{k-2} h' + \ldots\ldots \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots + \binom{k-1}{k-1} \dfrac{d^{k-1} u}{dy^{k-1}} h'^{k-1} \end{array}\right) \frac{z^{k-1}}{1.2.3 \ldots (k-1)}$$

$$+ R_k ,$$

wo u durch die Gleichung (7) gegeben ist, und wo man:

$$R_k = \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^k f(x+\alpha hz, y+\alpha h'z)}{dx^k} h^k + \binom{k}{1} \frac{d^k f(x+\alpha hz, y+\alpha h'z)}{dx^{k-1}dy} h^{k-1}h' \\ + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + \binom{k}{k} \frac{d^k f(x+\alpha hz, y+\alpha h'z)}{dy^k} h'^k \end{array} \right\} \frac{z^k}{1.2.3 \ldots k}$$

gesetzt hat.

Setzt man in diesen Gleichungen $z = 1$, so stellt sich letztere wie folgt dar:

$$R_k = \frac{d^k f(x+\alpha h, y+\alpha h')}{dx^k} \cdot \frac{h^k}{1.2.3..k} + \frac{d^k f(x+\alpha h, y+\alpha h')}{dx^{k-1}dy} \cdot \frac{h^{k-1}}{1.2.3..(k-1)} \cdot \frac{h'}{1}$$

$$+ \frac{d^k f(x+\alpha h, y+\alpha h')}{dx^{k-2}dy^2} \cdot \frac{h^{k-2}}{1.2.3..(k-2)} \cdot \frac{h'^2}{1.2} + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + \frac{d^k f(x+\alpha h, y+\alpha h')}{dy^k} \cdot \frac{h'^k}{1.2.3 \ldots k},$$

die, wenn man auf den Ursprung von $R_k$ zurückgeht, nämlich auf die Gleichung:

$$R_k = \left(\frac{d^k U}{dz^k}\right)^{(\alpha z)} \frac{z^k}{1.2.3..k},$$

und $z = 1$ setzt, auch mit folgender gleichbedeutend ist:

$$R_k = \frac{d^k f(x+\alpha h,\ y+\alpha h')}{d\alpha^k} \cdot \frac{1}{1.2.3..k};$$

daher geht die erste der obigen zwei Gleichungen nunmehr in folgende über:

$$f(x+h, y+h') = u + \frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} h'$$

$$+ \frac{d^2u}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^2u}{dxdy} \frac{h}{1} \frac{h'}{1} + \frac{d^2u}{dy^2} \frac{h'^2}{1.2}$$

$$+ \frac{d^3u}{dx^3} \frac{h^2}{1.2.3} + \frac{d^3u}{dx^2dy} \frac{h^2}{1.2} \frac{h'}{1} + \frac{d^3u}{dxdy^2} \frac{h}{1} \frac{h'^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dy^3} \frac{h'^3}{1.2.3}$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$+ \frac{d^{k-1}u}{dx^{k-1}} \frac{h^{k-1}}{1.2.3..(k-1)} + \frac{d^{k-1}u}{dx^{k-2}dy} \frac{h^{k-2}}{1.2.3..(k-2)} \frac{h'}{1} + \quad . \quad . \quad .$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + \frac{d^{k-1}u}{dy^{k-1}} \frac{h'^{k-1}}{1,2,3 \ldots (k-1)}$$

$$+ \frac{d^k f(x+\alpha h,\ y+\alpha h')}{d\alpha^k} \cdot \frac{1}{1,2,3 \ldots k}, \qquad \text{(I)}$$

wo $\alpha$ eine positive echtgebrochne Zahlengröße vorstellt und, nach Gleichung (7), u statt der Function $f(x, y)$ gesetzt worden ist.

Diese Gleichung (I) stellt das Taylor'sche Theorem für zwei Variabeln vor; die Gliederreihe zur Rechten mit Ausnahme des letzten Gliedes wird die Taylor'sche Reihe für zwei Variabeln genannt; das letzte Glied endlich stellt die Ergänzung zur eben genannten Reihe vor.

Es besteht jedoch die Gleichheit (I) nur für jene Werthe der Variabeln x und y, für die die Function $f(x, y)$, oder u, wie auch sämmtliche partiellen Differenzialquotienten derselben noch continuirlich verbleiben.

266. Besteht das Taylor'sche Theorem, d. h. die Gleichheit (I) vorangehender Nr., auch noch für $x = o$ und $y = o$; dann folgert man aus demselben das Maclaurin'sche Theorem für zwei Variabeln, wenn

$$x = o,\ y = o,\ h = x \text{ und } h' = y$$

angenommen wird.

Man erhält alsdann, wenn durch:

$$u^{(0)},\ \left(\frac{du}{dx}\right)^{(0)},\ \left(\frac{du}{dy}\right)^{(0)},\ \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^{(0)},\ \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^{(0)},\ \ldots\ldots$$

der Ordnung nach die Ergebnisse von:

$$f(x, y),\ \frac{d.f(x, y)}{dx},\ \frac{d.f(x, y)}{dy},\ \frac{d^2f(x, y)}{dx^2},\ \frac{d^2f(x, y)}{dxdy},\ \ldots\ldots$$

für $x = o$ und $y = o$ vorgestellt werden, folgende Gleichheit:

$$f(x, y) = u^{(0)} + \left(\frac{du}{dx}\right)^{(0)} x + \left(\frac{du}{dy}\right)^{(0)} y$$

$$+ \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^{(0)} \frac{x^2}{1.2} + \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^{(0)} \frac{x}{1} \frac{y}{1} + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)^{(0)} \frac{y^2}{1.2}$$

$$+ \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)^{(0)} \frac{x^3}{1.2.3} + \left(\frac{d^3u}{dx^2dy}\right)^{(0)} \frac{x^2}{1.2} \frac{y}{1}$$

$$+ \left(\frac{d^3u}{dxdy^2}\right)^{(0)} \frac{x}{1} \frac{y^2}{1.2} + \left(\frac{d^3u}{dy^3}\right)^{(0)} \frac{y^3}{1.2.3}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left(\frac{d^{k-1}u}{dx^{k-1}}\right)^{(0)}\frac{x^{k-1}}{1.2.3..(k-1)}+\left(\frac{d^{k-1}u}{dx^{k-2}dy}\right)^{(0)}\frac{x^{k-2}}{1.2.3..(k-2)}\,\frac{y}{1}+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{d^{k-1}u}{dxdy^{k-2}}\right)^{(0)}\frac{x}{1}\,\frac{y^{k-2}}{1.2.3..(k-2)}+\left(\frac{d^{k-1}u}{dy^{k-1}}\right)^{(0)}\frac{y^{k-1}}{1.2.3...(k-1)}$$

$$+\frac{d^k f(\alpha x,\alpha y)}{d\alpha^k}\,\frac{1}{1.2.3...k}, \qquad \text{(II)}$$

wo, wie in (I), $\alpha$ einen positiven echtgebrochenen Zahlenwerth repräsentirt.

Diese Gleichung (II) stellt das Maclaurin'sche Theorem für Functionen zweier Variabeln vor; die Gliederreihe rechterhand, das letzte Glied ausgenommen, wird die Maclaurin'sche Reihe für zwei Variabeln genannt; das letzte Glied selbst stellt die Ergänzung dieser Reihe vor.

267. Stellt man folgende Gleichung fest:

$$U=f(x+\alpha h,\ y+\alpha h',\ z+\alpha h'',\ \ldots), \qquad \text{(a)}$$

so stellt sich das Taylor'sche Theorem für jedwede Anzahl von Variabeln x, y, z, . . . folgendermaßen dar:

$$f(x+h,\ y+h',\ z+h'',\ \ldots)=$$

$$=U^{(0)}+\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)^{(0)}+\left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right)^{(0)}\frac{1}{1.2}+\left(\frac{d^3U}{d\alpha^3}\right)^{(0)}\frac{1}{1.2.3}+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{d^{k-1}U}{d\alpha^{k-1}}\right)^{(0)}\frac{1}{1.2.3...(k-1)}+\frac{d^kU}{d\alpha^k}\cdot\frac{1}{1.2.3....k}, \qquad \text{(A)}$$

wo

$$U^{(0)},\ \left(\frac{dU}{d\alpha}\right)^{(0)},\ \left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right)^{(0)},\ \ldots\left(\frac{d^{k-1}U}{d\alpha^{k-1}}\right)^{(0)}$$

der Reihe nach die Repräsentanten von

$$U,\ \frac{dU}{d\alpha},\ \frac{d^2U}{d\alpha^2},\ \ldots\ldots\frac{d^{k-1}U}{d\alpha^{k-1}}$$

sind, wenn in diesen nach vollzogenen Differenziationen jedesmal $\alpha=0$ gesetzt wird; im letzten Gliede der Gleichung (A) aber, das die Ergänzung zur Taylor'schen Reihe mehrerer Variabeln repräsentirt, ist, nachdem man den kten Differenzialquotient von U nach $\alpha$ hergestellt, für $\alpha$ eine positive echtgebrochene Zahlengröße zu setzen.

Beim unendlichen Zunehmen von k muß dieses Ergänzungsglied Null zum Grenzwerth darbieten, wenn für $\alpha$ dieser eben genannte Zahlenwerth gesetzt wird.

Wird ferner folgende Gleichung festgestellt:

$$V = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z, \ldots), \qquad (b)$$

so wird das Maclaurin'sche Theorem für jedwede Anzahl von Variabeln x, y, z, . . . durch folgende Gleichheit dargestellt:

$$f(x, y, z, \ldots) =$$

$$= V^{(0)} + \left(\frac{dV}{d\alpha}\right)^{(0)} + \left(\frac{d^2V}{d\alpha^2}\right)^{(0)} \frac{1}{1.2} + \left(\frac{d^3V}{d\alpha^3}\right)^{(0)} \frac{1}{1.2.3} + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{d^{k-1}V}{d\alpha^{k-1}}\right)^{(0)} \frac{1}{1.2.3\ldots(k-1)} + \frac{d^kV}{d\alpha^k} \cdot \frac{1}{1.2.3\ldots k} \qquad (B)$$

wo man hier mit V dieselben Operationen vorzunehmen hat, als oben bei U angedeutet wurde, also auch im letzten Gliede dieser Gleichheit, welches die Ergänzung zur Maclaurin'schen Reihe vorstellt, die Größe $\alpha$ irgend einen echtgebrochnen, positiven Zahlenwerth bedeutet.

268. Hat man eine Gleichung zwischen den drei Variabeln x, y, z, wie die folgende:

$$z = F\{x + y\, f(z)\}, \qquad (1)$$

wo

$$f(z) \text{ und } F\{x + y\, f(z)\}$$

Functionen von

$$z \text{ und } x + y\, f(z)$$

vorstellen; so besteht die verallgemeinerte Lagrange'sche Umkehrungsreihe darin: irgend eine Function von z, wie etwa $\varphi(z)$, nach aufsteigenden und ganzen Potenzen von y zu entwickeln.

Uebergehen wir zur Ableitung dieser Reihe, und setzen der Kürze wegen:

$$u = \varphi(z); \qquad (2)$$

so bietet das Maclaurin'sche Theorem für eine Variable folgende Entwickelung dar:

$$\varphi(z) = u^{(0)} + \left(\frac{du}{dy}\right)^{(0)} y + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)^{(0)} \frac{y^2}{1.2} + \ldots\ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{d^{k-1}u}{dy^{k-1}}\right)^{(0)} \frac{y^{k-1}}{1.2.3\ldots(k-1)} + \left(\frac{d^k u}{dy^k}\right)^{(\alpha\gamma)} \frac{y^k}{1.2.3\ldots k}, \quad (3)$$

wo

$$u^{(0)}, \left(\frac{du}{dy}\right)^{(0)}, \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)^{(0)}, \ldots \left(\frac{d^{k-1}u}{dy^{k-1}}\right)^{(0)}$$

die aus den Gleichungen (1) und (2) gefolgerten Werthe von:

$$u, \frac{du}{dy}, \frac{d^2u}{dy^2}, \ldots\ldots \frac{d^{k-1}u}{dy^{k-1}}$$

vorstellen, wenn nach vollzogenen Differenziationen $y = o$ gesetzt wird; ferner stellt

$$\left(\frac{d^k u}{dy^k}\right)^{(\alpha\gamma)}$$

den Werth des kten Differenzialquotienten von u nach y vor, wenn gleichfalls nach vollzogener Differenziation y in $\alpha y$ umgesetzt wird, wo $\alpha$ einen echtgebrochenen positiven Zahlenwerth bedeutet.

Es erübriget uns nur noch die eben erwähnten Differenzialquotienten durch einfache und leicht faßliche Formen darzustellen, worin die eigentlich beachtenswerthe Seite dieser Reihe, vom analytischen Standpunkte angesehen, besteht.

Bedenkt man, das eben erwähnte Ziel vor Augen habend, daß u unmittelbar vor z, und z mittelst der Gleichung (1) von y dependirt; so hat man, nach Gleichung (a) Nr. 260,

$$\frac{du}{dy} = \frac{du}{dz}\,\frac{dz}{dy}. \quad (4)$$

Differenzirt man, dieser Gleichung eine andere Form zu geben, die Gleichung (1) partiell nach x und z, und eben so nach y und z; stellt zur Vereinfachung der Darstellung durch $F_1$ den Differenzialquotienten von:

$$F\{x + y\,f(z)\} \text{ nach } x + y\,f(z)$$

vor, so findet man:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{F_1}{1 - y\ f_1(z)\ F_1},$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{f(z)\ F_1}{1 - y\ f_1(z) F_1},$$

wo $f_1(z)$ den Differenzialquotienten von $f(z)$ nach $z$ vorstellt; werden diese zwei Gleichungen durch einander dividirt, so erhält man:

$$\frac{dz}{dy} = f(z)\ \frac{dz}{dx};$$

wird endlich dieses Ergebniß in die obige Gleichung (4) gesetzt: so geht solche in folgende über:

$$\frac{du}{dy} = f(z)\ \frac{du}{dz}\ \frac{dz}{dx}. \qquad (5)$$

Um aus dieser Gleichung den zweiten Differenzialquotienten von $u$ nach $y$ zu gewinnen, berücksichtige man den Umstand, daß

$$\frac{du}{dz} \text{ und mithin auch } f(z)\ \frac{du}{dz}$$

eine Function von $z$ vorstellt; wird nun durch $u'$ eine Function von $z$ vorgestellt, die der Gleichung:

$$\frac{du'}{dz} = f(z)\ \frac{du}{dz} \qquad (6)$$

entspricht, so hat man statt der Gleichung (5) folgende:

$$\frac{du}{dy} = \frac{du'}{dx},$$

welche wir nun in Bezug auf $y$ differenziren werden.

Als unmittelbares Ergebniß dieser Differenziation hat man:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d.\left(\frac{du'}{dx}\right)}{dy};$$

diese ist auch mit folgender gleichbedeutend:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d.\left(\frac{du'}{dy}\right)}{dx};$$

und da man auf analogem Wege, wie die Gleichung (5) erhalten wurde, folgende:

$$\frac{du'}{dy} = f(z)\ \frac{du'}{dz} \cdot \frac{dz}{dx},$$

oder, wegen der Gleichung (6), auch folgende

$$\frac{du'}{dy} = f(z)^2 \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

erhalten wird: so stellt sich folgende Bestimmungsgleichung des zweiten Differenzialquotienten von u nach y heraus:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d. \left\{ f(z)^2 \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \right\}}{dx} . \qquad (7)$$

Aus dieser Gleichung gewinnt man den dritten Differenzialquotienten von u nach y, wenn dieselbe in ähnlicher Weise, wie die Gleichung (5) umgeformt wird.

Stellt man nämlich unter u'' eine Function von z vor, die

$$\frac{du''}{dz} = f(z)^2 \frac{du}{dz} \qquad (8)$$

darbietet, dann hat man auch

$$f(z)^2 \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{du''}{dx} ;$$

wodurch die Gleichung (7) vorerst folgende Form annimmt:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d^2u''}{dx^2} .$$

Differenzirt man diese nach y, und vertauscht rechterhand die Ordnungsfolge der Differenziationen, so stellt sich folgende Gleichung heraus:

$$\frac{d^3u}{dy^3} = \frac{d^2 \left( \frac{du''}{dy} \right)}{dx^2} ;$$

analog mit der Gleichung (5) hat man aber auch:

$$\frac{du''}{dy} = f(z) \frac{du''}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} ,$$

welche beachtend die Gleichung (8) in

$$\frac{du''}{dy} = f(z)^3 \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

übergeht: sonach hat man für den dritten Differenzialquotienten von u nach y die Gleichung:

$$\frac{d^3u}{dy^3} = \frac{d^2\left\{f(z)^3 \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}\right\}}{dx^2}.$$

Verfährt man mit dieser, wie mit den Gleichungen (5) und (7), so erhält man:

$$\frac{d^4u}{dy^4} = \frac{d^3\left\{f(z)^4 \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}\right\}}{dx^3},$$

und wenn in dieser Weise fortgefahren wird, erhält man allgemein:

$$\frac{d^ku}{dy^k} = \frac{d^{k-1}\left\{f(z)^k \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}\right\}}{dx^{k-1}}, \tag{9}$$

welche für ganze Werthe von k besteht.

Um diese Ergebnisse zur Erreichung des uns am Eingange gesteckten Zieles zu benutzen, haben wir noch, wie die Gleichung (3) zeigt, diese gewonnenen Differenzialquotienten von u nach y für $y = o$ anzugeben.

Stellt man durch:

$$z^{(0)} \text{ und } \left(\frac{dz}{dx}\right)^{(0)}$$

die Werthe von

$$z \text{ und } \frac{dz}{dx}$$

bei der Annahme $y = o$ vor, so bietet die Gleichung (1) folgende Bestimmungen dar:

$$z^{(0)} = F(x) \text{ und } \left(\frac{dz}{dx}\right)^{(0)} = F_1(x);$$

stellt man ferner durch

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^{(0)}$$

den ersten Differenzialquotienten von u nach z gleichfalls für $y = o$ vor, dann hat man nach Gleichung (2) folgende:

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^{(0)} = \varphi_1\left(z^{(0)}\right),$$

die, wegen des eben für $z^{(0)}$ aufgestellten Werthes, in folgende übergeht:

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^{(0)} = \varphi_1\left(F(x)\right).$$

Mit Berücksichtigung dieser Gleichungen erhält man nach Gleichung (9) folgende allgemeine Bestimmung:

$$\left(\frac{d^k u}{dy^k}\right)^{(0)} = \frac{d^{k-1}\left\{ f\left(F(x)\right)^k \varphi_1\left(F(x)\right) F_1(x)\right\}}{dx^{k-1}},$$

wo

$$\varphi_1\left(F(x)\right) \text{ und } F_1(x)$$

Differenzialquotienten oder Ableitungen vorstellen, wie solche im ersten Theile der Differenzialrechnung in der Gleichung (1) Nr. 16 daselbst festgestellt worden sind.

Stellt man ferner den aus Gleichung (1) gefolgerten Werth von z, wenn daselbst y in $\alpha y$ umgesetzt wird, durch $z^{(\alpha y)}$ vor und, zur Vereinfachung der Darstellung, die Gleichungen:

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^{(\alpha y)} = \varphi_1\left(z^{(\alpha y)}\right),$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^{(\alpha y)} = \frac{F_1\left\{x + \alpha y\, f\left(z^{(\alpha y)}\right)\right\}}{1 - \alpha y\, f_1\left(z^{(\alpha y)}\right) F_1\left\{x + \alpha y\, f\left(z^{(\alpha y)}\right)\right\}};$$

so hat man auch:

$$\left(\frac{d^k u}{dy^k}\right)^{(\alpha y)} = \frac{d^{k-1}\left\{ f\left(z^{(\alpha y)}\right)^k \left(\frac{du}{dz}\right)^{(\alpha y)} \left(\frac{dz}{dx}\right)^{(\alpha y)}\right\}}{dx^{k-1}}.$$

Alle diese Ergebnisse in Gleichung (3) eingesetzt, erhält man:

$$\varphi(z) = \varphi\left(F(x)\right) + f\left(F(x)\right) \varphi_1\left(F(x)\right) F_1(x) \cdot y$$

$$+ \frac{d.\left\{ f\left(F(x)\right)^2 \varphi_1\left(F(x)\right) F_1(x)\right\}}{dx} \cdot \frac{y^2}{1.2}$$

$$+ \frac{d^2\left\{ f\left(F(x)\right)^3 \varphi_1\left(F(x)\right) F_1(x)\right\}}{dx^2} \cdot \frac{y^3}{1.2.3}$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$+ \frac{d^{k-2}\left\{ f\left(F(x)\right)^{k-1} \varphi_1\left(F(x)\right) F_1(x)\right\}}{dx^{k-2}} \cdot \frac{y^{k-1}}{1.2.3 \ldots (k-1)}$$

$$+ \frac{d^{k-1}\left\{ f\left(z^{(\alpha y)}\right)^k \left(\frac{du}{dz}\right)^{(\alpha y)} \left(\frac{dz}{dx}\right)^{(\alpha y)}\right\}}{dx^{k-1}} \cdot \frac{y^k}{1.2.3 \ldots k}. \quad \text{(I)}$$

Diese Gleichung stellt bei Zugrundelegung der Gleichung (1) das Lagrange'sche Theorem für Umkehrung der Reihen vor; die Gliederreihe zur Rechten, das letzte Glied ausgenommen, stellt die verallgemeinerte Lagrange'sche Umkehrungsreihe vor; dieses letzte Glied selbst kann Ergänzung dieser Reihe genannt werden.

---

## §. II.

## Ueber den Maximum- oder Minimumzustand einer Function zweier und mehrerer Variabeln.

269. Stellt der Kürze wegen u irgend eine Function mehrerer Variabeln x, y, z . . vor, nämlich hat man:

$$u = f(x, y, z, \ldots),$$

so werden wir uns im vorliegenden Paragraphen damit befassen, jene zugleich bestehenden reellen Werthe von x, y, z, . . . zu ermitteln, die u zu einem Maximum, oder zu einem Minimum machen.

Sind nun a, b, c, . . . der Ordnung nach reelle Werthe von x, y, z, . . ., die u in den Zustand eines Maximum, oder eines Minimum versetzen; so muß im ersten Falle die Ungleichheit:

$$f(a + \omega,\ b + \omega_1,\ c + \omega_2, \ldots) < f(a, b, c, \ldots),$$

und im zweiten die folgende:

$$f(a + \omega,\ b + \omega_1,\ c + \omega_2, \ldots) > f(a, b, c, \ldots)$$

bestehen, wenn $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots$ unendlich kleinwerdende, reelle, mit positiven oder negativen Zeichen begabte Größen vorstellen, die an keinerlei gegenseitigen Abhängigkeit gebunden sind.

Diesem Begriffe gemäß wird u bei der Annahme:

$$x = a,\ y = b,\ z = c, \ldots$$

den Zustand eines Maximum oder den eines Minimum eingehen, je nachdem der Grenzausdruck:

$$\text{Lim} : \{f(a + \omega,\ b + \omega_1,\ c + \omega_2, \ldots) - f(a, b, c, \ldots)\},$$

bei der eben erwähnten Beschaffenheit der Größen $\omega$, $\omega_1$, $\omega_2$, . . ., ein negatives oder ein positives Zeichen trägt.

Setzen wir die Function u in der Nachbarschaft der reellen Werthe a, b, c, . . . von x, y, z, . . . mit der Eigenschaft der Continuität begabt voraus, dann bietet der so eben aufgeführte Grenzausdruck, wenn man der Einfachheit wegen u lediglich als Function von x, y und z voraussetzt, folgenden Grenzwerth dar:

$$\frac{du}{dx}\omega + \frac{du}{dy}\omega_1 + \frac{du}{dz}\omega_2 ;$$

stellen nun die partiellen Differenzialquotienten:

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{dy}, \quad \frac{du}{dz}$$

für $x=a$, $y=b$, $z=c$ angebbare Resultate dar, dann wird dieser Ausdruck, als Werth des obigen Grenzausdruckes, dem Zeichen nach von den unendlich kleinwerdenden Größen $\omega$, $\omega_1$, $\omega_2$ dependiren; dieses widerspricht aber dem oben festgestellten Begriffe eines Maximum oder Minimum von u: daher ist man zur Annahme folgender Gleichungen bemüßiget:

$$\frac{du}{dx}=0, \quad \frac{du}{dy}=0, \quad \frac{du}{dz}=0,$$

wo aber nunmehr, nach dem Taylor'schen Theoreme mehrerer Variabeln, der obige Grenzausdruck folgenden Grenzwerth darbietet:

$$\left\{\frac{d^2u}{dx^2}\omega^2 + \frac{d^2u}{dy^2}\omega_1^2 + \frac{d^2u}{dz^2}\omega_2^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}\omega\omega_1 + 2\frac{d^2u}{dxdz}\omega\omega_2 + 2\frac{d^2u}{dydz}\omega_1\omega_2\right\}\frac{1}{1.2}.$$

Ob nun ein Ausdruck dieser Form Werthe, die von den Zeichen der Größen $\omega$, $\omega_1$, $\omega_2$ unabhängig sind, darbieten kann oder nicht, werden wir in den nächstfolgenden Nrn. besonders untersuchen; vor der Hand begnügen wir uns mit einer gedrängten Zusammenstellung und Verallgemeinerung der bereits gewonnenen Ergebnisse:

Wenn man die Gleichung

$$u=f(x_1, x_2, x_3, x_4, . . x_n) \qquad (1)$$

hat, wo $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_n$ von einander unabhängige variable Größen sind; so müssen die reellen Werthe dieser Variabeln, die die Function u

zum Maximum oder Minimum machen, folgenden n Gleichungen Genüge thun:

$$\frac{du}{dx_1}=0,\quad \frac{du}{dx_2}=0,\quad \frac{du}{dx_3}=0,\ \ldots\ \frac{du}{dx_n}=0, \tag{2}$$

oder, die diesen Gleichungen entsprechenden reellen Bestimmungen der allgemeinen Größen $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ sind es lediglich, die die Function u der Gleichung (1) in den Zustand eines Maximum oder eines Minimum versetzen können; und damit jener oder dieser Zustand auch eintreffe, muß (wenn der Faktor $\frac{1}{1.2}$ unberücksichtiget gelassen wird) der Ausdruck J, den folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} J=&\frac{d^2u}{dx_1^2}\omega_1^2+\frac{d^2u}{dx_2^2}\omega_2^2+\frac{d^2u}{dx_3^2}\omega_3^2+\ldots+\frac{d^2u}{dx_n^2}\omega_n^2\\ &+2\frac{d^2u}{dx_1dx_2}\omega_1\omega_2+2\frac{d^2u}{dx_1dx_3}\omega_1\omega_3+2\frac{d^2u}{dx_2dx_3}\omega_2\omega_3+\ldots.\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+2\frac{d^2u}{dx_{n-1}dx_n}\omega_{n-1}\omega_n \end{aligned} \tag{3}$$

bestimmt, wenn in die Ergebnisse der zweiten partiellen Differenzialquotienten:

$$\frac{d^2u}{dx_1^2},\ \frac{d^2u}{dx_2^2},\ \frac{d^2u}{dx_3^2},\ \ldots\ \frac{d^2u}{dx_1dx_2},\ \frac{d^2u}{dx_1dx_3},\ \frac{d^2u}{dx_2dx_3},\ \ldots$$

dieses Ausdruckes die aus (2) gefolgerten reellen Werthe von $x_1, x_2, x_3, \ldots$ eingesetzt werden, im ersten Falle ein negatives und im zweiten ein positives Zeichen tragen, die Zeichen der unendlich kleinwerdenden und gleichfalls reellen Größen $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \ldots$ und ihre gegenseitigen Beziehungen mögen wie immer gedacht sein.

**270.** Die Untersuchung des Zeichenzustandes eines Ausdruckes wie J in Gleichung (3) vorangehender Nr. wird am sichersten geleitet, wenn man denselben, wie sofort gezeigt werden soll, als eine algebraische Summe quadratischer Ausdrücke darstellt.

Stellt man zur Vereinfachung der Darstellung folgende Bezeichnungen fest:

$$\frac{d^2u}{dx_1^2}=A_1,\quad \frac{d^2u}{dx_2^2}=A_2,\quad \frac{d^2u}{dx_3^2}=A_3,\ \ldots\ \frac{d^2u}{dx_n^2}=A_n,$$

$$\frac{d^2u}{dx_1dx_2}=A_{1,2},\quad \frac{d^2u}{dx_1dx_3}=A_{1,3},\quad \frac{d^2u}{dx_2dx_3}=A_{2,3},\ldots\ \frac{d^2u}{dx_{n-1}dx_n}=A_{n-1,n},$$

wo die Ausdrücke zur Rechten die Repräsentanten der zur Linken sind, wenn man letztere nach den aus den Gleichungen (2) vorangehender Nr. gefolgerten reellen Werthen von $x_1$, $x_2$, $x_3$, .. $x_n$ bestimmt hat; dann hat man es mit der Umformung eines Ausdruckes der Form:

$$\left.\begin{aligned} &A_1\,\omega_1^2 + A_2\,\omega_2^2 + A_3\,\omega_3^2 + A_4\,\omega_4^2 + \ldots + A_n\,\omega_n^2 \\ &+2\left(A_{1,2}\,\omega_1\omega_2 + A_{1,3}\,\omega_1\omega_3 + A_{2,3}\,\omega_2\omega_3 + \ldots + A_{n-1,n}\,\omega_{n-1}\,\omega_n\right) \end{aligned}\right\} \quad (I)$$

in einem, eine algebraische Summe n quadratischer Glieder umfassenden Ausdruck zu thun.

Stellen wir den umgeformten Ausdruck von (I), wie folgt dar:

$$\left.\begin{aligned} &\left(a_{1,0}\,\omega_1 + a_{2,0}\,\omega_2 + a_{3,0}\,\omega_3 + \ldots + a_{n-2,0}\,\omega_{n-2} + a_{n-1,0}\,\omega_{n-1} + a_{n,0}\,\omega_n\right)^2 \\ &+\left(a_{1,1}\,\omega_1 + a_{2,1}\,\omega_2 + a_{3,1}\,\omega_3 + \ldots + a_{n-2,1}\,\omega_{n-2} + a_{n-1,1}\,\omega_{n-1}\right)^2 \\ &+\left(a_{1,2}\,\omega_1 + a_{2,2}\,\omega_2 + a_{3,2}\,\omega_3 + \ldots + a_{n-2,2}\,\omega_{n-2}\right)^2 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+\left(a_{1,n-3}\,\omega_1 + a_{2,n-3}\,\omega_2 + a_{3,n-3}\,\omega_3\right)^2 \\ &+\left(a_{1,n-2}\,\omega_1 + a_{2,n-2}\,\omega_2\right)^2 \\ &+\left(a_{1,n-1}\,\omega_1\right)^2, \end{aligned}\right\} \quad (II)$$

wo die Coefficienten:

$$a_{1,0},\ a_{2,0},\ a_{3,0},\ \ldots\ a_{1,1},\ a_{2,1},\ \ldots\ a_{1,2},\ \ldots$$

vor der Hand unbekannt, jedoch wie die Coefficienten:

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots\ A_{1,2},\ A_{1,3},\ \ldots,$$

von den Größen $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, ... unabhängig gedacht sind; so bestimmen wir erstere aus der Identität beider Ausdrücke (I) und (II).

Wenn nämlich nach gemein üblicher Weise verfahren wird, stellen sich folgende Gleichungen heraus, deren Anzahl gleich der der Unbekannten in (II) ist und, wie wir in einigen besondern Fällen zeigen werden, zur Bestimmung derselben völlig ausreichen.

Diese Gleichungen sind:

$$a_{1,0}^2 + a_{1,1}^2 + a_{1,2}^2 + a_{1,3}^2 + \ldots + a_{1,n-1}^2 = A_1 ,$$

$$a_{2,0}^2 + a_{2,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{2,3}^2 + \ldots + a_{2,n-2}^2 = A_2 ,$$

$$a_{3,0}^2 + a_{3,1}^2 + a_{3,2}^2 + a_{3,3}^2 + \ldots + a_{3,n-3}^2 = A_3 ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n-4,0}^2 + a_{n-4,1}^2 + a_{n-4,2}^2 + a_{n-4,3}^2 + a_{n-4,4}^2 = A_{n-4} ,$$

$$a_{n-3,0}^2 + a_{n-3,1}^2 + a_{n-3,2}^2 + a_{n-3,3}^2 = A_{n-3} ,$$

$$a_{n-2,0}^2 + a_{n-2,1}^2 + a_{n-2,2}^2 = A_{n-2} ,$$

$$a_{n-1,0}^2 + a_{n-1,1}^2 = A_{n-1} ,$$

$$a_{n,0}^2 = A_n ;$$

$$a_{1,0}\,a_{2,0} + a_{1,1}\,a_{2,1} + a_{1,2}\,a_{2,2} + \ldots + a_{1,n-3}\,a_{2,n-3} + a_{1,n-2}\,a_{2,n-2} = A_{1,2} ,$$

$$a_{1,0}\,a_{3,0} + a_{1,1}\,a_{3,1} + a_{1,2}\,a_{3,2} + \ldots + a_{1,n-3}\,a_{3,n-3} = A_{1,3} ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{1,0}\,a_{n-1,0} + a_{1,1}\,a_{n-1,1} = A_{1,n-1} ,$$

$$a_{1,0}\,a_{n,0} = A_{1,n} ;$$

$$a_{2,0}\,a_{3,0} + a_{2,1}\,a_{3,1} + \ldots + a_{2,n-3}\,a_{3,n-3} = A_{2,3} ,$$

$$a_{2,0}\,a_{4,0} + a_{2,1}\,a_{4,1} + \ldots + a_{2,n-4}\,a_{4,n-4} = A_{2,4} ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{2,0}\,a_{n-1,0} + a_{2,1}\,a_{n-1,1} = A_{2,n-1} ,$$

$$a_{2,0}\,a_{n,0} = A_{2,n} ;$$

$$a_{3,0}\,a_{4,0} + a_{3,1}\,a_{4,1} + \ldots + a_{3,n-3}\,a_{4,n-3} = A_{3,4} ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{3,0}\,a_{n-1,0} + a_{3,1}\,a_{n-1,1} = A_{3,n-1} ,$$

$$a_{3,0}\,a_{n,0} = A_{3,n} ;$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n-2,0}\,a_{n-1,0} + a_{n-2,1}\,a_{n-1,1} = A_{n-2,n-1} ,$$

$$a_{n-2,0}\,a_{n,0} = A_{n-2,n} ;$$

$$a_{n-1,0}\,a_{n,0} = A_{n-1,n} ;$$

aus welchen wir in der folgenden Nr. die zwei besondern Fälle $n = 2$ und $n = 3$ ausführlich entwickeln werden.

271. Bei der besondern Annahme $n = 2$ reduciren sich die allgemeinen Gleichungen vorangehender Nr. auf folgende drei:

$$a_{1,0}^2 + a_{1,1}^2 = A_1 , \quad a_{2,0}^2 = A_2 ;$$

$$a_{1,0}\, a_{2,0} = A_{1,2} .$$

Aus der zweiten dieser Gleichungen bestimmt man $a_{2,0}$, hierauf aus der dritten $a_{1,0}$ und mit Hülfe dieser aus der ersten $a_{1,1}$. Man findet, wenn in dieser Weise verfahren wird,

$$a_{1,0} = \frac{A_{1,2}}{\sqrt{A_2}} , \quad a_{2,0} = \frac{A_2}{\sqrt{A_2}} ,$$

$$a_{1,1} = \frac{\sqrt{A_1 A_2 - A_{1,2}^2}}{\sqrt{A_2}} ,$$

wodurch die Gleichheit:

$$A_1 \omega_1^2 + A_2 \omega_2^2 + 2A_{1,2} \omega_1 \omega_2 = \frac{1}{A_2}\left(A_{1,2} \omega_1 + A_2 \omega_2\right)^2 + \frac{A_1 A_2 - A_{1,2}^2}{A_2} \omega_1^2 \quad (4)$$

erhalten wird.

Wird ferner in den allgemeinen Gleichungen Ausgangs vorangehender Nr. $n = 3$ angenommen, dann bieten solche folgende sechs dar:

$$a_{1,0}^2 + a_{1,1}^2 + a_{1,2}^2 = A_1 ,$$

$$a_{2,0}^2 + a_{2,1}^2 = A_2 ,$$

$$a_{3,0}^2 = A_3 ;$$

$$a_{1,0}\, a_{2,0} + a_{1,1}\, a_{2,1} = A_{1,2} ,$$

$$a_{1,0}\, a_{3,0} = A_{1,3} ;$$

$$a_{2,0}\, a_{3,0} = A_{2,3} ;$$

aus denen die Buchstabengrößen zur Linken in folgender Weise bestimmt werden.

Aus der dritten dieser Gleichungen bestimmt man $a_{3,0}$, worauf dann aus der fünften und sechsten die Größen $a_{1,0}$ und $a_{2,0}$ ermit-

telt werden; mit Zuziehung der letztern wird aus der zweiten $a_{2,1}$, worauf aus der vierten $a_{1,1}$ ermittelt werden kann; aus der ersten endlich ergiebt sich nunmehr der Werth von $a_{1,2}$.

Verfährt man in eben bezeichneter Weise, so erhält man:

$$a_{1,0}=\frac{A_{1,3}}{\sqrt{A_3}},\quad a_{2,0}=\frac{A_{2,3}}{\sqrt{A_3}},\quad a_{3,0}=\frac{A_3}{\sqrt{A_3}},$$

$$a_{1,1}=\frac{A_{1,2}A_3-A_{1,3}A_{2,3}}{\sqrt{A_3}\sqrt{A_2A_3-A_{2,3}^2}},\quad a_{2,1}=\frac{A_2A_3-A_{2,3}^2}{\sqrt{A_3}\sqrt{A_2A_3-A_{2,3}^2}},$$

$$a_{1,2}=\frac{\sqrt{\{(A_1A_3-A_{1,3}^2)(A_2A_3-A_{2,3}^2)-(A_{1,2}A_3-A_{1,3}A_{2,3})^2\}}}{\sqrt{A_3}\sqrt{A_2A_3-A_{2,3}^2}};$$

und es besteht folgende Gleichheit:

$$A_1\omega_1^2+A_2\omega_2^2+A_3\omega_3^2+2(A_{1,2}\omega_1\omega_2+A_{1,3}\omega_1\omega_3+A_{2,3}\omega_2\omega_3)=$$

$$=\frac{1}{A_3}(A_{1,3}\omega_1+A_{2,3}\omega_2+A_3\omega_3)^2$$

$$+\frac{1}{A_3}\cdot\frac{\{(A_{1,2}A_3-A_{1,3}A_{2,3})\omega_1+(A_2A_3-A_{2,3}^2)\omega_2\}^2}{A_2A_3-A_{2,3}^2}$$

$$+\frac{1}{A_3}\cdot\frac{(A_1A_3-A_{1,3}^2)(A_2A_3-A_{2,3}^2)-(A_{1,2}A_3-A_{1,3}A_{2,3})^2}{A_2A_3-A_{2,3}^2}\omega_1^2. \qquad (5)$$

In ähnlicher Weise wird man aus den allgemeinen Gleichungen vorangehender Nr. die besondern Fälle $n=4, 5, \ldots$ deduciren; wir halten uns jedoch hiermit nicht auf, und übergehen schon in der folgenden Nr. aus der hier gewonnenen Gleichung (4) die Kennzeichen eines Maximum, oder eines Minimum einer Function zweier Variabeln aufzustellen und zu begründen.

272. Wenn man

$$u=f(x,y) \qquad (1')$$

hat, wo also u der Repräsentant einer Function zweier allgemeinen Größen x und y ist, so können nach Nr. 269 nur die den Gleichungen

$$\frac{du}{dx}=0 \text{ und } \frac{du}{dy}=0 \qquad (2')$$

Genüge thuenden Werthe von x und y, die wir jedoch beständig

reell voraussetzen, in u einen Maximum- oder Minimumzustand hervorbringen. Jener, dieser oder keiner dieser Zustände wird eintreten, je nachdem der Ausdruck:

$$J = \frac{d^2u}{dx^2}\omega^2 + \frac{d^2u}{dy^2}\omega_1^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}\omega\omega_1 ,$$

der nach Gleichung (4) vorangehender Nr. folgendermaßen gestellt werden kann:

$$J = \frac{1}{\frac{d^2u}{dy^2}}\left(\frac{d^2u}{dxdy}\omega + \frac{d^2u}{dy^2}\omega_1\right)^2 + \frac{\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2}{\frac{d^2u}{dy^2}}\omega^2 , \qquad (3')$$

ein negatives, ein positives oder ein unentschiedenes Zeichen annimmt.

In diesem Ausdrucke für J sind für x und y die aus (2′) gefolgerten reellen Bestimmungen derselben zu setzen, und die in demselben vorkommenden Größen $\omega$ und $\omega_1$ sind unendlich kleinwerdend, reell und gegenseitig in keinerlei bestimmten Abhängigkeit, d. h. in jedwedem Zusammenhange vorausgesetzt gedacht.

Indem wir gegenwärtig von dem Falle, wenn alle drei partiellen Differenzialquotienten:

$$\frac{d^2u}{dx^2}, \quad \frac{d^2u}{dy^2}, \quad \frac{d^2u}{dxdy}$$

für die aus (2′) gefolgerten Bestimmungen von x und y zugleich verschwinden, absehen, da wir diesen Fall in Nr. 275 eigens untersuchen werden; und indem ferner die andern Fälle, wenn einer oder zwei dieser partiellen Differenzialquotienten für besagte Bestimmungen von x und y verschwinden, ihrer Einfachheit wegen, keiner besondern Erörterung bedürfen: so können wir in unsern folgenden Betrachtungen dieser und der folgenden Nr. die besagten partiellen Differenzialquotienten alle, als angebbare, endliche und reelle Größen erklären.

Setzen wir ferner gegenwärtig fest, der Ausdruck:

$$\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2 .$$

stellt für die aus (2′) gefolgerten x und y ein von Null verschiedenes Resultat dar, indem wir den Fall des Nullwerdens dieses Ausdruckes für besagte Werthe von x und y in der nächstfolgenden Nr. besonders besprechen werden; so zeigt uns die Gleichung (3′), daß J nur dann bei jeglicher Verfügung über die unendlich kleinwerdenden reellen Größen $\omega$ und $\omega'$ ein von Null verschiedenes, beständig mit demselben Zeichen versehenes Resultat darbieten kann, wenn folgende zwei Ausdrücke:

$$\frac{1}{\frac{d^2u}{dy^2}} \quad \text{und} \quad \frac{\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2}{\frac{d^2u}{dy^2}},$$

für die schon mehrmals erwähnten Werthe von x und y Resultate mit einerlei Zeichen darbieten. Trifft solches ein, dann geht u ein Maximum oder ein Minimum ein, je nachdem dieses gemeinschaftliche Zeichen negativ oder positiv ist.

Mag nun das Zeichen $\frac{d^2u}{dy^2}$ positiv oder negativ sein, so kann dieser Anforderung nur dann entsprochen werden, wenn der Ausdruck:

$$\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2$$

ein mit positivem Zeichen begabtes Resultat darbietet; und da dieses dann nur eintreffen kann, wenn die zwei partiellen Differenzialquotienten:

$$\frac{d^2u}{dx^2} \quad \text{und} \quad \frac{d^2u}{dy^2}$$

Resultate mit einerlei Zeichen vorstellen, so gewinnen wir folgende Regel, den Maximum- oder Minimumzustand einer Function zweier Variabeln zu erkennen.

Damit die aus (2′) gefolgerten Bestimmungen für x und y in (1′) gesetzt, der Function u einen Maximum- oder einen Minimumwerth beilegen, und zwar unter jedweder Verfügung über die reellen unendlich kleinwerdenden Aenderungen $\omega$ und $\omega_1$ der eben genannten

Größen x und y; ist vorerst unerläßlich, daß der von Null verschiedene Ausdruck:

$$\frac{d^2u}{dx^2}\,\frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2$$

einen positiven Werth vorstelle, wo dann u ein Maximum oder ein Minimum sein wird, je nachdem das gemeinschaftliche Zeichen beider partiellen Differenzialquotienten:

$$\frac{d^2u}{dx^2} \text{ und } \frac{d^2u}{dy^2}$$

negativ oder positiv sich herausstellt.

273. Ist der in vorangehender Nr. öfters erwähnte Ausdruck:

$$\frac{d^2u}{dx^2}\,\frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2$$

für die aus (2′) derselben Nr. gefolgerten Bestimmungen über x und y der Nulle gleich, dann geht die Gleichung (3′) daselbst über in

$$J = \left(\sqrt{\frac{d^2u}{dx^2}}\,\omega \pm \sqrt{\frac{d^2u}{dy^2}}\,\omega_1\right)^2 ;$$

und da auch beim Statthaben dieser Annahme beide partiellen Differenzialquotienten:

$$\frac{d^2u}{dx^2} \text{ und } \frac{d^2u}{dy^2}$$

Resultate mit einerlei Zeichen darbieten müssen: so zeigt die eben aufgestellte Gleichung, daß J positiv oder negativ ausfällt, je nachdem dieses gemeinschaftliche Zeichen positiv oder negativ ist; und daß also, wenn nur von einem einzigen Zusammenhange unter $\omega$ und $\omega_1$ abgesehen wird, die Function u, in Uebereinstimmung mit der Ausgangs vorhergehenden Nr. aufgestellten Regel, ein Maximum oder ein Minimum eingeht, je nachdem das eben erwähnte gemeinschaftliche Zeichen negativ oder positiv ist.

Dieser eine Zusammenhang ist der, den die Gleichung:

$$\sqrt{\frac{d^2u}{dx^2}}\,\omega \pm \sqrt{\frac{d^2u}{dy^2}}\,\omega_1 = 0 ,$$

oder auch die folgende:

$$\frac{d^2u}{dx^2}\,\omega^2 = \frac{d^2u}{dy^2}\,\omega_1^2 \qquad (\alpha)$$

darstellt, wo $\omega$ und $\omega_1$ reell und unendlich kleinwerdend verbleiben, J aber in Null übergeht. In diesem einen Falle bleibt es noch unentschieden, ob u ein Maximum, oder ob ein Minimum eingeht. Während nämlich bei jedem sonstigen Zusammenhange unter $\omega$ und $\omega_1$ die Function u ein Maximum z. B. eingeht (für die aus (2′) gefolgerten x und y), kann dieselbe Function u, für dieselbe Bestimmung über x und y, aber unter dem durch die Gleichung ($\alpha$) ausgedrückten Zusammenhange zwischen $\omega$ und $\omega_1$, die man respective durch dx und dy ersetzen kann, entweder gleichfalls ein Maximum, oder aber auch ein Minimum eingehen, oder endlich weder dieses noch jenes.

Obwohl nun von einem Maximum der Function u unter jedwedem Zusammenhange der reellen unendlich kleinwerdenden Größen $\omega$ und $\omega_1$ im vorliegenden Falle nur dann die Rede sein kann, wenn solches auch noch beim Bestandhaben der Gleichung ($\alpha$) erkannt wird (das gleiche Bewenden, nur im entgegengesetzten Sinne, hat es mit einem Minimum der Function u); hört deswegen, im Falle auch Letzteres nicht eintrifft, die Function u nicht auf ein Maximum zu verbleiben. Es erstreckt sich alsdann dieser Maximumzustand von u vorläufig bloß über jene unendlich kleinwerdenden und reellen Aenderungen $\omega$ und $\omega_1$ der Variabeln x und y, die der Gleichung ($\alpha$) nicht genügen; für diese aber kann, wie vorhin schon erwähnt wurde, u ein Maximum sowohl, als auch ein Minimum eingehen, oder auch im neutralen Zustande verbleiben *).

*) So ein Fall dürfte eintreffen, wenn sowohl die Gleichungen (2′), als auch die folgende:

$$\frac{d^2u}{dx^2}\,\frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2 = 0\,,$$

welche letztere die Basis der Ergebnisse vorliegender Nr. ist, wenn diese drei Gleichungen für einen einzigen Zusammenhang zwischen x und y realisirt würden; in der Weise etwa, daß die Ausdrücke zur Linken der Gleichheitszeichen dieser Gleichungen irgend eine Function von x und y, als gemeinschaftlichen Faktor mitführten, der, der Null gleich gesetzt, besagten Zusammenhang darböte.

Um nun zu erfahren, ob die Function u bei Zugrundelegung von ($\alpha$) ein Maximum oder ein Minimum eingehet, ziehen wir abermals das Taylor'sche Theorem mehrerer Variabeln zu Hülfe.

Da wir im vorliegenden Falle den Grenzausdruck:

$$\text{Lim}: \{ f(a + \omega, b + \omega_1) - f(a, b) \}$$

in Bezug auf das Zeichen zu untersuchen haben, wo a und b Werthe von x und y vorstellen die den Gleichungen (2′) genügen, und das Taylor'sche Theorem gegenwärtig, als Werth dieses Grenzausdruckes, folgendes darbietet:

$$\left(\frac{d^3u}{dx^3}\omega^3 + 3\frac{d^3u}{dx^2dy}\omega^2\omega_1 + 3\frac{d^3u}{dxdy^2}\omega\omega_1^2 + \frac{d^3u}{dy^3}\omega_1^3\right)\frac{1}{1.2.3},$$

welcher Ausdruck mit Zuziehung der Gleichung ($\alpha$) in

$$\frac{1}{1.2.3} M \omega^3$$

übergeht, wo M eine leicht herzustellende Function der partiellen Differenzialquotienten zweiter und dritter Ordnung von u nach x und y ist; so muß aus leicht begreiflichen Gründen diese Größe M, wenn in derselben noch immer a und b statt x und y gesetzt werden, in Null übergehen, damit u auch bei Zugrundelegung der Gleichung ($\alpha$) ein Maximum oder ein Minimum verbleibe. Beim Nichteintreffen dieser Anforderung ist in diesem Falle u weder ein Maximum noch ein Minimum; beim Eintreffen derselben hingegen bietet abermals das Taylor'sche Theorem für den obigen Grenzausdruck folgendes dar:

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{d^4u}{dx^4}\omega^4 + 4\frac{d^4u}{dx^3dy}\omega^3\omega_1 + 6\frac{d^4u}{dx^2dy^2}\omega^2\omega_1^2\\ &+ 4\frac{d^4u}{dxdy^3}\omega\omega_1^3 + \frac{d^4u}{dy^4}\omega_1^4\end{aligned}\right\}\frac{1}{1.2.3.4},$$

das gleichfalls mit Zuziehung der Gleichung ($\alpha$) in

$$\frac{1}{1.2.3.4} N \omega^4$$

übergeht. Diese Größe N umfaßt die partiellen Differentialquo-

tienten zweiter und vierter Ordnung der Function u nach x und y und muß, wenn letztere durch a und b ersetzt werden, ein angebbares Resultat mit negativem oder mit positivem Zeichen darstellen, damit u einen Maximum- oder Minimumzustand eingehe.

Erhält man aber $N = o$, so stelle man jene Gliedersumme des oben aufgestellten Grenzausdruckes her, die nach Einführung der Gleichung ($\alpha$) folgende Form

$$\frac{1}{1.2.3.4.5} P \omega^5$$

annimmt, wo dann zum Bestehen eines Maximum oder eines Minimum $P = o$ sich ergeben muß. Beim Eintreffen dieser Bedingung stelle man jene Gliedersumme obigen Grenzausdruckes her, die mit Zuziehung der Gleichung ($\alpha$) einen Ausdruck der Form:

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6} Q \omega^6$$

darbietet, wo nunmehr u ein Maximum oder ein Minimum sein wird, je nachdem Q negativ oder positiv ausfällt u. s. w.

Hat man sich auf diesem Wege über die Beschaffenheit von u, in Rücksicht auf Maximum oder Minimum, bei Zugrundelegung der Gleichung ($\alpha$) Aufklärung verschafft; dann hat man auch, wenn der Einfachheit wegen nur den Fall eines Maximum im Auge behalten wird, eine klare Einsicht in die Function u, ob nämlich dieselbe bei jedwedem Zusammenhange der reell gedachten unendlich kleinwerdenden Größen $\omega$ und $\omega_1$ ein Maximum eingehet, oder aber, ob dieselbe bei der unter ($\alpha$) festgestellten Relation dieser Größen $\omega$ und $\omega_1$ eine Unterbrechung dieses Maximumzustandes erleidet, in welchem Unterbrechungsmomente, wie wir so eben gesehen haben, dieselbe weder ein Maximum noch ein Minimum, oder unter gewissen Umständen sogar ein Minimum eingehen kann.

**274.** Auf die Ergebnisse der beiden vorangehenden Nrn. gelangt man auch durch folgende Betrachtungen.

Die Größe J in Nr. 272, nämlich:

$$J = \frac{d^2u}{dx^2} \omega^2 + 2 \frac{d^2u}{dxdy} \omega \omega_1 + \frac{d^2u}{dy^2} \omega_1^2 ,$$

die auch in folgender Weise gestellt werden kann:

$$J = \omega_1^2 \left\{ \frac{d^2u}{dx^2} m^2 + 2 \frac{d^2u}{dxdy} m + \frac{d^2u}{dy^2} \right\},$$

wo man

$$m = \frac{\omega}{\omega_1}$$

gesetzt hat, muß, wie aus der citirten Nr. erhellet, im Falle eines Maximum oder eines Minimum von u für jeden nur denkbaren reellen Werth von m angebbare und mit einerlei Zeichen begabte Werthe darbieten.

Da der quadratische Faktor $\omega_1^2$ wegen des Reellsein von $\omega_1$ auf dieses Zeichen keinen weitern Einfluß ausübt, so muß das eben Ausgesagte bei dem Ausdrucke:

$$\frac{d^2u}{dx^2} m^2 + 2 \frac{d^2u}{dxdy} m + \frac{d^2u}{dy^2}, \qquad (\beta)$$

nachdem man statt x und y die aus (2′) gefolgerten Ergebnisse eingeführt hat, ein Statt finden; dem, wie aus der Lehre der Gleichungen bekannt ist, entsprochen werden kann:

a) Wenn dieser Ausdruck ($\beta$) nur für imaginäre Werthe von m in Null übergeht; d. h. wenn der Ausdruck:

$$\frac{d^2u}{dx^2} \frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2$$

einen angebbaren positiven Werth darstellt.

b) Wenn derselbe Ausdruck ($\beta$) ein vollständiges Quadrat ist; nämlich, wenn man

$$\frac{d^2u}{dx^2} \frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2 = 0$$

hat.

Fassen wir beide Fälle zusammen, so stellt sich folgendes heraus:

Die Function u in Gleichung (1′) geht nur dann für die aus (2′) gefolgerte Bestimmung über x und y einen Maximum- oder einen Minimumzustand ein, wenn die Wurzeln der Gleichung des zweiten Grades in Bezug auf m:

$$\frac{d^2u}{dx^2} m^2 + 2 \frac{d^2u}{dxdy} m + \frac{d^2u}{dy^2} = 0$$

nicht ungleich und reell sind.

Die weitern Folgerungen hievon sind dieselben, wie solche in den zwei vorausgeschickten Nrn., für den Fall a) in Nr. 272 und für den Fall b) in Nr. 273 mit genügender Ausführlichkeit mitgetheilt worden sind.

275. In Nr. 272 haben wir den Fall, wenn sämmtliche partiellen Differenzialquotienten zweiter Ordnung von u nach x und nach y verschwinden, ausgeschlossen, und die Betrachtnahme desselben auf vorliegende Nr. verwiesen; wozu wir uns auch sofort anschicken.

Da nunmehr außer den Gleichungen (1′) und (2′) besagter Nr. auch folgende bestehen:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2u}{dxdy} = 0, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = 0, \qquad (4')$$

so geht der Grenzausdruck:

$$\text{Lim}: \left\{ f(a + \omega, b + \omega_1) - f(a, b) \right\},$$

wo a und b die Werthe von x und y sind, welche den Gleichungen (2′) und (4′) genügen, nach dem Taylor'schen Theoreme über in:

$$\left\{ \frac{d^3u}{dx^3} \omega^3 + 3 \frac{d^3u}{dx^2dy} \omega^2\omega_1 + 3 \frac{d^3u}{dxdy^2} \omega\omega_1^2 + \frac{d^3u}{dy^3} \omega_1^3 \right\} \frac{1}{1.2.3},$$

oder auch in:

$$\frac{\omega_1^3}{1.2.3} \left\{ \frac{d^3u}{dx^3} m^3 + 3 \frac{d^3u}{dx^2dy} m^2 + 3 \frac{d^3u}{dxdy^2} m + \frac{d^3u}{dy^3} \right\},$$

wo man

$$m = \frac{\omega}{\omega_1}$$

gesetzt hat. In diesem Ausdrucke ist m jedweden reellen Werthes, und die unendlich kleinwerdende reelle Größe $\omega_1$ des positiven wie des negativen Zeichens fähig. Damit aber u den Maximum- oder den Minimumzustand eingehe, muß das Zeichen dieses Ausdruckes unabhängig von dem von $\omega_1$ sein, dem nur entsprochen werden kann, wenn man folgende Gleichung feststellt:

$$\frac{d^3u}{dx^3}m^3 + 3\frac{d^3u}{dx^2dy}m^2 + 3\frac{d^3u}{dxdy^2}m + \frac{d^3u}{dy^3} = 0\ ;$$

es ist aber in dieser Gleichung m eine durchaus willkührliche reelle Größe: daher kann dieselbe nur insofern bestehen, als folgende Gleichungen:

$$\frac{d^3u}{dx^3} = 0\ ,\quad \frac{d^3u}{dx^2dy} = 0\ ,\quad \frac{d^3u}{dxdy^2} = 0\ ,\quad \frac{d^3u}{dy^3} = 0 \qquad (5')$$

Bestand haben, d. h. beim gleichzeitigen Bestehen der Gleichungen (2′) und (4′) ist zum Eintreffen eines Maximum- oder Minimumzustandes von u unerläßlich, daß auch die zuletzt aufgestellten Gleichungen bestehen; oder, wenn nebst den partiellen Differenzialquotienten erster Ordnung auch noch die der zweiten Ordnung verschwinden, alsdann ist auch unerläßlich, daß die der dritten Ordnung für dieselben Bestimmungen von x und y in Nullen übergehen.

Beim Nichteintreffen dieser letztern Anforderung, nämlich, wenn die Gleichungen (5′) nicht zugleich mit den in (4′), für $x = a$ und $y = b$, verschwinden; alsdann ist die Function u weder eines Maximum noch eines Minimum fähig. Beim Eintreffen derselben aber bietet der oben aufgestellte Grenzausdruck, falls wir solchen durch:

$$\frac{J}{1.2.3.4}$$

vorstellen, folgende Bestimmung für J dar:

$$J = \omega_1^4\left\{\frac{d^4u}{dx^4}m^4 + 4\frac{d^4u}{dx^3dy}m^3 + 6\frac{d^4u}{dx^2dy^2}m^2 + 4\frac{d^4u}{dxdy^3}m + \frac{d^4u}{dy^4}\right\},$$

wo m durch die obige Gleichung gegeben, und sonach jedes reellen Werthes fähig ist.

Da nun der Faktor $\omega_1^4$ auf das Zeichen von J keinen Einfluß ausübt, so muß der innerhalb der Klammern enthaltene Faktor, beim Statthaben eines Maximum oder Minimum von u, für jeden reellen Werth von m ein und dasselbe Zeichen darbieten.

Dieses wird, wie aus der Lehre der Gleichungen bekannt, erreicht, wenn die folgende Gleichung des vierten Grades:

$$\frac{d^4u}{dx^4}m^4 + 4\frac{d^4u}{dx^3dy}m^3 + 6\frac{d^4u}{dx^2dy^2}m^2 + 4\frac{d^4u}{dxdy^3}m + \frac{d^4u}{dy^4} = 0\ ,$$

nachdem man in die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von m für x und y die aus (2′) gefolgerten reellen Bestimmungen derselben eingeführt hat, in ihren vier Wurzeln einer der folgenden Anforderungen nachkömmt:

a). Wenn sämmtliche vier Wurzeln derselben imaginär sind.

b) Wenn nur zwei der Wurzeln imaginär, die beiden reellen aber unter einander gleich sind.

c) Wenn zwar sämmtliche vier Wurzeln reell sind, jedoch entweder alle unter einander gleich, oder es wenigstens paarweise sind.

Im Falle a) findet ein Maximum oder ein Minimum für jedweden Zusammenhang unter den unendlich kleinwerdenden Größen $\omega$ und $\omega_1$ Statt; in den Fällen b) und c) findet zwar gleichfalls der eine oder andere dieser Zustände Statt, unter ähnlichen Beschränkungen jedoch, wie solche in der Nr. 273 ausführlich erörtert worden sind, über die besonders einzutreten wir hier unnöthig erachten.

Bietet aber dieselbe Gleichung des vierten Grades Wurzeln dar, die keinem der drei Fälle a), b) oder c) entsprechen, jedoch unter der Voraussetzung, daß nicht sämmtliche partiellen Differenzialquotienten der vierten Ordnung für die aus (2′) gefolgerten Werthe von x und y verschwinden; dann ist die Function u weder eines Maximum noch eines Minimum fähig.

Verschwinden aber sämmtliche partiellen Differenzialquotienten der vierten Ordnung, dann müssen zum Dasein eines Maximum oder Minimum von u auch sämmtliche Differenzialquotienten der fünften Ordnung verschwinden; beim Eintreffen dieses gelangt man auf eine Gleichung vom sechsten Grade, die, wie die eben betrachtete vom vierten Grade, in ihren Wurzeln ganz analogen Anforderungen nachkommen muß. Diese Gleichung anzugeben und die eben angedeuteten Anforderungen vorzuführen unterlassen wir gleichfalls, und fügen bloß noch die Bemerkung bei, daß man im Allgemeinen eine Gleichung von geradem Grade in Betreff der Wurzeln zu analysiren haben wird.

276. Wir schließen den vorliegenden Gegenstand mit der Mittheilung der Kennzeichen, die das Dasein eines Maximum oder

Minimum einer Function dreier Variabeln bedingen, und zwar unter jeglichem Zusammenhange der reellen ohne Ende abnehmenden Aenderungen $\omega$, $\omega_1$, $\omega_2$ der Variabeln x, y, z.

Hat man die Gleichung:

$$u = f(x, y, z) \qquad (1'')$$

so kann nach Nr. 269 ein Maximum- oder ein Minimumzustand dieser Function u nur bei jenen Werthen von x, y und z eintreten, die den Gleichungen:

$$\frac{du}{dx} = 0 \,, \quad \frac{du}{dy} = 0 \,, \quad \frac{du}{dz} = 0 \qquad (2'')$$

genügen; jener oder dieser tritt wirklich ein, wenn der Ausdruck:

$$\frac{d^2u}{dx^2}\omega^2 + \frac{d^2u}{dy^2}\omega_1^2 + \frac{d^2u}{dz^2}\omega_2^2 + 2\left\{\frac{d^2u}{dxdy}\omega\omega_1 + \frac{d^2u}{dxdz}\omega\omega_2 + \frac{d^2u}{dydz}\omega_1\omega_2\right\},$$

den wir der Kürze wegen durch J andeuten wollen, bei jedwedem Zusammenhang der reellen unendlich kleinwerdenden Größen $\omega$, $\omega_1$, $\omega_2$, welche die unendlich kleinwerdenden Zunahmen der aus (2'') gefolgerten reellen Bestimmungen der Variabeln x, y, z sind, wenn dieser Ausdruck J ein negatives oder ein positives Resultat darstellt.

Um zur Kenntniß der dieser Anforderung entsprechenden Bedingungen zu gelangen, umformen wir den Ausdruck für J nach Gleichung (5) Nr. 271.

Nach dieser Gleichung stellt sich, wenn zur Vereinfachung der Darstellung die Gleichungen

$$A = \frac{d^2u}{dy^2}\frac{d^2u}{dz^2} - \left(\frac{d^2u}{dydz}\right)^2 ,$$

$$B = \frac{d^2u}{dz^2}\frac{d^2u}{dx^2} - \left(\frac{d^2u}{dzdx}\right)^2 ,$$

$$C = \frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2 ,$$

festgestellt werden, folgende Umformung für J heraus:

$$J = \frac{1}{\frac{d^2u}{dz^2}} \left\{ \frac{d^2u}{dxdz}\,\omega + \frac{d^2u}{dydz}\,\omega_1 + \frac{d^2u}{dz^2}\,\omega_2 \right\}^2$$

$$+ \frac{1}{A\,\frac{d^2u}{dz^2}} \left\{ \left( \frac{d^2u}{dxdy}\,\frac{d^2u}{dz^2} - \frac{d^2u}{dxdz}\,\frac{d^2u}{dydz} \right) \omega + A\,\omega_1 \right\}^2$$

$$+ \frac{1}{A\,\frac{d^2u}{dz^2}} \left\{ AB - \left( \frac{d^2u}{dxdy}\,\frac{d^2u}{dz^2} - \frac{d^2u}{dxdz}\,\frac{d^2u}{dydz} \right)^2 \right\} \omega^2 ,$$

aus der entnommen wird, daß J nur dann bei jeder Relation unter den reellen unendlich kleinwerdenden Größen $\omega$, $\omega_1$, $\omega_2$ ein positives oder auch ein negatives Zeichen annimmt, wenn die zwei Ausdrücke:

$$A \text{ und } AB - \left( \frac{d^2u}{dxdy}\,\frac{d^2u}{dz^2} - \frac{d^2u}{dxdz}\,\frac{d^2u}{dydz} \right)^2 ,$$

welchen letztern wir einstweilen durch K andeuten wollen, angebbare positive Werthe annehmen, nachdem man in denselben die reellen Variabeln x, y, z den Gleichungen (2″) gemäß bestimmt hat. Findet diese Bedingung Statt, dann trägt J das Zeichen des partiellen Differenzialquotienten $\frac{d^2u}{dz^2}$ unter derselben Bestimmung von x, y, z; und je nachdem dieses Zeichen negativ oder positiv ist, stellt u aus Gleichung (1″) ein Maximum oder ein Minimum vor.

Dieses eben Mitgetheilte reicht schon vollständig hin, den Maximum- oder Minimumzustand der Function zu erkennen; zieht man aber die Folgerungen dieser Bedingungen in Betracht und berücksichtiget, daß man auch folgende zwei Formenwerthe für K hat:

$$K = \frac{\frac{d^2u}{dz^2}}{\frac{d^2u}{dx^2}} \left\{ BC - \left( \frac{d^2u}{dydz}\,\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{d^2u}{dzdx}\,\frac{d^2u}{dydx} \right)^2 \right\} ,$$

$$K = D\,\frac{d^2u}{dz^2} ,$$

wo der Kürze wegen:

$$D = \frac{d^2u}{dx^2}\,\frac{d^2u}{dy^2}\,\frac{d^2u}{dz^2} + 2\,\frac{d^2u}{dxdy}\,\frac{d^2u}{dzdx}\,\frac{d^2u}{dydz}$$

$$- \frac{d^2u}{dx^2}\,\frac{d^2u}{dydz} - \frac{d^2u}{dy^2}\,\frac{d^2u}{dzdx} - \frac{d^2u}{dz^2}\,\frac{d^2u}{dxdy}$$

gesetzt wurde; so stellt sich auch folgende Regel, betreffend den Maximum- oder Minimumzustand von u heraus:

Damit die aus (2″) gefolgerten Bestimmungen von x, y und z in (1″) gesetzt, die Function u in einen Maximum- oder Minimumzustand versetzen; und zwar bei jeder Verfügung über die reellen unendlich kleinwerdenden Aenderungen $\omega$, $\omega_1$ und $\omega_2$ der eben genannten Variabeln x, y und z: ist vorerst nöthig, daß die drei Ausdrücke für A, B und C für dieselben Werthe von x, y und z, als positive Größen sich herausstellen; alsdann wird u ein Maximum oder ein Minimum sein, je nachdem das gemeinschaftliche Zeichen folgender vier Ausdrücke:

$$\frac{d^2u}{dx^2}, \quad \frac{d^2u}{dy^2}, \quad \frac{d^2u}{dz^2} \text{ und } D$$

negativ oder positiv ist.

Anmerkung. Wie aus dieser Regel erhellet, ist zum Dasein eines Maximum oder Minimum von u unerläßlich, daß die oben aufgestellten Ausdrücke für A, B, C für die aus (2″) gefolgerten Bestimmungen über x, y, z positive Werthe repräsentiren; beim Negativwerden schon nur eines dieser Ausdrücke stellt u weder ein Maximum noch ein Minimum vor; beim Nullwerden hingegen eines, zweier oder aller drei Ausdrücke, mit Ausschließung jedoch des Falles, daß sämmtliche partiellen Differenzialquotienten zweiter Ordnung Nullwerthe haben, stellt die Function u noch immer, mit allfälliger Ausschließung bestimmter Relationen unter den unendlich kleinwerdenden reellen Größen $\omega$, $\omega_1$, $\omega_2$, ein Maximum oder ein Minimum vor. Mit diesem Maximum- oder Minimumzustand von u hat es dann ein ähnliches Bewenden, wie mit dem in Nr. 273 bei einer Function zweier Variabeln beleuchteten analogen Falle.

# Viertes Buch.

# Die Integralrechnung.

## Zweiten Theiles erste Abtheilung.

## Fünftes Kapitel.

### Integration linearer Differenzialfunctionen zweier und mehrerer Variabeln.

277. Wenn, wie im ersten Theile der Integralrechnung, unter Integriren die entgegengesetzte Operation vom Differenziren verstanden wird, nämlich, zu einer vorgelegten Differenzialfunction eine Integralfunction herstellen, die der Operation des Differenzirens unterzogen, erstere hervorruft; so zeugt das in Differenzialrechnung III vorliegenden Bandes Mitgetheilte von der großen Mannigfaltigkeit dieser inversen Operation, sobald man es mit mehr als einer Variabeln zu thun hat und giebt, sowohl bei der Aufstellung der Grundbegriffe dieser verschiedenen inversen Operationen, als auch bei der Anordnung der Neben- wie Unterabtheilungen und Berücksichtigung aller Verzweigungen derselben, den wesentlichsten Anhaltspunkt ab.

Bei einem Hinblick auf die ersten Nrn. dieser citirten Abtheilung der Differenzialrechnung, namentlich auf die Gleichungen (A) und (B) der Nrn. 249 und 250, stellt sich alsbald heraus, daß in der Integralrechnung mit mehrern Variabeln die linearen Differenzialformen, die wir in folgender Nr. näher bezeichnen werden, zuerst und vor allen andern in Betrachtnahme zu ziehen sind; mit welchen wir in der nächsten Nr. auch den Anfang machen.

278. Unter einer linearen Differenzialfunction mehrerer Variabeln $x$, $y$, $z$, . . . verstehen wir irgend eine Function dieser Va-

riabeln und deren Differenzialien dx, dy, dz, . . ., in welcher diese Differenzialien aber nur in den ersten und positiven Dimensionen vorkommen.

Wenn sonach durch P, Q, R, . . beliebige Functionen von x, y, z, . . vorgestellt werden, dann stellt der eben gemachten Mittheilung gemäß der Ausdruck:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz + \ldots$$

eine lineare Differenzialfunction der Variabeln x, y, z, . . vor.

Einer solchen Differenzialfunction Integrale wird jene Function von x, y, z, . . . . genannt, deren totales Differenziale (Nr. 248, (c)) nach allen diesen Variabeln die vorgelegte Differenzialfunction hervorruft.

In dem ersten Theile, wo wir die Integralrechnung mit Functionen einer Variabeln behandelten, stellten wir gleich am Eingange, in Nr. 31, den Begriff eines Integrals in ganz ähnlicher Weise, wie so eben bei mehrern Variabeln fest. Dort ließen wir aber die Voruntersuchung, ob jede Differenzialformel einer Variabeln diesem Begriffe entspricht, unberührt. Wir gingen daselbst gerade dem Endziele zu, zur Herstellung der Integralfunctionen vorgelegter Differenzialformen, und zeigten durch die That, daß demselben jedesmal ein Genüge geschehen kann. Erstens haben wir in der Integralrechnung II an die zweihundert Differenzialfunctionen wirklich integrirt, nämlich, wir stellten die denselben entsprechenden Integralfunctionen her; zweitens haben wir in der Integralrechnung III mehrere Differenzialfunctionen, und zwar gleichfalls in nicht geringer Anzahl, in der Weise behandelt, daß wir zum Theil vorsätzlich von deren Integralfunctionen abgesehen, zum großen Theil aus Unkenntniß derselben hiezu bemüßiget, haben wir doch die Werthe dieser uns unbekannten Integralfunctionen für besondere Werthe der allgemeinen Größe auf unzweideutige Weise hergestellt; drittens haben wir in Integralrechnung IV mehrere Integralfunctionen durch ohne Ende fortlaufende convergente Reihen bestimmt; viertens endlich, was unstreitig die Hauptstütze für das Vorhandensein einer Integralfunction zu jeder vorgelegten linearen Differenzialfunction einer

Variabeln ist, haben wir im Schlußparagraphen der Integralrechnung IV zu jeder vorgelegten Differenzialformel, wenn gleich nicht die Integralfunction derselben, jedoch den Werth dieser unbekannten Integralfunction für irgend einen, im Bereiche der Continuitätsgrenzen derselben fallenden Werth der allgemeinen Größe mit jeder verlangten Genauigkeit herstellen gelehrt. — Nicht dasselbe Bewenden hat es aber mit den Differenzialfunctionen mehrerer Variabeln; von vorne herein wird hier geradezu dargethan, daß nicht jede Differenzialfunction mehrerer Variabeln dem oben aufgestellten Begriffe eines Integrals genügen kann, wenn nicht unter den Variabeln gewisse gegenseitige Beziehungen festgestellt werden. Dieses zu zeigen, vor der Hand wenigstens bei linearen Differenzialfunctionen mehrerer Variabeln, werden wir in den nächstfolgenden drei Nrn. uns angelegen sein lassen.

279. Von den einfachen zu den zusammengesetzten Fällen überzugehen beabsichtigend, beginnen wir mit den Untersuchungen über Integrabilität bei der linearen Differenzialfunction zweier Variabeln, der Form:

$$P\,dx + Q\,dy\,, \qquad (a)$$

wo P und Q beliebige Functionen von x und y sind; d. h. wir beginnen mit der Erörterung der Frage, ob eine Function von x und y denkbar ist, die nach diesen von einander unabhängig gedachten Variabeln differenzirt, die vorgelegte Differenzialfunction hervorruft.

Zur Beantwortung dieser Frage schlagen wir den analytischen Weg ein, der bei allen derartigen Untersuchungen, mit Aufmerksamkeit und Umsicht verfolgt, fast immer eines guten Erfolges sich erfreuet.

Wir gehen nämlich von der Annahme aus, eine solche Function von x und y, die wir Kürze halber durch u vorstellen wollen, findet Statt, und richten all' unsre Aufmerksamkeit darauf, die Folgerungen dieser Annahme herzustellen.

Die Gleichung (A) Nr. 249 bietet zunächst, wenn das totale Differenziale von u hergestellt wird, folgende Gleichung dar:

$$d.u = \frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy\,;$$

soll dieses Ergebniß für das totale Differenziale von u genau unsre vorgelegte Differenzialfunction (a) darstellen, dann muß folgende Gleichung:

$$\frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy = P\,dx + Q\,dy\,,$$

oder auch folgende:

$$\left(\frac{du}{dx} - P\right)dx + \left(\frac{du}{dy} - Q\right)dy = o$$

identisch bestehen, d. h. dieselbe muß frei von jedwedem Zusammenhang zwischen x und y, also für jedes nur denkbare Verhältniß zwischen dx und dy Statt haben, welches offenbar nur dann realisirt werden kann, wenn die Coefficienten von dx und dy in derselben, jeder für sich und unabhängig von besondern Annahmen über x und y in Null übergeht; nämlich, folgende zwei Gleichungen:

$$\frac{du}{dx} - P = o\,,\quad \frac{du}{dy} - Q = o$$

müssen als Gleichheiten bestehen*).

Bisher hat uns die Annahme, die vorgelegte Differenzialfunction läßt unabhängig von jedwedem Zusammenhange zwischen x und y eine Integralfunction zu, weder auf eine Ungereimtheit noch auf welchen Zusammenhang unter den Functionen P und Q geführt. Da man nämlich die Function u nicht kennt, so läßt sich von vorne herein über das Statthaben dieser zwei Gleichheiten weder im bejahenden noch im verneinenden Sinne etwas mit Bestimmtheit aussagen. Werden aber die Folgerungen aus dem Umstande gezogen, daß dieselben Gleichheiten vorstellen sollen und sonach, unter dieser Voraussetzung, der Operation des Differenzirens nach jeder einzelnen der Variabeln x und y unterzogen werden dürfen; so gelangt man, wie sofort gezeigt werden soll, auf eine von u befreiete Gleichung, die die Bedingung für das Vorhandensein einer Integral-

---

*) Zwischen Gleichung und Gleichheit besteht der Unterschied, daß letztere das Ziel der erstern ist, wenn nämlich in dieser (in der Gleichung) eine passende Verfügung zuerst über die allgemeinen Größen getroffen wird.

function u ausdrückt, und deswegen auch die Bedingungsgleichung der Integrabilität, oder auch einfach Bedingungsgleichung genannt wird.

Stellt man die obigen zwei Gleichheiten folgendermaßen:

$$\frac{du}{dx} = P \,, \quad \frac{du}{dy} = Q \,,$$

differenzirt die erste partiell nach y und die zweite in gleicher Weise nach x, wodurch

$$\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{dP}{dy} \text{ und } \frac{d^2u}{dydx} = \frac{dQ}{dx}$$

erhalten wird, berücksichtiget die erste der Gleichungen (c) Nr. 251, die

$$\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d^2u}{dydx}$$

darbietet; so ergiebt sich folgende von u unabhängige Gleichung:

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} \,, \tag{b}$$

die gleichfalls den Charakter einer Gleichheit haben muß. Diese stellt die vorhin erwähnte Bedingungsgleichung dar, an deren Bestehen das Dasein einer Integralfunction zur vorgelegten Differenzialfunction geknüpft ist, aus der also die Entscheidung der am Eingange gestellten Frage auf eine unzweideutige Weise hervorgeht. Beim Nichtstatthaben derselben nämlich ist man sofort zum Schlusse berechtiget, die vorgelegte lineare Differenzialfunction (a) gestattet keine Integralfunction; wodurch unsere Behauptung Ausgangs vorangehender Nr. gerechtfertiget dasteht, daß nicht jeder Differenzialfunction mit mehr als einer Variabeln auch eine Integralfunction entspricht. — Ob man aber umgekehrt, vom Statthaben dieser Bedingungsgleichung ausgehend, annehmen darf, besagte Differenzialfunction läßt dann eine Integralfunction zu; dieses werden wir im Verfolge dieses Kapitels in Nr. 282 eigens darthun und sogar das Verfahren, diese Integralfunction herzustellen, daselbst mittheilen. Wir schieben diese Mittheilung nur so lange auf, bis wir analoge Bedingungsgleichungen wie (b) für lineare Differenzialfunctionen mit dreien und mehrern Variabeln entwickelt haben werden.

280. Stellt man durch P, Q und R beliebige Functionen dreier Variabeln x, y und z vor, wodurch der Ausdruck:

$$Pdx + Q\,dy + R\,dz \qquad (a')$$

zur linearen Differenzialfunction der drei Variabeln x, y, z wird; so stellen wir uns in vorliegender Nr. die Aufgabe, die Bedingungsgleichungen der Integrabilität dieser Differenzialfunction abzuleiten.

Gesetzt, es existirt eine Function u der besagten drei Variabeln, deren totales Differenziale, nach Gleichung (B) Nr. 250 durch die Gleichung:

$$d.u = \frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy + \frac{du}{dz}\,dz$$

dargestellt, genau die vorgelegte lineare Differenzialfunction darbietet; so gelangt man durch ähnliche Betrachtungen wie in der vorangehenden Nr. auf die Gleichheit:

$$\left(\frac{du}{dx} - P\right) dx + \left(\frac{du}{dy} - Q\right) dy + \left(\frac{du}{dz} - R\right) dz = o\,,$$

in der, damit solche als Gleichheit bestehe, die Ausdrücke zur Linken sich gegenseitig aufheben, und zwar unter jedwedem Zusammenhang der Variabeln x, y, z. Nun wird bei dieser Voraussetzung über die Variabeln x, y, z kein Glied, das mit dx multiplicirt ist, ein Gegenglied unter den mit dy oder mit dz multiplicirten Gliedern antreffen, und zwar lediglich der völligen Unabhängigkeit wegen dieser Differenzialen dx, dy, dz unter einander; sonach muß der mit dx behaftete Coefficient der letzten Gleichheit selbst der Nulle gleich sein, und da es ein gleiches Bewenden mit den Coefficienten von dy und dz dieser Gleichheit hat: so stellt sich als Folge der obigen Gleichheit das gleichzeitige Bestehen folgender drei Gleichheiten heraus:

$$\frac{du}{dx} = P\,,\quad \frac{du}{dy} = Q\,,\quad \frac{du}{dz} = R.$$

Aus diesem fließen die Bedingungsgleichungen der Integrabilität der vorgelegten linearen Differenzialfunction in folgender Weise:

Differenzirt man die erste dieser Gleichheiten nach y und die zweite nach x, ebenso die dritte nach x und die erste nach z, endlich die zweite nach z und die dritte nach y; so ergeben sich, mit Berücksichtigung der in Nr. 251 aufgestellten Gleichungen (c), sofort folgende drei Bedingungsgleichungen:

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}, \quad \frac{dR}{dx} = \frac{dP}{dz}, \quad \frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}, \qquad (b')$$

an deren Realisirung zunächst das Dasein einer Integralfunction zur vorgelegten linearen Differenzialfunction (a′) gebunden erscheint.

Beim Nichtstatthaben dieser Bedingungsgleichungen giebt es keine Function von x, y, z, deren totales Differenziale die vorgelegte (a′) hervorruft; beim Statthaben derselben aber werden wir die Integralfunction zu (a′), in Nr. 283, sogar herstellen lehren.

281. Hat man endlich ganz allgemein die lineare Differenzialfunction:

$$H_1 dx_1 + H_2 dx_2 + H_3 dx_3 + H_4 dx_4 + \ldots + H_n dx_n,$$

wo

$$H_1, H_2, H_3, H_4, \ldots H_n$$

beliebige Functionen der n Variabeln

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots x_n$$

vorstellen; so gelangt man durch Betrachtungen, denen der beiden vorangeschickten Nrn. ähnlich, auf folgendes Endergebniß.

Damit diese vorgelegte Differenzialfunction unmittelbares Ergebniß der Differenziation einer Function der Variabeln $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ sei, müssen folgende Bedingungsgleichungen realisirt werden:

$$\frac{dH_1}{dx_2} = \frac{dH_2}{dx_1}, \quad \frac{dH_1}{dx_3} = \frac{dH_3}{dx_1}, \quad \frac{dH_1}{dx_4} = \frac{dH_4}{dx_1}, \ldots \frac{dH_1}{dx_n} = \frac{dH_n}{dx_1};$$

$$\frac{dH_2}{dx_3} = \frac{dH_3}{dx_2}, \quad \frac{dH_2}{dx_4} = \frac{dH_4}{dx_2}, \ldots \frac{dH_2}{dx_n} = \frac{dH_n}{dx_2};$$

$$\frac{dH_3}{dx_4} = \frac{dH_4}{dx_3}, \ldots \frac{dH_3}{dx_n} = \frac{dH_n}{dx_3};$$

. . . . . .

$$\frac{dH_{n-1}}{dx_n} = \frac{dH_n}{dx_{n-1}}.$$

Beim Nichteintreffen derselben ist es geradezu unmöglich zur vorgelegten Differenzialfunction eine Integralfunction anzugeben, unter der Voraussetzung jedoch, daß die n Variabeln in keinerlei gegenseitige Abhängigkeit versetzt werden; hingegen ist diese Integralfunction gar wohl denkbar, ja dieselbe ist sogar jedesmal herzustellen möglich, wie in Nr. 285 wird gezeigt werden, wenn die eben aufgeführten Bedingungsgleichungen, deren Anzahl gleich:

$$\frac{1}{2}\, n\, (n-1)$$

ist, als bestehend erkannt werden.

282. Wir haben jede der drei vorangehenden Nrn. mit der Behauptung geschlossen, daß beim Eintreffen der daselbst aufgestellten Bedingungsgleichungen die betreffenden linearen Differenzialfunctionen auch Integralfunctionen zulassen. Indem wir uns anschicken dieses darzuthun, bemerken wir voraus, daß wir, gleich wie bei der Entwickelung der Bedingungsgleichungen, auch bei der Begründung dieser Behauptung mit dem einfachsten Fall den Anfang machen und nach und nach zu den zusammengesetztern übergehen werden.

Diesem nach beginnen wir mit der linearen Differenzialfunction:

$$P\,dx + Q\,dy\,,$$

in der P und Q Functionen der zwei Variabeln x und y sind, die der Bedingungsgleichung:

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$$

ein Genüge thun. — Um die derselben entsprechende Integralfunction zu finden, und zwar unter Voraussetzung des Bestandhabens der letzten Bedingungsgleichung, betrachten wir einstweilen eine der Variabeln, die Variable y z. B., als eine Constante und integriren dann die vorgelegte Differenzialfunction, welche nach der eben getroffenen Verfügung über y in Pdx übergeht, lediglich nach x.

Stellt u die Integralfunction vor, so kann nach der eben getroffenen Verfügung über y zur Bestimmung derselben folgende Gleichung:

$$\int P dx + Y$$

aufgestellt werden, wo:

$\int Pdx$ das Integrale der Differenzialformel $Pdx$ vorstellt,

falls man die in P etwa vorkommende Größe y constant sein läßt, und die beigefügte Größe Y, die Constante der Integration, von x unabhängig und im Allgemeinen eine Function von y sein wird.

Gelingt es nun Y der eben gefällten Aussage gemäß zu bestimmen, daß wenn auch y variabel erklärt wird, u gleichwohl die Integralfunction der vorgelegten linearen Differenzialfunction verbleibt; dann ist unser Zweck erreicht, nämlich, nicht allein die Möglichkeit einer Integralfunction dargethan, sondern dieselbe sogar dargestellt zu haben.

Zu diesem Ende stellen wir das Differenziale von u unter der Voraussetzung her, x und y sind zugleich variabel, wodurch wir:

$$du = Pdx + \frac{d.\int Pdx}{dy}\,dy + dY$$

erhalten. Vergleicht man dieses Ergebniß für du mit der vorgelegten linearen Differenzialfunction, so stellt sich zur Erreichung unseres eben ausgesprochenen Zieles folgende Bestimmung für das Differenziale von Y heraus:

$$dY = \left\{ Q - \frac{d.\int Pdx}{dy} \right\} dy\ ,$$

wo in dieser, wie in der derselben vorangehenden Gleichung unter

$\frac{d.\int Pdx}{dy}$ der partielle Differenzialquotient von $\int Pdx$

nach y zu verstehen ist, indem das Integrale $\int Pdx$ außer x auch y enthalten kann.

Nach dem Ursprunge der Größe Y darf solche in keinerlei Abhängigkeit zur Variabeln x stehen; diesem nach muß der Differenzialcoefficient in der letzten Gleichung gleichfalls von x unabhängig sein, und wenn derselbe Kürze halber durch $Q'$ dargestellt wird, wo man sonach

$$dY = Q'dy \text{ und } Q' = Q - \frac{d.\int Pdx}{dy}$$

hat: so haben wir zuerst zu begründen, daß $Q'$ in keinerlei Beziehung zu x steht, oder daß $Q'$ keine Function von x ist.

Stellt man zu diesem Behufe den Differenzialquotienten von Q′ nach x her, welches am bequemsten erreicht wird, wenn man zuerst die Q′ darstellende Gleichung, nach Nr. 73 Gleichung (E) des ersten Theiles, wie folgt umstellt:

$$Q' = Q - \int \frac{dP}{dy}\, dx ,$$

so erhält man:

$$\frac{dQ'}{dx} = \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} ,$$

die, vermöge der am Eingange aufgestellten Bedingungsgleichung, in folgende übergeht:

$$\frac{dQ'}{dx} = 0 .$$

Dieses Ergebniß in Verbindung mit dem Fundamentaltheorem in Nr. 16 des ersten Theiles der Differenzialrechnung bieten die verlangte Begründung dar, und man hat nunmehr

$$Y = \int Q'dy ,$$

wo also Y in der That keine Function von x sein wird und lediglich eine Function von y sein kann, die in die obige u darstellende Gleichung gesetzt, letztere als Integralfunction der vorgelegten Differenzialfunction herausstellt.

Alles bisher Mitgetheilte zusammengefaßt, haben wir folgendes Theorem.

Wenn in der linearen Differenzialfunction:

$$Pdx + Qdy \qquad (a)$$

die Coefficienten P und Q der Bedingungsgleichung:

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} \qquad (b)$$

entsprechen; dann hat (a) eine Integralfunction, die, wenn durch u dargestellt, durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$u = \int Pdx + \int Q'dy + \text{Const.} , \qquad (c)$$

wo Q', durch die Gleichung:

$$Q' = Q - \frac{d.\int P dx}{dy} \qquad (d)$$

bestimmt, einen von x independenten Ausdruck vorstellt.

Diesem zufolge reducirt sich die Integration einer linearen Differenzialfunction zweier Variabeln, wenn dieselbe eine Integralfunction gestattet, auf zwei Integrationen zweier Differenzialformeln, deren jede nur eine variable Größe enthält, und da die weitere Behandlung derselben dem ersten Theile der Integralrechnung zufällt; so können wir den vorliegenden Gegenstand, die Integration einer linearen Differenzialfunction mit zweien Variabeln, als dem in vorliegender Abtheilung der Integralrechnung uns gestecktem Endziele zugeführt, d. h., als erlediget erklären.

Wir schließen diese Nr. mit der Bemerkung, daß man statt der Gleichungen (c) und (d) obigen Theorems auch folgende hat:

$$u = \int P' dx + \int Q dy + \text{Const.} , \qquad (c')$$

wo P', durch die Gleichung:

$$P' = P - \frac{d.\int Q dy}{dx} \qquad (d')$$

bestimmt, einen von y independenten Ausdruck vorstellt.

Auf dieses Ergebniß würde man unmittelbar geführt worden sein, wenn gleich im Anfange unsrer Betrachtungen vorliegender Nr., anstatt y, x constant vorausgesetzt worden wäre.

283. Es sei ferner die lineare Differenzialfunction der drei Variabeln x, y und z:

$$P dx + Q dy + R dz ,$$

zur Integration vorgelegt, wo P, Q und R als Functionen von x, y, z folgenden Bedingungsgleichungen entsprechen:

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} , \quad \frac{dR}{dx} = \frac{dP}{dz} , \quad \frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy} .$$

Betrachtet man eine der Variabeln, z. B. z, als Constante, so geht die vorgelegte Differenzialfunction in folgende über:

$$P dx + Q dy ,$$

die, vermöge des in der vorangehenden Nr. Mitgetheilten, beim Eintreffen der ersten dieser drei aufgestellten Bedingungsgleichungen eine Integralfunction nach den Variabeln x und y darbieten wird, in der die willkührliche Constante der Integration die Größe z noch enthalten kann. Stellt man dieselbe durch Z vor, so hat man, wenn durch u diese Integralfunction nach x und y angedeutet wird, bei Zugrundelegung der Gleichung (c) des Theorems vorangehender Nr. die Gleichung:

$$u = \int P dx + \int Q' dy + Z ,$$

wo Q′ aus der Gleichung (d) desselben Theorems entnommen werden kann.

Das Ergebniß der Differenziation von u nach allen dreien Variabeln x, y und z muß, falls dieselbe auch als Integrale der am Eingange vorgelegten Differenzialfunction auftreten soll, diese vorgelegte Differenzialfunction selbst darbieten; und da wegen des Umstandes, daß Q′ unabhängig von x ist, die eben aufgestellte Gleichung folgende Bestimmung für das Differenziale von u darbietet:

$$du = P dx + \frac{d. \int P dx}{dy} dy + \frac{d. \int P dx}{dz} dz + Q' dy + \frac{d. \int Q' dy}{dz} dz + dZ ,$$

welche Gleichung, wenn Q′dy nach Gleichung (d) vorangehender Nr. ersetzt wird, in folgende übergeht:

$$du = P dx + Q dy + \left( \frac{d. \int P dx}{dz} + \frac{d. \int Q' dy}{dz} \right) dz + dZ ;$$

so ergiebt sich durch Vergleichung dieses Ergebnisses mit der vorgelegten Differenzialfunction folgende Bestimmung für dZ:

$$dZ = \left( R - \frac{d. \int P dx}{dz} - \frac{d. \int Q' dy}{dz} \right) dz .$$

Kann nun dargethan werden, es sei der Coefficient von dz in dieser Gleichung von x sowohl, als auch von y unabhängig; dann erhält man nach einer einfachen Integration der Differenzialformel zur Rechten, die nunmehr nur noch z enthalten kann, Z als Func-

tion von z ausgedrückt, welche in die obige u darstellende Gleichung gesetzt, die gesuchte Integralfunction darbieten wird.

Stellt man dieses darzuthun den besagten Differenzialcoefficienten durch R′ vor, setzt man nämlich:

$$R' = R - \frac{d.\int P dx}{dz} - \frac{d.\int Q' dy}{dz},$$

so erhält man, wenn die partiellen Differenzialquotienten von R′ sowohl nach x als nach y hergestellt werden, mit Beachtung des Umstandes, daß Q′ von x unabhängig ist, folgende zwei Gleichungen:

$$\frac{dR'}{dx} = \frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz},$$

$$\frac{dR'}{dy} = \frac{dR}{dy} - \frac{dQ'}{dz} - \frac{d^2\int P dx}{dz dy};$$

die Gleichung (d) vorangehender Nr. giebt aber:

$$\frac{dQ'}{dz} = \frac{dQ}{dz} - \frac{d^2\int P dx}{dy dz},$$

daher gehen die zwei partiellen Differenzialquotienten von R′ über in:

$$\frac{dR'}{dx} = \frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz},$$

$$\frac{dR'}{dy} = \frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz},$$

die, beachtend die zweite und dritte der am Eingange aufgestellten drei Bedingungsgleichungen, in folgende übergehen:

$$\frac{dR'}{dx} = 0 \text{ und } \frac{dR'}{dy} = 0;$$

aus denen nunmehr die Unabhängigkeit des Differenzialcoefficienten R′ von x und y hervorgeht, folglich zur Bestimmung von Z als Function von z die Gleichung:

$$Z = \int R' dz$$

ganz brauchbar erkannt wird.

Die Ergebnisse vorliegender Nr. zusammengefaßt, stellt sich folgendes Theorem begründet heraus.

Wenn in der linearen Differenzialfunction:

$$Pdx + Qdy + Rdz \qquad (a)$$

die Coefficienten P, Q und R, als Functionen von x, y und z, den folgenden Bedingungsgleichungen nachkommen:

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}, \quad \frac{dR}{dx} = \frac{dP}{dz}, \quad \frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}; \qquad (b)$$

so läßt dieselbe eine von x, y und z abhängige Integralfunction zu, die folgende Gleichung darstellt:

$$u = \int Pdx + \int Q'dy + \int R'dz + \text{Const.} \; . \qquad (c)$$

Die erste Integration ist hier nur auf x, die zweite nur auf y und die dritte lediglich auf z bezogen; ferner hängen die Coefficienten Q′ und R′ in folgender Weise von P, Q und R ab:

$$\left.\begin{aligned} Q' &= Q - \frac{d.\int Pdx}{dy}, \\ R' &= R - \frac{d.\int Pdx}{dz} - \frac{d.\int Q'dy}{dz}, \end{aligned}\right\} \qquad (d)$$

wo Q′ unabhängig von x, und R′ von x sowohl als von y unabhängig ist.

Außer der Gleichung (c) kann man fünf analoge zu derselben, die u angeben, aufstellen; so daß u eben so vieler Darstellungsformen fähig ist, als die drei Variabeln x, y, z sich versetzen lassen.

Nur eine dieser analogen zu (c) theilen wir hier noch mit, aus der die Angabe der übrigen leicht zu entnehmen sein dürfte.

Diese ist:

$$u = \int P''dx + \int Qdy + \int R''dz + \text{Const.} \; . \qquad (c')$$

Die erste Integration bezieht sich hier lediglich auf x, die zweite nur auf y, die dritte endlich bloß auf z; die Coefficienten P″ und R″ hängen in folgender Weise von den Coefficienten P, Q und R der vorgelegten Differenzialfunction (a) ab:

$$\left.\begin{aligned} P'' &= P - \frac{d.\int Qdy}{dx}, \\ R'' &= R - \frac{d.\int Qdy}{dz} - \frac{d.\int P''dx}{dz}, \end{aligned}\right\} \qquad (d')$$

wo, beim Statthaben der Bedingungsgleichungen (b), $P''$ unabhängig von y, $R''$ aber von y sowohl als von x unabhängig sein wird.

284. Bevor wir zum allgemeinen Falle von n Variabeln übergehen, wollen wir noch die lineare Differenzialfunction mit den vier Variabeln $x_1$, $x_2$, $x_3$ und $x_4$ einer etwas ausführlichen Erörterung unterziehen.

Stellt man dieselbe durch:

$$H_1dx_1 + H_2dx_2 + H_3dx_3 + H_4dx_4$$

vor, wo jeder der Coefficienten $H_1$, $H_2$, $H_3$, $H_4$ von sämmtlichen vier Variabeln abhängen kann; so werden wir zeigen, wie von der Annahme des Statthabens folgender sechs Bedingungsgleichungen:

$$\frac{dH_1}{dx_2} = \frac{dH_2}{dx_1}, \quad \frac{dH_3}{dx_1} = \frac{dH_1}{dx_3}, \quad \frac{dH_2}{dx_3} = \frac{dH_3}{dx_2},$$
$$\frac{dH_1}{dx_4} = \frac{dH_4}{dx_1}, \quad \frac{dH_2}{dx_4} = \frac{dH_4}{dx_2}, \quad \frac{dH_3}{dx_4} = \frac{dH_4}{dx_3}$$

ausgehend, die Darstellbarkeit der Integralfunction der vorgelegten Differenzialfunction ohne weiters erkannt wird.

Erklärt man einstweilen eine der vier Variabeln, z. B. $x_4$, als Constante; so ist unter Zuziehung der drei ersten dieser sechs Bedingungsgleichungen, vermöge des in vorangehender Nr. aufgestellten Theorems, die Differenzialfunction:

$$H_1dx_1 + H_2dx_2 + H_3dx_3$$

einer Integralfunction fähig.

Berücksichtiget man nämlich die Gleichungen (c) und (d) besagter Nr., so stellt der Ausdruck:

$$\int H_1dx_1 + \int H'_2dx_2 + \int H'_3dx_3 + \text{Const.}$$

diese Integralfunction vor, wobei der Kürze wegen:

$$H'_2 = H_2 - \frac{d.\int H_1dx_1}{dx_2},$$
$$H'_3 = H_3 - \frac{d.\int H_1dx_1}{dx_3} - \frac{d.\int H'_2dx_2}{dx_3}$$

gesetzt wurde, und wo die willkührliche Constante der Integration die bis jetzt als Constante behandelte Variable $x_4$ impliciren kann.

Dieses Resultat besteht, wie schon erwähnt wurde, unter der Voraussetzung des Statthabens der drei erstern der am Eingange aufgestellten sechs Bedingungsgleichungen; die drei noch unbenutzt gelassenen dieser Bedingungsgleichungen werden wir nun dazu verbrauchen, auch wenn $x_4$ den Charakter der Variabilität beibehält, das Integrale der vorgelegten Differenzialfunction herzustellen.

Stellt man durch u diese verlangte Integralfunction vor, und setzt:

$$u = \int H_1 dx_1 + \int H'_2 dx_2 + \int H'_3 dx_3 + K,$$

wo K eine noch unbestimmte Function von $x_4$ bedeutet; so haben wir diese der Art zu bestimmen, daß der Ausdruck zur Rechten vom Gleichheitszeichen, als Intregrale der vorgelegten Differenzialfunction erkannt werde.

Stellt man das totale Differenziale von u dieser Gleichung nach sämmtlichen Variabeln $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ her und bedenkt hierbei, daß

$H'_2$ von $x_1$ unabhängig, dann daß

$H'_3$ sowohl von $x_1$ als auch von $x_2$ unabhängig ist;

so erhält man:

$$\begin{aligned} du = {} & H_1 dx_1 + \frac{d.\int H_1 dx_1}{dx_2} dx_2 + \frac{d.\int H_1 dx_1}{dx_3} dx_3 + \frac{d.\int H_1 dx_1}{dx_4} dx_4 \\ & + H'_2 dx_2 + \frac{d.\int H'_2 dx_2}{dx_3} dx_3 + \frac{d.\int H'_2 dx_2}{dx_4} dx_4 \\ & + H'_3 dx_3 + \frac{d.\int H'_3 dx_3}{dx_4} dx_4 \\ & + dK, \end{aligned}$$

oder auch, wenn die ersten Glieder auf der zweiten und dritten Zeile dieser Gleichung durch die für $H'_2$ und $H'_3$ aufgestellten Werthe umgesetzt werden,

$$\begin{aligned} du = {} & H_1 dx_1 + \frac{d.\int H_1 dx_1}{dx_2} dx_2 + \frac{d.\int H_1 dx_1}{dx_3} dx_3 + \frac{d.\int H_1 dx_1}{dx_4} dx_4 \\ & + H_2 dx_2 - \frac{d.\int H_1 dx_1}{dx_2} dx_2 + \frac{d.\int H'_2 dx_2}{dx_3} dx_3 + \frac{d.\int H'_2 dx_2}{dx_4} dx_4 \\ & + H_3 dx_3 - \frac{d.\int H_1 dx_1}{dx_3} dx_3 - \frac{d.\int H'_2 dx_2}{dx_3} dx_3 + \frac{d.\int H'_3 dx_3}{dx_4} dx_4 \\ & + dK, \end{aligned}$$

aus der endlich die folgende:

$$du = H_1 dx_1 + H_2 dx_2 + H_3 dx_3 + \left\{ \frac{d. \int H_1 dx_1}{dx_4} + \frac{d. \int H'_2 dx_2}{dx_4} + \frac{d. \int H'_3 dx_3}{dx_4} \right\} dx_4 + dK$$

gezogen wird.

Dem oben Gesagten gemäß soll der Ausdruck zur Rechten dieser Gleichung genau die vorgelegte Differenzialfunction geben; daher ergiebt sich, wenn

$$H'_4 = H_4 - \frac{d. \int H_1 dx_1}{dx_4} - \frac{d. \int H'_2 dx_2}{dx_4} - \frac{d. \int H'_3 dx_3}{dx_4}$$

gesetzt wird, folgende Gleichung zur Bestimmung von K:

$$dK = H'_4 dx_4 ,$$

so daß wenn wir darthun, der Differenzialcoefficient $H'_4$ in dieser Gleichung ist von $x_1$, $x_2$ und $x_3$ unabhängig, dann gelangen wir auch nach vollzogener Integration der Differenzialformel zur Rechten nach der einzigen Variabeln $x_4$ zur Bestimmung von K, und mithin auch zu der von u.

Dieses darzuthun stellen wir die partiellen Differenzialquotienten von $H'_4$ nach jeder der drei Variabeln $x_1$, $x_2$ und $x_3$ her. Bedenken wir hierbei die oben gemachte Aussage über $H'_2$ und $H'_3$, daß nämlich erstere von $x_1$, und letztere von $x_1$ sowohl als von $x_2$ independent sei; so erhalten wir die Gleichungen:

$$\frac{dH'_4}{dx_1} = \frac{dH_4}{dx_1} - \frac{dH_1}{dx_4} ,$$

$$\frac{dH'_4}{dx_2} = \frac{dH_4}{dx_2} - \frac{d^2 \int H_1 dx_1}{dx_4 dx_2} - \frac{dH'_2}{dx_4} ,$$

$$\frac{dH'_4}{dx_3} = \frac{dH_4}{dx_3} - \frac{d^2 \int H_1 dx_1}{dx_4 dx_3} - \frac{d^2 \int H'_2 dx_2}{dx_4 dx_3} - \frac{dH'_3}{dx_4} ,$$

die, mit Beachtung der Gleichungen:

$$\frac{dH'_2}{dx_4} = \frac{dH_2}{dx_4} - \frac{d^2 \int H_1 dx_1}{dx_2 dx_4} ,$$

$$\frac{dH'_3}{dx_4} = \frac{dH_3}{dx_4} - \frac{d^2 \int H_1 dx_1}{dx_3 dx_4} - \frac{d^2 \int H'_2 dx_2}{dx_3 dx_4} ,$$

in folgende übergehen:

$$\frac{dH'_4}{dx_1} = \frac{dH_4}{dx_1} - \frac{dH_1}{dx_4},$$
$$\frac{dH'_4}{dx_2} = \frac{dH_4}{dx_2} - \frac{dH_2}{dx_4},$$
$$\frac{dH'_4}{dx_3} = \frac{dH_4}{dx_3} - \frac{dH_3}{dx_4};$$

aus denen, mit Zuziehung der drei letzten der am Eingange aufgestellten sechs Bedingungsgleichungen,

$$\frac{dH'_4}{dx_1} = 0, \quad \frac{dH'_4}{dx_2} = 0, \quad \frac{dH'_4}{dx_3} = 0$$

gefolgert wird. Vermöge dieser drei Gleichungen sind wir mit Zuziehung des Fundamentaltheorems der Differenzialrechnung Nr. 16 die Function $H'_4$, als unabhängig von $x_1$, $x_2$ und $x_3$ zu erklären berechtiget; so daß die Gleichung:

$$K = \int H'_4 dx_4,$$

eine völlig bestimmte Function von $x_4$ für K darbieten wird.

Wenn die Ergebnisse dieser Nr. zusammengefaßt werden, stellt sich folgendes Theorem als begründet heraus.

Die lineare Differenzialfunction:

$$H_1dx_1 + H_2dx_2 + H_3dx_3 + H_4dx_4, \qquad (a)$$

in der die Coefficienten

$$H_1, H_2, H_3, H_4,$$

als Functionen von $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, den Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dH_1}{dx_2} = \frac{dH_2}{dx_1}, \quad \frac{dH_1}{dx_3} = \frac{dH_3}{dx_1}, \quad \frac{dH_1}{dx_4} = \frac{dH_4}{dx_1}, \\ &\frac{dH_2}{dx_3} = \frac{dH_3}{dx_2}, \quad \frac{dH_2}{dx_4} = \frac{dH_4}{dx_2}, \\ &\frac{dH_3}{dx_4} = \frac{dH_4}{dx_3} \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

nachkommen, bietet folgende Integralfunction:

$$u = \int H_1dx_1 + \int H'_2dx_2 + \int H'_3dx_3 + \int H'_4dx_4 + \text{Const.} \qquad (c)$$

dar, wo man:

$$\left.\begin{aligned} H'_2 &= H_2 - \frac{d.\int H_1 dx_1}{dx_2}, \\ H'_3 &= H_3 - \frac{d.\int H_1 dx_1}{dx_3} - \frac{d.\int H'_2 dx_2}{dx_3}, \\ H'_4 &= H_4 - \frac{d.\int H_1 dx_1}{dx_4} - \frac{d.\int H'_2 dx_2}{dx_4} - \frac{d.\int H'_3 dx_3}{dx_4} \end{aligned}\right\} \quad (d)$$

gesetzt hat.

In der Gleichung (c) dieses Theorems ist jede der vier noch auszuführenden Integrationsoperationen auf die Variable jedesmal zu beziehen, deren Differenziale beigesetzt ist; die übrigen Variabeln werden dann während dieser Integrationsoperation, als Constante behandelt. Eben so fließt aus den Ergebnissen dieser und der beiden vorangehenden Nrn., daß $H'_2$ unabhängig von $x_1$, $H'_3$ unabhängig von $x_1$ und $x_2$, $H'_4$ endlich von $x_1$, $x_2$ und $x_3$ unabhängig sei.

285. Der in der vorangehenden Nr. befolgte Weg und die daselbst gewonnenen Ergebnisse machen es unnöthig, die Integration einer linearen Differenzialfunction mit mehr denn vier Variabeln einer ausführlichen Erörterung besonders zu unterziehen. Die dort aufgestellten Gleichungen (b), (c) und (d) zeigen auf unzweideutige Weise das Bildungsgesetz auch für den Fall an, wenn man mit einer linearen Differenzialfunction von n Variabeln zu thun hat, die einer Integralfunction fähig ist.

In der allgemein bekannten Weise wie Folgerungen, auf Inductionen gestützt, absolute Gültigkeit erlangen können, haben wir folgendes allgemeine Endergebniß erwahret.

Wenn in der linearen Differenzialfunction:

$$H_1 dx_1 + H_2 dx_2 + H_3 dx_3 + \ldots + H_n dx_n, \quad (I)$$

die Coefficienten der Differenzialien den in Nr. 281 aufgestellten Bedingungsgleichungen entsprechen; so hat dieselbe eine Integralfunction u, die folgende Gleichung darstellt:

$$u = \int H_1 dx_1 + \int H'_2 dx_2 + \int H'_3 dx_3 + \ldots + \int H'_n dx_n + \text{Const.}, \quad (II)$$

in der die n auszuführenden Integrationsoperationen der Reihe nach auf die einzelnen Variabeln $x_1$, $x_2$, $x_3$, ... $x_n$ sich erstrecken, so daß man n Integrationen von n Differenzialformeln, deren jede nur auf eine Variable bezogen ist, auszuführen hat.

Endlich hat man zur Bestimmung der Coefficienten:

$$H'_2,\ H'_3,\ H'_4,\ \ldots\ H'_n\ ,$$

folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
H'_2 &= H_2 - \frac{d.\int H_1 dx_1}{dx_2}\ ,\\
H'_3 &= H_3 - \frac{d.\int H_1 dx_1}{dx_3} - \frac{d.\int H'_2 dx_2}{dx_3}\ ,\\
H'_4 &= H_4 - \frac{d.\int H_1 dx_1}{dx_4} - \frac{d.\int H'_2 dx_2}{dx_4} - \frac{d.\int H'_3 dx_3}{dx_4}\ ,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
H'_n &= H_n - \frac{d.\int H_1 dx_1}{dx_n} - \frac{d.\int H'_2 dx_2}{dx_n} - \frac{d.\int H'_3 dx_3}{dx_n} - \ldots - \frac{d.\int H'_{n-1} dx_{n-1}}{dx_n}\ ,
\end{aligned}\right\}\ (III)$$

wo $H'_2$ von $x_1$, $H'_3$ von $x_1$ und $x_2$, $H'_4$ von $x_1$, $x_2$ und $x_3$, und endlich $H'_n$ von $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots . x_{n-1}$ unabhängig ist.

Zum Schlusse noch die Bemerkung, die Integralfunction u gestattet eben so viel Darstellungsformen, als die n Variabeln:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_n\ ,$$

sich versetzen oder permutiren lassen.

Zur Erhöhung der Deutlichkeit fügen wir einen dieser, von (II) verschiedenen Formenwerthe der Integralfunction u bei:

$$u = \int H_3 dx_3 + \int H''_1 dx_1 + \int H''_2 dx_2 + \int H''_4 dx_4 + \ldots + \int H''_n dx_n + \text{Const.},$$

wo man folgende abkürzende Bezeichnung festgestellt hat:

$$\left.\begin{aligned}
H''_1 &= H_1 - \frac{d.\int H_3 dx_3}{dx_1}\ ,\\
H''_2 &= H_2 - \frac{d.\int H_3 dx_3}{dx_2} - \frac{d.\int H''_1 dx_1}{dx_2}\ ,\\
H''_4 &= H_4 - \frac{d.\int H_3 dx_3}{dx_4} - \frac{d.\int H''_1 dx_1}{dx_4} - \frac{d.\int H''_2 dx_2}{dx_4}\ ,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
H''_n &= H_n - \frac{d.\int H_3 dx_3}{dx_n} - \frac{d.\int H''_1 dx_1}{dx_n} - \frac{d.\int H''_2 dx_2}{dx_n} - \ldots - \frac{d.\int H''_{n-1} dx_{n-1}}{dx_n}\ .
\end{aligned}\right\}$$

286. Wenn gleich aus den vorangehenden Nrn. zur Genüge hervorgeht, daß die Integration einer linearen Differenzialfunction mehrerer Variabeln, wenn solche zu den Möglichkeiten gehört, auf

Quadraturen, d. h. auf Integrationen von Differenzialformeln einer Variabeln zurück zu bringen möglich sei; daß sonach, vom theoretischen Standpunkte aus, der vorliegende Theil der Integralrechnung, als seinem Endziele zugeführt angesehen werden kann: erachten wir gleichwohl nicht ganz nutzlos, auch Einiges von den Methoden oder Verfahrungsweisen noch mitzutheilen, die zwar nur in einzelnen besondern Fällen Anwendung finden, dafür aber dann auch schneller, als die allgemeinen Vorschriften zu einem Endziele führen.

So erleichtert man nicht selten die Operation des Integrirens dadurch, daß man statt der ursprünglichen Variabeln Functionen neuer einführt, worin das Wesen des Integrirens „nach der Methode des Zurückführens auf dem Wege der Substitution“ besteht. Welche Vortheile diese Methode gewährt, haben wir im ersten Theile der Integralrechnung zu zeigen gar oftmals die Gelegenheit benutzt; daß dieselbe auch bei der Integration linearer Differenzialfunctionen mehrerer Variabeln mit Erfolg benutzt werden kann, dieses werden die in der folgenden Nr. zu behandelnden besondern Fälle ganz augenfällig darthun.

287. Wir legen uns zuerst die lineare Differenzialfunction:

$$\frac{ydx - xdy}{y^2 + x^2}$$

zur Umformung vor.

Setzt man hier

$$y = r\mathrm{Sin}.u \text{ und } x = r\mathrm{Cos}.u\,,$$

wo r und u zwei neue Variabeln sind, so erhält man, wegen:

$$dy = \mathrm{Sin}.u\,dr + r\mathrm{Cos}.u\,du\,,$$
$$dx = \mathrm{Cos}.u\,dr - r\mathrm{Sin}.u\,du\,,$$

die Gleichung:

$$ydx - xdy = -r^2\,du\,,$$

und da man auch

$$y^2 + x^2 = r^2$$

hat; so ergiebt sich:

$$\frac{ydx - xdy}{y^2 + x^2} = -du\,.$$

Es reducirt sich diesem nach die Integration der vorgelegten Differenzialfunction zweier Variabeln auf die Integration der ein-

fachsten aller Differenzialformeln, nämlich auf die Integration von du; daher hat man, beachtend die Gleichung:

$$\text{Arctang.}\frac{y}{x} + \text{Arctang.}\frac{x}{y} = \frac{\pi}{2},$$

folgende Integralbestimmung:

$$\int \frac{ydx - xdy}{y^2 + x^2} = \text{Arctang.}\frac{x}{y} + \text{Const.}$$

Ein zweiter besonderer Fall sei folgender:

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{dy}{y}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\text{*)}$$

Werden hier die Variabeln x und y in gleicher Weise wie im vorhergehenden Falle durch r und u ersetzt, so erhält man:

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{dy}{y}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = -\frac{\text{Sin.}\frac{u}{2}}{\text{Cos.}\frac{u}{2}}du + \frac{dr}{r};$$

also reducirt sich hier die Integration auf die zweier Differenzialformeln, deren jede nur eine Variable enthält. Da das Ergebniß der Integration des Differenzialausdruckes rechterhand folgender Ausdruck darstellt:

$$2\,\text{log. Cos.}\frac{u}{2} + \text{log.r}, \text{ oder } \text{log.r}\left(\text{Cos.}\frac{u}{2}\right)^2,$$

oder auch:

$$\text{log.r}(1 + \text{Cos.u}) + \text{Const.};$$

so hat man nach Restitution der Werthe von r und u:

$$\int\left\{\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{dy}{y}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right\} = \text{log.}\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right) + \text{Const.}$$

Noch folgenden besondern Fall:

$$\frac{y^2dx + x^2dy}{a(x+y)xy + bx^2y^2},$$

*) Besondere Fälle linearer Differenzialfunctionen mehrerer Variabeln, die den Bedingungen der Integrabilität entsprechen, sind sehr bald hergestellt, indem man in irgend einer Differenzialfunction einer Variabeln statt dieser irgend eine Function mehrerer Variabeln setzt.

wollen wir durch Einführung zwei neuer Variabeln auf eine lineare Differenzialfunction zurückführen, deren Integrale unmittelbar in die Augen fällt.

Wird nämlich:

$$x = \frac{1}{u} \text{ und } y = \frac{1}{v}$$

angenommen, wo also u und v die neuen Variabeln sind, so hat man:

$$\frac{y^2dx + x^2dy}{a(x+y)xy + b\,x^2y^2} = -\frac{du + dv}{b + a(u+v)};$$

der Ausdruck zur Rechten wird sofort als das Differenziale von:

$$-\frac{1}{a} \log. \{ b + a(u+v) \}$$

erkannt, der nach Restitution der Werthe von u und v in:

$$\frac{1}{a} \log. \frac{xy}{a(x+y) + b\,xy}$$

übergeht; daher hat man:

$$\int \frac{y^2dx + x^2dy}{a(x+y)xy + b\,x^2y^2} = \frac{1}{a} \log. \frac{xy}{a(x+y) + b\,xy} + \text{Const.}$$

Nach der Ableitungsmethode (Integralrechnung II, Nr. 41), die, wie aus dem ersten Theile aus mehrern Stellen hervorgeht, nur die entgegengesetzte der Substitutionsmethode ist, ließe sich aus den eben behandelten drei besondern Fällen die Integralfunction von so mancher linearen Differenzialfunction herstellen; berücksichtigend jedoch, daß hierbei nichts Neues zu zeigen ist, unterlassen wir solches und machen uns in den folgenden Nrn. daran, einige Bemerkungen, die diese beide Integrationsverfahren betreffen, mitzutheilen und zu erörtern.

288. Zuerst drängt sich die Frage auf, ob nicht eine lineare Differenzialfunction mehrerer Variabeln durch's Einführen neuer Variabeln, wie in der vorangehenden Nr. geschah, eine Aenderung in Bezug auf den Integrabilitätszustand erfahren kann; d. h., wenn dieselbe ursprünglich den Bedingungen der Integrabilität entsprochen, ob dieselbe nachher gleichfalls noch den zur Integrabilität unerläßlichen Bedingungsgleichungen nachkömmt; und umgekehrt? — Die

in der vorangeschickten Nr. behandelten besondern Fälle geben der sofort zu begründenden Vermuthung Raum, daß wenn die Anzahl der Variabeln in der transformirten Differenzialformel der in der ursprünglich vorgelegten gleich kömmt, daß dann von der einen auf der andern sowohl in Beziehung auf Integrabilität, als auf Nicht-integrabilität geschlossen werden darf.

In der Mittheilung des Beweises dieser Behauptung beschränken wir uns jedoch auf den allgemeinsten Fall einer linearen Differenzialfunction zweier Variabeln.

Hat man nämlich die Differenzialfunction:

$$Pdx + Qdy\,, \qquad (\alpha)$$

wo P und Q Functionen von x und y sind, und führt man statt x und y die zwei neuen Variabeln x′ und y′ ein, so daß:

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{dx}{dx'}\,dx' + \frac{dx}{dy'}\,dy'\,, \\ dy &= \frac{dy}{dx'}\,dx' + \frac{dy}{dy'}\,dy'\,, \end{aligned}\right\} \qquad (\beta)$$

erhalten wird; dann geht die vorgelegte Differenzialfunction über in:

$$P'dx' + Q'dy'\,, \qquad (\alpha')$$

wo der Kürze wegen:

$$P' = P\,\frac{dx}{dx'} + Q\,\frac{dy}{dx'}\,,$$

$$Q' = P\,\frac{dx}{dy'} + Q\,\frac{dy}{dy'}\,,$$

gesetzt wurde.

Wird die erste dieser Gleichungen partiell nach y′ und die zweite in gleicher Weise nach x′ differenzirt, jedoch so, daß x und y als Functionen von x′, y′ gedacht sind; so erhält man nach vollzogener Subtraktion der Ergebnisse folgende Gleichheit:

$$\frac{dP'}{dy'} - \frac{dQ'}{dx'} = \left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dx'}\,\frac{dy}{dy'} - \frac{dx}{dy'}\,\frac{dy}{dx'}\right),$$

oder, wenn der Kürze wegen:

$$\Delta = \frac{dx}{dx'}\,\frac{dy}{dy'} - \frac{dx}{dy'}\,\frac{dy}{dx'} \qquad (\gamma)$$

gesetzt wird, die folgende:

$$\frac{dP'}{dy'} - \frac{dQ'}{dx'} = \left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right)\Delta . \qquad (\delta)$$

Vorausgesetzt nun, was wir in der folgenden Nr. nachweisen werden, der Ausdruck für $\Delta$ ist weder unendlich groß noch der Null gleich, so hat man beim Statthaben der Gleichheit:

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$$

auch folgende:

$$\frac{dP'}{dy'} = \frac{dQ'}{dx'};$$

und wenn man

$$\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} \gtrless 0$$

hat, dann ist auch, wie die obige Gleichheit $(\delta)$ zeigt,

$$\frac{dP'}{dy'} - \frac{dQ'}{dx'} \gtrless 0 ,$$

d. h., die linearen Differenzialfunctionen $(\alpha)$ und $(\alpha')$ sind zugleich integrabel und zugleich nichtintegrabel, w. z. b. w.

289. Um die in vorangehender Nr. gemachte Aussage über die Beschaffenheit des Ausdruckes für $\Delta$ aus Gleichung $(\delta)$ nachzuweisen, bemerken wir vorerst, daß, unter der Voraussetzung die Variabeln y und x stehen in keinerlei gegenseitiger Abhängigkeit, die Gleichungen, so y und x als Functionen von y', x' darstellen, auch umgekehrt jede der letztern durch die ersteren angeben; daß sonach auch y' und x' keinerlei gegenseitige Beziehung eingehen werden.

Dieses vorausgesetzt, hat man folgende zwei Gleichungen:

$$\frac{dx'}{dy'} = 0 \text{ und } \frac{dx'}{dx'} = 1 ;$$

ferner hat man, wenn x' als Function von x und y gedacht wird, folgende zwei Gleichungen:

$$\frac{dx'}{dy'} = \frac{dx'}{dx}\,\frac{dx}{dy'} + \frac{dx'}{dy}\,\frac{dy}{dy'} ,$$

$$\frac{dx'}{dx'} = \frac{dx'}{dx}\,\frac{dx}{dx'} + \frac{dx'}{dy}\,\frac{dy}{dx'} ,$$

sonach hat man auch:

$$\frac{dx'}{dx}\frac{dx}{dy'} + \frac{dx'}{dy}\frac{dy}{dy'} = 0 ,$$

$$\frac{dx'}{dx}\frac{dx}{dx'} + \frac{dx'}{dy}\frac{dy}{dx'} = 1 ;$$

aus denen:

$$\frac{dx'}{dx}\left(\frac{dx}{dx'}\frac{dy}{dy'} - \frac{dx}{dy'}\frac{dy}{dx'}\right) = \frac{dy}{dy'} ,$$

oder beachtend die Bedeutung von $\triangle$, die folgende gezogen wird:

$$\frac{dx'}{dx}\triangle = \frac{dy}{dy'} . \qquad (\gamma')$$

Mittelst dieser Gleichung nun sind wir nachzuweisen im Stande, daß $\triangle$ weder eine unendlich kleinwerdende noch eine unendlich großwerdende Größe vorstellt.

Da wir y als Function von $x'$ und $y'$ in dieser und der vorangehenden Nr. vorausgesetzt haben und $\frac{dy}{dy'}$ den Differenzialquotienten dieser Function nach $y'$ vorstellt; so kann letzterer nach dem Fundamentaltheorem der Differenzialrechnung Nr. 16, wenn über $y'$ nicht besonders verfügt wird, weder unendlich klein- noch unendlich großwerdend sein. Da ferner, wie am Eingange dieser Nr. erwähnt wurde, $x'$ nunmehr eine Function von x und y sein muß; so kann aus gleichem Grunde der Differenzialquotient dieser Function nach x, nämlich der Ausdruck $\frac{dx'}{dx}$, wenn nicht über x eigens verfügt wird, weder eine unendlich klein- noch eine unendlich großwerdende Größe vorstellen. Durch Zusammenstellung endlich dieser beiden Folgerungen entnehmen wir aus der Gleichung $(\gamma')$ zum deutlichsten die Richtigkeit unserer vorigen Behauptung, daß nämlich der Ausdruck für $\triangle$ in Gleichung $(\gamma)$ vorangehender Nr. weder unendlich klein noch unendlich groß sei, wie wir solches nachzuweisen uns vorgesetzt.

290. Erklären wir nunmehr den in Nr. 288 angeregten Gegenstand in dem Falle erlediget, wenn die transformirte und ursprüngliche Differenzialfunction gleichviel variable Größen enthalten; so daß alsdann beide zugleich entweder integrabel oder nicht-

integrabel sind: dann fällt uns nicht mehr schwer ganz dasselbe auch in dem Falle darzuthun, wenn die transformirte lineare Differenzialfunction eine größere Anzahl von Variabeln, als die vorgelegte enthält.

Wenn erstens die vorgelegte lineare Differenzialfunction, die wir von der Form:

$$Pdx + Qdy + Rdz + \ldots \qquad (a)$$

voraussetzen, eine von x, y, z, . . . dependirende Function, als Integrale hat, wenn man nämlich:

$$d.\,\varphi(x, y, z, \ldots) = Pdx + Qdy + Rdz + \ldots. \qquad (b)$$

hat, wo also durch $\varphi(x, y, z, ..)$ die eben erwähnte Integralfunction vorgestellt ist; dann besteht letztere Gleichung, als Gleichheit, d. h. jede der Variabeln x, y, z, . . dieser Gleichheit kann durch jedwede Function irgend welcher Anzahl neuer Variabeln ersetzt werden. — Dieses zugegeben, zeigt der Ausdruck zur Linken dieser Gleichheit, daß wenn die vorgelegte Differenzialfunction (a) eine Integralfunction hat, auch die durch Einführung neuer Variabeln gewonnene, wenn gleich letztere mehr Variable als (a) selbst umfaßt, eine Integralfunction zulassen wird; und zwar wird diese Integralfunction durch:

$$\chi(x, y, z, \ldots)$$

vorgestellt sein, wenn man hier statt x, y, z, . . . der Reihe nach dieselben Functionen der neu eingeführten Variabeln setzt, die man in (a) zur Erzeugung der transformirten aus derselben eingeführt hat.

Gestattet aber zweitens die lineare Differenzialfunction in (a) keine Integralfunction, so wird auch die durch Transformation derselben gewonnene, falls solche mehr Variabeln enthält, keine Integralfunction zulassen; dieses jedoch unter der Voraussetzung, daß durch's Einführen der neuen Variabeln keinerlei gegenseitige Abhängigkeit unter den ursprünglichen Variabeln hervorgerufen wird.

Letztere Behauptung zu rechtfertigen, lassen wir in der transformirten gerade so viel Variable constant werden, daß die Anzahl der noch übrigen Variabeln der in der vorgelegten (a) gleich komme. Alsdann wird die transformirte, vermöge des am Eingange Mitgetheilten,

keine Integralfunction zulassen; indem der gegenwärtigen Annahme zufolge auch die vorgelegte (a) keine Integralfunction zuläßt, und beide Differenzialfunctionen gleichviel von einander unabhängige Variabeln enthalten. Um so mehr sind wir zu derselben Behauptung berechtiget, wenn die constant erklärten Variabeln wieder den Charakter der Variabilität annehmen. Denn durch das Hinzutreten neuer Glieder, die von den variabel erklärten Constanten (die aber ursprünglich auch variabel waren) herrühren, wird dem Mißstande, daß gewisse Bedingungsgleichungen nicht in Erfüllung gehen, nicht nur nicht vorgebeugt, vielmehr treten noch neue Bedingungsgleichungen hinzu, die im allergünstigsten Falle diese nichtrealisirten Bedingungsgleichungen nicht um einige vermehren, dieselben jedoch aber niemals der Anzahl nach verringern werden, woraus die Richtigkeit obiger Aussage ohne weiteres gefolgert wird.

Beachtend nun dieses und das in Nr. 288 gewonnene Ergebniß stellt sich folgender Satz als begründet heraus:

Wenn aus einer linearen Differenzialfunction mehrerer Variabeln durch's Umsetzen dieser in Functionen neuer Variabeln, die jedoch erstere in keinerlei gegenseitige Abhängigkeit versetzen, eine neue lineare Differenzialfunction von eben so viel oder von noch mehr Variabeln, hervorgerufen wird; dann sind beide zugleich integrabel oder zugleich nichtintegrabel.

291. Die Vollständigkeit verlangt endlich, daß wir etwelche Aufmerksamkeit auch dem Falle zuwenden, wenn die Zahl der von einander unabhängigen Variabeln in der transformirten geringer, als in der vorgelegten linearen Differenzialfunction ist; welcher Fall offenbar dann eintreten kann, wenn unter den ursprünglich gegenseitig independenten Variabeln der vorgelegten Differenzialfunction irgend ein Zusammenhang eingeführt wird.

Da dieser Fall nur insofern von analytischem Interesse sein kann, als die vorgelegte lineare Differenzialfunction den Bedingungen der Integrabilität nicht entspricht; so gehen wir auch lediglich von dieser Annahme aus. Wir bemerken aber im voraus, daß uns gegenwärtig nur darum zu thun sei, die Möglichkeit nachzuweisen, daß beim Umsetzen einer solchen Differenzialfunction in eine ähnliche von



Bayerische Staatsbibliothek München

einer geringern Anzahl Variabeln, eine integrable Differenzialfunction allerdings erzielt werden kann.

Wenn in der linearen Differenzialfunction der drei Variabeln x, y und z:

$$Pdx + Qdy + Rdz,$$

die Coefficienten P, Q, und R, als Functionen von x, y, z einer, zweien oder allen dreien der folgenden drei Ungleichheiten entsprechen:

$$\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} \gtrless 0, \quad \frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} \gtrless 0, \quad \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} \gtrless 0,$$

in welchem Falle die Differenzialfunction keine Integralfunction der von einander unabhängig gedachten Variabeln x, y, z zuläßt; dann wird solche, durch's Umsetzen derselben in eine mit einer Variabeln, sofort integrabel gemacht.

Stellt man durch u eine neue Variable vor, und ersetzt x, y und z durch beliebige Functionen dieser Variabeln; oder, was auf das gleiche hinausläuft, ersetzt man die Variabeln y und z durch beliebige Functionen von x: dann geht die vorgelegte Differenzialfunction der drei Variabeln x, y und z in eine Differenzialfunction einer Variabeln, der Form:

$$\varphi(x)dx$$

über, welche, nach der Methode der Quadraturen, ohne irgend welcher Bedingungsgleichung zu unterliegen, als integrirbar jedesmal vorausgesetzt werden darf.

Wir gehen aber noch einen Schritt weiter und behaupten, daß man dieselbe Differenzialfunction der drei Variabeln auch in eine ähnliche mit zwei von einander unabhängigen Variabeln umsetzen kann, die nach diesen Variabeln integrirbar, wenn gleich die vorgelegte nach den primitiven drei Variabeln es nicht ist.

Dieses zu zeigen, stellen wir, statt die drei Variabeln x, y und z durch Functionen von zwei neuen Variabeln zu ersetzen, unter den primitiven Variabeln selbst, unter x, y und z, eine Relation fest. Wenn aus dieser Relation eine der Variabeln, z. B. z, als Function der beiden andern ausgedrückt und in die vorgelegte Differenzialfunction gesetzt gedacht wird, dann nimmt solche folgende Form an:

Bayerische Staatsbibliothek München

$$P'dx + Q'dy ,$$

wo man der Kürze wegen:

$$P' = P + R\frac{dz}{dx} \text{ und } Q' = Q + R\frac{dz}{dy}$$

gesetzt hat, und wo:

$$\frac{dz}{dx} \text{ und } \frac{dz}{dy} ,$$

die aus der angenommenen Relation zwischen x, y, z gefolgerten partiellen Differenzialquotienten von z nach x und von z nach y vorstellen.

Damit diese lineare Differenzialfunction der zwei Variabeln x und y eine Integralfunction zulasse, wenn auch x und y gegenseitig völlig unabhängig verbleiben, dann muß man identisch:

$$\frac{dP'}{dy} = \frac{dQ'}{dx}$$

haben; nun hat man, wenn in P, Q und R die Variable z als Function von x und y auftritt, folgende zwei Gleichungen:

$$\frac{dP'}{dy} = \frac{dP}{dy} + \frac{dP}{dz}\frac{dz}{dy} + \left(\frac{dR}{dy} + \frac{dR}{dz}\frac{dz}{dy}\right)\frac{dz}{dx} + R\frac{d^2z}{dxdy} ,$$

$$\frac{dQ'}{dx} = \frac{dQ}{dx} + \frac{dQ}{dz}\frac{dz}{dx} + \left(\frac{dR}{dx} + \frac{dR}{dz}\frac{dz}{dx}\right)\frac{dz}{dy} + R\frac{d^2z}{dydx} ,$$

daher muß die oben erwähnte Relation zwischen x, y und z der Art sein, daß man:

$$\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} - \left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right)\frac{dz}{dy} - \left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right)\frac{dz}{dx} = 0$$

habe.

Ist hier auch nicht der Ort, das Verfahren auseinander zu setzen, das jene Relation zwischen x, y und z herbeiführet, die dieser Gleichung im Allgemeinen ein Genüge thut, denn es fällt die Erledigung dieses Gegenstandes in die zweite Abtheilung der Integralrechnung mit mehrern Variabeln, die von der Integration der Differenzialgleichungen handelt; so darf um so weniger zur Erhärtung unserer obigen Aussage ein besonderer Fall fehlen, der doch wenigstens von der Möglichkeit zeuget, daß derselben ein Genüge

geschehen kann: wie solches aus dem folgenden besondern Fall hervorgehen wird.

Die lineare Differenzialfunction:

$$ydx + zdy + xdz ,$$

die den in Nr. 280 aufgestellten Bedingungsgleichungen der Integrabilität nicht entspricht, gestattet, falls unter x, y, z keinerlei Zusammenhang eingeführt wird, keine diese Variabeln enthaltende Integralfunction. — Stellt nun $\varphi(y-x)$ irgend eine Function von $y-x$ vor, und $\varphi_1(y-x)$ den Differenzialquotienten dieser Function nach $y-x$, wo also $y-x$ als eine Variable gleichsam auftritt; dann geht, wenn zwischen z, y, x die Relation:

$$z = x + \varphi_1(y-x) \text{ *)}$$

festgestellt wird, die vorgelegte lineare Differenzialfunction mit den drei Variabeln x, y, z in folgende:

$$\{y + x - x\varphi_2(y-x)\}\, dx + \{x + \varphi_1(y-x) + x\varphi_2(y-x)\}\, dy ,$$

nur noch die zwei Variabeln y und x enthaltende lineare Differenzialfunction über, wo $\varphi_2(y-x)$ in derselben Beziehung zu $\varphi_1(y-x)$, wie diese zu $\varphi(y-x)$ steht; d. h., wo $\varphi_2(y-x)$ den ersten Differenzialquotienten von $\varphi_1(y-x)$, oder den zweiten von $\varphi(y-x)$ nach der allgemeinen Größe $y-x$ vorstellt.

Diese lineare Differenzialfunction entspricht der Bedingungsgleichung der Integrabilität (Gleichung (b) Nr. 282); vollzieht man die Integration, und zwar indem man zuerst x als Constante behandelt, so ergiebt sich nach den Gleichungen (c) und (d) derselben citirten Nr. folgende Integralfunction:

$$\tfrac{1}{2}x^2 + xy + x\varphi_1(y-x) + \varphi(y-x) ,$$

wo die durch $\varphi$ angedeutete Function völlig willkührlich ist.

Ein ähnliches Bewenden hat es mit den linearen Differenzialfunctionen von vier und mehrern Variabeln, die den Bedingungsgleichungen der Integrabilität nicht entsprechen, aber durch Transformation derselben in andere mit weniger Variabeln sofort inte-

---

*) Wie man zur Kenntniß dieser Annahme gelangt, müssen wir auf die zweite Abtheilung der Integralrechnung mit mehreren Variabeln verschieben.

grabel sich herausstellen. Wie aber zu verfahren sei, damit die transformirte und integrable Differenzialfunction die möglichst größte Anzahl von Variabeln noch beibehalte; dieses fällt, wie schon oben erwähnt wurde, in die zweite Abtheilung der Integralrechnung mit mehrern Variabeln, oder in jene Abtheilung, die die Integration der Differenzialgleichungen behandelt, womit wir uns im dritten oder nächstfolgenden Bande vorliegenden Werkes ausschließlich beschäftigen werden.

292. Nachdem wir nun die Integrabilität linearer Differenzialfunctionen untersucht und mit der nothwendigen Ausführlichkeit bei der Auffindung der Integralfunctionen derselben verweilt haben; erübrigt uns, über die Werthe dieser Integralfunctionen für bestimmte Werthe der Variabeln, oder über die bestimmten Integralien linearer Differenzialfunctionen mehrerer Variabeln Einiges noch mitzutheilen.

Was in der Integralrechnung I Nr. 32 und 33 über die Integralfunction einer linearen Differenzialformel oder Differenzialfunction mit einer Variabeln mitgetheilt wurde, kann mit geringen Abänderungen auch auf die der linearen Differenzialfunction mit mehreren Variabeln, die den Bedingungsgleichungen der Integrabilität entspricht, ausgedehnt werden. Um jedoch diesem Gegenstand nicht unnöthigerweise eine allzu große Ausdehnung zu geben, beschränken wir unsere gegenwärtigen Untersuchungen lediglich auf lineare Differenzial- und deren Integralfunctionen zweier von einander unabhängigen Variabeln.

Stellt man unter $\varphi(x,y)$ und $\psi(x,y)$ Functionen von x und y vor, die der Bedingungsgleichung:

$$\frac{d.\,\varphi(x,y)}{dy} = \frac{d\psi(x,y)}{dx} \qquad (1)$$

entsprechen; so wird die Differenzialfunction:

$$\varphi(x,y)\,dx + \psi(x,y)\,dy$$

eine von x und y abhängige Function, als Integralfunction, d. i. als Integrale darbieten. — Stellt man dieselbe durch $F(x,y)$ dar und die willkührliche Constante der Integration durch C; so kann man folgende, in Bezug auf x und y identische Gleichung aufstellen:

$$\int \{q(x,y)\,dx + \psi(x,y)\,dy\} = F(x,y) + C., \qquad (2)$$

wo der Ausdruck zur Rechten die Integralfunction der innerhalb der Klammern zur Linken enthaltenen Differenzialfunction vorstellt und, bei allen analytischen Untersuchungen, wenn nur die Bedingungsgleichung (1) Statt findet, statt des Gesammtausdruckes zur Linken, wie auch umgekehrt, gesetzt werden darf.

Die Willkührlichkeit der Integrationsconstante C gestattet für x und y respektive die ganz beliebigen Werthe a und b zu setzen, damit die Integralfunction in Null übergehe. Führt man diese Werthe für x und y in (2) ein, so hat man folgende Gleichung:

$$0 = F(a,b) + C.,$$

welche von (2) subtrahirt, diese in folgende umsetzt:

$$\int \{\varphi(x,y)\,dx + \psi(x,y)\,dy\} = F(x,y) - F(a,b). \qquad (3)$$

Auch in dieser Gleichheit stellt der Ausdruck zur Rechten die Integralfunction der Differenzialfunction inner den Klammern zur Linken vor. Diese Integralfunction ist jedoch in so weit bestimmt, daß von derselben ausgesagt werden kann, für $x = a$ und $y = b$ geht solche in Null über. Wird unter dieser Annahme, oder bei Zugrundelegung der Gleichung (3), der Werth der Integralfunction für $x = A$ und $y = B$ verlangt; dann setzt man diese Werthe für x und y in den Ausdruck zur Rechten dieser Gleichheit (3) ein, und deutet dieses durch folgende Gleichung an:

$$\int_{x=a,\,y=b}^{x=A,\,y=B} \{\varphi(x,y)\,dx + \psi(x,y)\,dy\} = F(A,B) - F(a,b). \qquad (4)$$

Der Ausdruck zur Linken, wie solcher hier dargestellt ist, zeigt an, daß unter der Annahme des Verschwindens der Integralfunction folgender Differenzialfunction:

$$q(x,y)\,dx + \psi(x,y)\,dy$$

für $x = a$ und $y = b$, der Werth dieser Integralfunction für $x = A$ nnd $y = B$ angegeben werden soll; der Ausdruck zur Rechten aber stellt diesen Werth bereits ausgedrückt dar.

Die Willkührlichkeit der Constante C in (2) gestattet aber auch

die Annahme, die Integralfunction geht für $x = A$ und $y = B$ in Null über. — Wird unter dieser Annahme der Werth derselben Integralfunction für $x = a$ und $y = b$ verlangt; so hat man, analog mit (4), auch folgende Gleichung:

$$\int_{x=A,\,y=B}^{x=a,\,y=b} \{\varphi(x,y)\,dx + \psi(x,y)\,dy\} = F(a,b) - F(A,B),$$

welche, verglichen mit (4), auf folgende führt:

$$\int_{x=a,\,y=b}^{x=A,\,y=B} \{\varphi(x,y)dx+\psi(x,y)dy\} = -\int_{x=A,\,y=B}^{x=a,\,y=b} \{\varphi(x,y)dx+\psi(x,y)dy\}, \quad (5)$$

die die analoge zur Gleichung (4) Nr. 32 im ersten Theile der Integralrechnung ist.

293. Auch stellt der bestimmte Integralwerth einer integrabeln linearen Differenzialfunction zweier und mehrerer Variabeln eben so viele Reihensummen vor, als dieselbe unabhängige Variable zählt; dieselben werden aus der Differenzialfunction in ähnlicher Weise gebildet, wie in der Integralrechnung I Nr. 33 bei der Differenzialformel einer Variabeln mitgetheilt worden ist.

Behalten wir dieses zu zeigen die in vorangehender Nr. festgestellte Bezeichnung, wie die Gleichungen daselbst bei; setzen überdieß die Integralfunction $F(x,y)$ für alle Werthe von $x = a$ bis $x = A$ und für alle von $y = b$ bis $y = B$ mit der Eigenschaft der Continuität begabt voraus: so besteht die Gleichheit:

$$\omega\,\varphi(x,y) + \omega'\,\psi(x,y) = \mathrm{Lim}: \{F(x+\omega, y+\omega') - F(x,y)\}, \quad (6)$$

in der das Grenzzeichen auf die von einander unabhängigen unendlich kleinwerdenden Größen $\omega$ und $\omega'$ Bezug hat, für alle diese eben erwähnten Werthe von $x$ und $y$.

Wird in diese Gleichheit der Reihe nach:

$x = a,\ y = b,\ \omega = \omega_0,\ \omega' = \omega'_0$;

$x = a + \omega_0,\ y = b + \omega'_0,\ \omega = \omega_1,\ \omega' = \omega'_1$;

$x = a + \omega_0 + \omega_1,\ y = b + \omega'_0 + \omega'_1,\ \omega = \omega_2,\ \omega' = \omega'_2$;

$x = a + \omega_0 + \omega_1 + \omega_2,\ y = b + \omega'_0 + \omega'_1 + \omega'_2,\ \omega = \omega_3,\ \omega' = \omega'_3$;

. . . . . .

$x = a + \omega_0 + \omega_1 \ldots + \omega_{n-2},\ y = b + \omega'_0 + \omega'_1 \ldots + \omega'_{n-2},\ \omega = \omega_{n-1},\ \omega' = \omega'_{n-1}$

gesetzt; werden dann die sich so ergebenden n Gleichungen addirt; dabei ferner:

$$\left.\begin{aligned} A &= a + \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{n-1}\,, \\ B &= b + \omega'_0 + \omega'_1 + \omega'_2 + \ldots + \omega'_{n-1} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

festgestellt, wo, wenn A um eine endliche Größe wenigstens von a absteht und desgleichen B von b, die ganze Zahl n nothwendig unendlich großwerdend sein muß: so ergiebt sich folgende Gleichung:

$$F(A,B) - F(a,b) =$$
$$= \omega_0 q(a,b) + \omega_1 q(a+\omega_0, b+\omega'_0) + \omega_2 q(a+\omega_0+\omega_1, b+\omega'_0+\omega'_1) + \ldots .$$
$$\ldots\ldots\ldots + \omega_{n-1}\, q(A-\omega_{n-1},\ B-\omega'_{n-1})$$
$$+\omega'_0 \psi(a,b) + \omega'_1 \psi(a+\omega_0, b+\omega'_0) + \omega'_2 \psi(a+\omega_0+\omega_1, b+\omega'_0+\omega'_1) + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots + \omega'_{n-1}\, \psi(A-\omega_{n-1},\ B-\omega'_{n-1})\ . \qquad (8)$$

Ganz in ähnlicher Weise wird man auch auf folgende Gleichung geführt:

$$F(A,B) - F(a,b) =$$
$$= \omega_0 q(a+\omega_0,\ b+\omega'_0) + \omega_1 q(a+\omega_0+\omega_1,\ b+\omega'_0+\omega'_1) + \ldots .$$
$$\ldots + \omega_{n-2}\, q(A-\omega_{n-1},\ B-\omega'_{n-1}) + \omega_{n-1}\, q(A,B)$$
$$+\omega'_0 \psi(a+\omega_0,\ b+\omega'_0) + \omega'_1 \psi(a+\omega_0+\omega_1,\ b+\omega'_0+\omega'_1) + \ldots .$$
$$\ldots + \omega'_{n-2}\, \psi(A-\omega_{n-1},\ B-\omega'_{n-1}) + \omega'_{n-1}\, \psi(A,B)\ . \qquad (9)$$

Diese zwei Gleichungen in Vereinigung mit der Gleichung (4) vorangehender Nr. rechtfertigen die anfangs vorliegender Nr. gemachte Behauptung und gestatten, die für Differenzialfunctionen mit einer Variabeln feststehenden Bezeichnungen und Benennungen auch auf integrable lineare Differenzialfunctionen mit mehrern Variabeln zu übertragen. Diesem nach kann von einem bestimmten Integrale einer integrabeln linearen Differenzialfunction mit mehrern Variabeln, von den Grenzen dieses bestimmten Integrals, von den obern und untern Grenzen u. dgl. m. gar wohl die Rede sein. Man kann dieselben auf ähnliche Weise, wie bei Functionen einer Variabeln andeuten oder bezeichnen und benennen. Endlich gelten die Kennzeichen und Vorschriften, die wir im ersten Theile der Integralrechnung, in den Nrn. 34, 105 und 106 über die Zulässigkeit eines bestimmten Integrals im Bereiche mathematischer Größen mitgetheilt haben, auch für bestimmte Integralien der integrabeln

linearen Differenzialfunctionen mehrerer Variabeln; so z. B. haben die obigen Gleichungen (8) und (9) nur alsdann Bestand, wenn jedes Glied in den Reihen rechter Hand der Gleichheitszeichen einen unendlich kleinwerdenden Grenzwerth darbietet.

294. Wir haben in den beiden vorangeschickten Nrn. überall, wo von einer linearen Differenzialfunction mit mehrern Variabeln die Rede war, dieselbe als eine integrable zu bezeichnen nie unterlassen. Auf diese Integrabilität zeigen die Gleichheiten (1) und (6) besagter Nrn. hin, die den Ergebnissen daselbst zu Grunde liegen und nichts anderes, als die Bedingung der Integrabilität der dort behandelten linearen Differenzialfunction aussprechen. Da wir hier diese Ergebnisse zu weitern Folgerungen unterlegen; so erinnern wir, möglichen Mißdeutungen vorzubeugen, nochmals, daß von einem bestimmten Integrale einer linearen Differenzialfunction mehrerer Variabeln nur insofern die Rede sein kann, als dieselbe den Bedingungen der Integrabilität entspricht; welche Voraussetzung wir allen unsern folgenden Betrachtungen unterlegen.

In den Gleichungen (8) und (9) vorangehender Nr. stellen die Größen:

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_{n-1} \qquad (\alpha)$$

die unendlich kleinwerdenden Aenderungen der Variabeln x beim continuirlichen Uebergange derselben von a bis A vor; eben so stellen

$$\omega'_0, \omega'_1, \omega'_2, \omega'_3, \ldots \omega'_{n-1} \qquad (\alpha')$$

die unendlich kleinwerdenden Aenderungen der Variabeln y vor, bei dem continuirlichen Uebergange von $y = b$ bis $y = B$. Da diese zwei Reihen unendlich kleinwerdender Größen in ($\alpha$) und ($\alpha'$) keinerlei sonstigen Bedingung, als den Gleichungen in (7) zu genügen, unterliegen; so ist man auch folgende Gleichungen aufzustellen berechtiget:

$$\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \ldots = \omega_{n-1} = \omega ,$$

$$\omega'_0 = \omega'_1 = \omega'_2 = \omega'_3 = \ldots = \omega'_{n-1} = \omega' ,$$

wo dann $\omega$ und $\omega'$ unendlich kleinwerdende Größen vorstellen, die den Gleichungen:

$$A = a + n\omega , \quad B = b + n\omega'$$

nachzukommen haben.

Gehen wir nun von diesen zwei Gleichungen aus, und eliminiren aus denselben die unbestimmte, ganze und unendlich großwerdende Zahl n; so stellt sich folgender Zusammenhang unter den bis jetzt von einander völlig unabhängigen Größen $\omega$ und $\omega'$ heraus:

$$(A-a)\,\omega' = (B-b)\,\omega\ .$$

Bedenkt man ferner, daß $\omega$ und $\omega'$ respective die unendlich kleinwerdenden Aenderungen oder die Differenzialien von x und y repräsentiren; so hat man auch:

$$(A-a)\,dy = (B-b)\,dx\ ,$$

woraus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B-b}{A-a} \qquad (10)$$

gefolgert wird.

Hieraus entnehmen wir, daß bei der Integration einer integrabeln linearen Differenzialfunction zweier Variabeln zwischen gegebenen Grenzen es gleichgültig sei, ob man zuerst die Integration nach den von einander unabhängig gedachten Variabeln innerhalb der verlangten Grenzen, nach Gleichung (4) Nr. 292 vollzieht; oder aber, ob man vor der Integration noch eine dieser Gleichung (10) entsprechende Relation unter den Integrationsvariabeln einführt, und hierauf dann zwischen den Grenzen der noch zurückbleibenden Integrationsvariabeln die Integration vollzieht. In dem einen wie in dem andern Falle gelangt man auf das gleiche Endergebniß.

Betreffend diese eben erwähnte Relation unter den Integrationsvariabeln y und x, zeigt die Gleichung (10), für y sei eine solche Function von x vor der Integration einzuführen, daß der Differenzialquotient derselben, nämlich daß $\frac{dy}{dx}$ der von x unabhängigen Größe:

$$\frac{B-b}{A-a}$$

gleich werde. Zieht man sonach das Fundamentaltheorem der Differenzialrechnung Nr. 16 zu; so kann die besagte Function von x nur von der Form:

$$\frac{B-b}{A-a}\,x + C$$

sein, wo auch C eine von x unabhängige, übrigens willkührliche Größe vorstellt.

Fassen wir die Ergebnisse dieser Nr. zusammen, so stellt sich folgendes als begründet heraus.

Wenn die integrable lineare Differenzialfunction:

$$\varphi(x,y)\,dx + \psi(x,y)\,dy$$

von $x = a$ bis $x = A$ und von $y = b$ bis $y = B$ nach Gleichung (4) Nr. 292 integrirt werden soll; so gelangt man zu dem gleichen Endergebnisse, wenn aus dieser Differenzialfunction zuerst y oder x mittelst folgender Gleichung:

$$(A-a)y - (B-b)x = C$$

eliminirt wird, und im erstern Fall (wenn man y eliminirt hat) die Integration nach x von $x = a$ bis $x = A$ vollzieht, im letztern Falle aber (wenn x die eliminirte Variable ist) nach y, von $y = b$ bis $y = B$ die Integration vollzieht.

Betreffend endlich die Größe C bedenke man, daß man zugleich entweder:

$$x = a \text{ und } y = b$$

oder

$$x = A \text{ und } y = B$$

hat; die eine wie die andere Annahme bietet dieselbe Bestimmung für C dar, nämlich:

$$C = Ab - Ba;$$

so daß die in Rede stehende Relation zwischen y und x folgende ist:

$$(A-a)y - (B-b)x = Ab - Ba\,. \qquad (11)$$

Man hat also bei Zugrundelegung dieser Gleichung (11) entweder:

$$\int_{x=a,\,y=b}^{x=A,\,y=B} \{\varphi(x,y)dx + \psi(x,y)dy\} = \int_{a}^{A} \left\{\varphi(x,y) + \frac{B-b}{A-a}\,\psi(x,y)\right\} dx, \qquad (12)$$

oder auch:

$$\int_{x=a,\,y=b}^{x=A,\,y=B} \{\varphi(x,y)dx + \psi(x,y)dy\} = \int_{b}^{B} \left\{\frac{A-a}{B-b}\varphi(x,y) + \psi(x,y)\right\} dy\,. \qquad (13)$$

Dieses Ergebniß verdient schon deswegen alle Aufmerksamkeit, indem wir aus demselben entnehmen, daß man eine integrable lineare Differenzialfunction zweier Variabeln, die die Variabeln nicht gesondert enthält, gleichwie eine gesonderte zu behandeln habe, wenn es sich um deren bestimmten Integralwerth handelt.

Zur Erläuterung dieser Aussage fügen wir noch folgendes bei: Gesetzt man hätte die Differenzialfunction:

$$\varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy\,,$$

in der $\varphi(x)$ bloß Function von x und $\psi(y)$ solches bloß von y ist; so kann man, da hier die Variabeln x und y von einander abgesondert sind, weswegen die Differenzialfunction eine gesonderte genannt wird, falls solche von $x = a$ bis $x = A$ nach x und von $y = b$ bis $y = B$ nach y integrirt werden soll, die Integrationsgrenzen der Variabeln y denen von x gleich, wie auch umgekehrt machen. Ersteres wird erreicht, wenn man (Integralrechnung III Nr. 144)

$$y = \frac{B-b}{A-a}\,x + \frac{Ab-Ba}{A-a}\,.$$

annimmt, letzteres wenn

$$x = \frac{A-a}{B-b}\,y + \frac{Ba-Ab}{B-b}$$

gesetzt wird. Das oben gewonnene Ergebniß zeigt sonach, daß es ein gleiches Bewenden mit der integrabeln linearen Differenzialfunction zweier Variabeln auch dann noch habe, wenn diese gleich ungesondert oder vermischt in derselben vorkommen.

Das ähnliche Bewenden hat es mit integrabeln linearen Differenzialfunctionen von drei, vier und mehrern Variabeln; wir erachten jedoch unnöthig bei diesen zu verweilen, und ziehen es vor in der folgenden Nr., mit der wir dieses Kapitel schließen, zur Erhärtung des Ergebnisses vorliegender Nr., dasselbe auf ein Paar besondere Fälle zur Anwendung zu bringen.

295. Als ersten besondern Fall legen wir das bestimmte Integrale:

$$\int_{x=a,\,y=b}^{x=A,\,y=B} \left\{ \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2 + x^2} \right\}$$

zur Ausmittelung vor.

Setzt man der Kürze wegen:

$$\alpha = \frac{B-b}{A-a} \text{ und } \beta = \frac{Ab-Ba}{A-a},$$

so bieten die Gleichungen (11) und (12) vorangehender Nr. folgende Gleichung dar:

$$\int_{x=a,\,y=b}^{x=A,\,y=B} \left\{ \frac{ydx-xdy}{y^2+x^2} \right\} = \beta \int_{a}^{A} \frac{dx}{\beta^2+2\alpha\beta x+(1+\alpha^2)x^2};$$

es ist aber (Integralrechnung II, Nr. 44, Gl. 21):

$$\beta \int \frac{dx}{\beta^2+2\alpha\beta x+(1+\alpha^2)x^2} = \text{Arctang.} \frac{\alpha\beta+(1+\alpha^2)x}{\beta},$$

daher hat man:

$$\int_{x=a,\,y=b}^{x=A,\,y=B} \frac{ydx-xdy}{y^2+x^2} = \text{Arctang.} \frac{(A-a)(1+\alpha^2)\beta}{\beta^2+[\alpha\beta+(1+\alpha^2)A][\alpha\beta+(1+\alpha^2)a]},$$

oder auch:

$$\int_{x=a,\,y=b}^{x=A,\,y=B} \left\{ \frac{ydx-xdy}{y^2+x^2} \right\} = \text{Arctang.} \frac{\beta(A-a)}{\beta^2+\alpha\beta A+\alpha\beta a+(1+\alpha^2)aA},$$

oder endlich:

$$\int_{x=a,\,y=b}^{x=A,\,y=B} \left\{ \frac{ydx-xdy}{y^2+x^2} \right\} = \text{Arctang.} \frac{\beta(A-a)}{(\beta+\alpha A)(\beta+\alpha a)+Aa}.$$

Berücksichtiget man nun die oben für $\alpha$ und $\beta$ festgestellten Werthe, die:

$$\beta+\alpha A=B, \quad \beta+\alpha a=b,$$
$$\beta(A-a)=Ab-Ba$$

geben; so stellt sich folgende Bestimmung für das vorgelegte bestimmte Integrale dar:

$$\int_{x=a,\,y=b}^{x=A,\,y=B} \left\{ \frac{ydx-xdy}{y^2+x^2} \right\} = \text{Arctang.} \frac{Ab-Ba}{Aa+Bb}.$$

Ganz dasselbe Resultat bietet die Gleichung (4), Nr. 292 dar. In Nr. 287 haben wir nämlich gefunden:

$$\int \frac{ydx-xdy}{y^2+x^2} = \text{Arctang.}\ \frac{x}{y} + \text{Const.}\ ;$$

wendet man auf diese Gleichheit die eben citirte Gleichung (4) an, so ergiebt sich:

$$\int_{x=a,\,y=b}^{x=A,\,y=B} \left\{ \frac{ydx-xdy}{y^2+x^2} \right\} = \text{Arctang.}\ \frac{A}{B} - \text{Arctang.}\ \frac{a}{b}\ ,$$

aus der, wie vorhin:

$$\int_{x=a,\,y=b}^{x=A,\,y=B} \left\{ \frac{ydx-xdy}{y^2+x^2} \right\} = \text{Arctang.}\ \frac{Ab-Ba}{Aa+Bb}$$

gefunden wird.

Als zweiten besondern Fall legen wir das bestimmte Integrale:

$$\int_{x=a,\,y=b}^{x=A,\,y=B} \left\{ \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{dy}{y}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \right\},$$

dessen Werth wir der Kürze wegen durch u andeuten wollen, zur Ausmittelung vor.

Stellen $\alpha$ und $\beta$ dieselben Größen, wie im vorigen Beispiele vor, so geben die Gleichungen (11) und (12) vorangehender Nr. folgenden Werth für u:

$$u = \alpha \int_a^A \frac{dx}{\beta+\alpha x} + \beta \int_a^A \frac{dx}{(\beta+\alpha x)\sqrt{\beta^2+2\alpha\beta x+(1+\alpha^2)x^2}}\ ;$$

nun ist:

$$\alpha \int \frac{dx}{\beta+\alpha x} = \log.\ (\beta+\alpha x)\ ,$$

und nach Integralrechnung II, Nr. 46, Gleichung (30) hat man:

$$\beta \int \frac{dx}{(\beta+\alpha x)\sqrt{\beta^2+2\alpha\beta x+(1+\alpha^2)x^2}} = \log. \frac{-2\beta x-2\beta\sqrt{\beta^2+2\alpha\beta x+(1+\alpha^2)x^2}}{\beta+\alpha x}\ ;$$

daher ergiebt sich:

$$u = \log. \frac{A + \sqrt{\beta^2 + 2\alpha\beta A + (1+\alpha^2)A^2}}{a + \sqrt{\beta^2 + 2\alpha\beta a + (1+\alpha^2)a^2}},$$

oder auch:

$$u = \log. \frac{A + \sqrt{(\beta+\alpha A)^2 + A^2}}{a + \sqrt{(\beta+\alpha a)^2 + a^2}};$$

es ist aber, wie schon im vorangeschickten Beispiele bemerkt wurde:

$$\beta + \alpha A = B \text{ und } \beta + \alpha a = b,$$

daher hat man:

$$u = \log. \frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{a + \sqrt{a^2 + b^2}},$$

mithin auch:

$$\int_{x=a,\,y=b}^{x=A,\,y=B} \left\{ \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{dy}{y}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right\} = \log. \frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{a + \sqrt{a^2 + b^2}},$$

worauf auch die Gleichung (4) Nr. 292 führt, wenn man das Ergebniß des in Nr. 287 behandelten zweiten Beispieles zu Grunde legt.

## Sechstes Kapitel.

### Nichtlineare, eingliedrige Differenzialfunctionen einer, zweier und mehrerer Variabeln.

296. Stellt man unter $\varphi(x, y, z, \ldots)$ irgend eine Function der Variabeln x, y, z, ... vor, so ist jedes Produkt aus den mit ganzen und positiven Exponenten begabten Differenzialien dieser Variabeln x, y, z, ... in diese Function $\varphi(x, y, z, ..)$ eine nichtlineare, eingliedrige Differenzialfunction besagter Variabeln.

Diesem nach ist der Ausdruck:

$$q(x, y, z, \ldots)dx^m\, dy^n\, dz^p \ldots , \qquad (A)$$

wo m, n, p, .. nichtnegative ganze Zahlen vorstellen, die der Bedingung:

$$m + n + p + \ldots \geqq k$$

entsprechen, in der k der Anzahl der Variabeln x, y, z, ... gleich kömmt, eine solche Differenzialfunction. Das Gleichheitszeichen in dieser Bedingung fällt aus, wenn $k = 1$ ist, in dem Falle nämlich, wenn man eine eingliedrige nichtlineare Differenzialfunction einer Variabeln hat.

Aus dem, was in der Differenzialrechnung mit Functionen mehrerer Variabeln mitgetheilt wurde, namentlich aus dem dritten Buche §. I der Differenzialrechnung geht hervor, daß eine Differenzialfunction wie (A) nur durch ein successives, partielles Differenziren einer Function von x, y, z, ... in beliebiger Ordnungsfolge m mal nach x, n mal nach y, p mal nach z u. s. w. entstanden sein kann; wenn sonach die Integralfunction von (A) durch $F(x, y, z, \ldots)$ vorgestellt wird, dann muß solche folgender Gleichheit entsprechen:

$$\frac{d^{m+n+p+\ldots} F(x, y, z, \ldots)}{dx^m\, dy^n\, dz^p \ldots} = q(x, y, z, \ldots) . \qquad (B)$$

Zu einer vorgelegten Function $\varphi(x, y, z, \ldots)$ die entsprechende $F(x, y, z, \ldots)$ angeben, die dieser Gleichheit ein Genüge thut, heißt die Differenzialfunction (A) integriren, welches Zweck und Inhalt vorliegenden Kapitels ist.

---

## §. I.

## Integration der eingliedrigen nichtlinearen Differenzialfunction einer Variabeln.

297. Hat man die Differenzialfunction $\varphi(x)\,dx^m$ vorgelegt, wo $\varphi(x)$ eine Function bloß von $x$, und $m$ eine positive ganze Zahl ist; so wird die Integralfunction derselben erst nach einer $m$ maligen successiven Differenziation nach der Variabeln $x$, wobei jedoch $dx$ constant verbleibt, die vorgelegte Differenzialfunction darbieten. Diesem nach wäre folgendes Verfahren das natürlichste, zur Kenntniß der Integralfunction derselben zu gelangen.

Man stelle zuerst die Integralfunction von $\varphi(x)\,dx$ her; das Ergebniß, das eine willkührliche Constante mitführt, multiplicire man mit $dx$ und stelle zu der so erhaltenen Differenzialfunction das entsprechende Integrale her, das nunmehr zwei willkührliche Constanten enthalten wird; dieses multiplicire man abermals mit $dx$ und integrire nach $x$, wodurch eine Function von $x$ mit drei willkührlichen Constanten erhalten wird; fährt man in dieser Weise fort, das jedesmal gewonnene Ergebniß der Integration mit $dx$ zu multipliciren, dieses nach $x$ zu integriren und dem Ergebnisse eine willkührliche Constante beizusetzen: so erhält man nach einem $m$ maligen Wiederholen die der Differenzialfunction:

$$q\,(x)\,dx^m\,,$$

entsprechende Integralfunction, welche, wie aus dem eben mitgetheilten Verfahren erhellet, $m$ willkührliche Constanten enthalten wird.

Es unterliegt aber dieses Verfahren dem Uebelstande, daß im Verfolge der successiven Integrationen, bisweilen schon bei der ersten eine nicht so leicht integrirbare Differenzialformel jeder weitern Fortsetzung des Integrirens sich entgegenstellt, und dadurch die Her-

stellung des Endresultates fast unausführbar macht. Als Beleg hierzu führen wir die nichtlineare Differenzialfunction $e^{x^2}xdx^3$ an. Das Integrale von $e^{x^2}xdx$ ist $\frac{1}{2}e^{x^2}+a$, wo a die Constante der Integration ist. Multiplicirt man dieses Integrale mit dx, so hat man die Differenzialformel $adx+\frac{1}{2}e^{x^2}dx$ zu integriren, und da $e^{x^2}dx$ durch keine bekannte Function integrirbar ist; so sieht man sich im Fortgange gehemmt, will man nicht die Function $e^{x^2}$ in eine ohne Ende fortlaufende Reihe auflösen, wodurch äußerst verwickelte Formen herbeigeführt werden. Diesem Mißstande nun soll durch die Betrachtungen der folgenden Nrn. abgeholfen werden. In Folge dieser Betrachtungen wird die Integralfunction der in Rede stehenden Differenzialfunction gleichfalls von m noch auszuführenden Integrationsoperationen abhängig dargestellt werden; allein da dieselben, als in keinerlei gegenseitigen Abhängigkeit stehend werden erkannt werden, so kann dann auch der vorhin erwähnte Uebelstand nicht eintreten; denn die allenfalls noch vorkommenden nicht so leicht vollziehbaren Integrationen werden nunmehr isolirt und ohne irgend welchen Einfluß auf die übrigen da stehen, wie wir solches zur Erhöhung der Deutlichkeit in Nr. 300 an demselben so eben besprochenen besondern Falle eigens zeigen werden.

298. Stellt man durch $u_m$ jene Function von x vor, die m mal nacheinander nach x, unter der Annahme des Constantsein von dx differenzirt, die Differenzialfunction $\varphi(x)dx^m$ darbietet, so daß man:

$$\frac{d^m u_m}{dx^m} = q(x)$$

hat, aus der folgende Gleichungen:

$$\frac{du_1}{dx}=q(x),\quad \frac{d^2u_2}{dx^2}=q(x),\quad \ldots\ldots \frac{d^k u_k}{dx^k}=q(x),$$

wie auch die folgenden:

$$u_1=\int q(x)dx,\quad u_2=\int\int q(x)dx^2,\quad u_3=\int\int\int q(x)dx^3 \text{ u. s. w.}$$

fließen; so ist unser nächstes Streben dahin gerichtet, unter den Größen:

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ u_m$$

eine Relation oder, zur Bestimmung von $u_m$, eine Recursionsgleichung herzustellen.

Berücksichtiget man die letztern $u_1, u_2, u_3, \ldots$ darstellenden Gleichungen, so ist man zur Aufstellung folgender Gleichung berechtiget:

$$u_m = \int u_{m-1}\, dx\,; \qquad (\alpha)$$

behandelt man den Ausdruck zur Rechten nach der theilweisen Integration, d. i., nach der Fundamentalgleichung (4) Nr. 38 des ersten Theiles, so hat man auch:

$$u_m = xu_{m-1} - \int x\, d.\, u_{m-1}\,,$$

oder auch, wegen:

$$d.\, u_{m-1} = u_{m-2}\, dx\,,$$

folgende:

$$u_m = xu_{m-1} - \int u_{m-2}\, x dx\,.$$

Behandelt man den Integralausdruck zur Rechten in ähnlicher Weise wie den analogen in Gleichung $(\alpha)$, wo nunmehr $xdx$ statt $dx$ steht; so erhält man:

$$u_m = xu_{m-1} - \tfrac{1}{2} x^2 u_{m-2} + \tfrac{1}{2} \int x^2 d.\, u_{m-2}\,,$$

woraus, wegen:

$$d.\, u_{m-2} = u_{m-3}\, dx\,,$$

folgende Gleichung gezogen wird:

$$u_m = xu_{m-1} - \tfrac{1}{2} x^2 u_{m-2} + \tfrac{1}{2} \int u_{m-3}\, x^2 dx\,.$$

Wird hier der Integralausdruck zur Rechten, wo $x^2dx$ statt $dx$ steht, in ähnlicher Weise, wie die analogen Ausdrücke der beiden vorhergehenden Fälle behandelt; so ergiebt sich, wegen:

$$d.\, u_{m-3} = u_{m-4}\, dx\,,$$

folgende Gleichung:

$$u_m = xu_{m-1} - \frac{1}{2}\, x^2\, u_{m-2} + \frac{1}{2.3}\, x^3\, u_{m-3} - \frac{1}{2.3} \int u_{m-4}\, x^3 dx\,.$$

Auf dem hier vorgezeichneten Wege fortgefahren, gewinnt man folgende allgemeine Gleichung:

$$u_m = xu_{m-1} - \frac{1}{2_i} x^2 u_{m-2} + \frac{1}{2.3} x^3 u_{m-3} - \frac{1}{2.3.4} x^4 u_{m-4} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^{k-1} x^k}{2.3.4 \ldots k} u_{m-k} + \frac{(-1)^k}{2.3.4 \ldots k} \int u_{m-k-1} x^k dx ;$$

wird hier $k = m-1$ gesetzt, und berücksichtiget man die Gleichung:

$$u_0 = q(x) ,$$

so erhält man die Anfangs dieser Nr. angekündigte Recursionsgleichung:

$$u_m - xu_{m-1} + \frac{x^2}{1.2} u_{m-2} - \ldots \frac{(-1)^{m-1} x^{m-1}}{1.2.3..(m-1)} u_1 = \frac{(-1)^{m-1}}{1.2.3..(m-1)} \int x^{m-1} q(x) dx , \quad (\beta)$$

mit deren Lösung wir uns sofort in der nächstfolgenden Nr. befassen werden.

**299.** Die Recursionsgleichung ($\beta$) zu lösen, d. i. $u_m$ independent von $u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots u_{m-1}$ darzustellen, lassen wir in derselben die ganze Zahl m der Reihe nach in m, m-1, m-2, m-3, .. 3, 2, 1 übergehen, wodurch folgendes System von Gleichungen erhalten wird:

$$u_m - xu_{m-1} + \frac{x^2}{1.2} u_{m-2} - \frac{x^3}{1.2.3} u_{m-3} + \ldots \frac{(-1)^{m-1} x^{m-1}}{1.2.3 \ldots (m-1)} u_1 = \frac{(-1)^{m-1}}{1.2.3..(m-1)} \int x^{m-1} q(x) dx ,$$

$$u_{m-1} - x u_{m-2} + \frac{x^2}{1.2} u_{m-3} - \ldots \frac{(-1)^{m-2} x^{m-2}}{1.2.3 \ldots (m-2)} u_1 = \frac{(-1)^{m-2}}{1.2.3..(m-2)} \int x^{m-2} q(x) dx ,$$

$$u_{m-2} - x u_{m-3} + \ldots \frac{(-1)^{m-3} x^{m-3}}{1.2.3 \ldots (m-3)} u_1 = \frac{(-1)^{m-3}}{1.2.3..(m-3)} \int x^{m-3} q(x) dx ,$$

$$u_{m-3} - \ldots \frac{(-1)^{m-4} x^{m-4}}{1.2.3 \ldots (m-4)} u_1 = \frac{(-1)^{m-4}}{1.2.3..(m-4)} \int x^{m-4} q(x) dx ,$$

. . . . . .

$$u_3 - xu_2 + \frac{x^2}{1.2} u_1 = \frac{1}{1.2} \int x^2 q(x) dx ,$$

$$u_2 - x u_1 = -\frac{1}{1} \int x q(x) dx ,$$

$$u_1 = \int \varphi(x) dx ;$$

werden diese Gleichungen in der Ordnung ihrer Folge mit:

$$1 , x , \frac{x^2}{1.2} , \frac{x^3}{1.2.3} , \ldots \frac{x^{m-3}}{1.2.3..(m-3)} , \frac{x^{m-2}}{1.2.3..(m-2)} , \frac{x^{m-1}}{1.2.3..(m-1)}$$

multiplicirt und hierauf addirt; berücksichtiget man dann die Gleichheit:

$$\frac{1}{1.2.3..k}-\frac{1}{1.1.2.3..(k-1)}+\frac{1}{1.2.1.2.3..(k-2)}-\frac{1}{1.2.3.1.2.3..(k-3)}+\cdots\frac{(-1)^{k-1}}{1.2\,3..(k-1).1}+\frac{(-1)^k}{1.2.3...k}=$$

$$=\frac{1}{1.2.3..k}\left\{1-\binom{k}{1}+\binom{k}{2}-\binom{k}{3}+\ldots(-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}+(-1)^k\binom{k}{k}\right\},$$

die für alle ganzen und positiven Zahlenwerthe von k besteht, diese aber wegen:

$$1-\binom{k}{1}+\binom{k}{2}-\binom{k}{3}+..(-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}+(-1)^k\binom{k}{k}=(1-1)^k=0,$$

in

$$\frac{1}{1.2.3..k}-\frac{1}{1,1.2.3..(k-1)}+\frac{1}{1,2.1,2.3...(k-2)}-\frac{1}{1.2,3.1\,2\,3..(k-3)}+\ldots+\frac{(-1)^k}{1.2\text{-}3..k}=0$$

übergeht: so erhält man:

$$u_m=$$

$$=\frac{1}{1.2...(m-1)}\left\{\begin{array}{l}x^{m-1}\int q(x)dx-\binom{m-1}{1}x^{m-2}\int xq(x)dx+\binom{m-1}{2}x^{m-3}\int x^2q(x)dx\\ \ldots.(-1)^{m-2}\binom{m-1}{m-2}x\int x^{m-2}q(x)dx+(-1)^{m-1}\binom{m-1}{m-1}\int x^{m-1}q(x)dx\end{array}\right\},\ (\gamma)$$

welche Gleichung die verlangte Auflösung der Recursionsgleichung ($\beta$) und die Lösung unseres Problems darstellt. Denn deutet man eine m malige Integration, wie wir solche in Nro. 297 beschrieben haben, durch das Symbol:

$$\int^{(m)} q(x)dx^m$$

an; so hat man nach der eben aufgestellten Gleichung ($\gamma$):

$$\int^{(m)} q(x)dx^m=$$

$$=\frac{1}{1,2...(m-1)}\left\{\begin{array}{l}x^{m-1}\int q(x)dx-\binom{m-1}{1}x^{m-2}\int xq(x)dx+\binom{m-1}{2}x^{m-3}\int x^2q(x)dx\\ \ldots.(-1)^{m-2}\binom{m-1}{m-2}x\int x^{m-2}q(x)dx+(-1)^{m-1}\binom{m-1}{m-1}\int x^{m-1}q(x)dx\end{array}\right\},\ (I)$$

aus der ganz augenfällig die Richtigkeit unserer Aussage am Schlusse der Nr. 297 hervorgeht, wie solches noch deutlicher aus dem in der folgenden Nr. zu behandelnden besondern Fall hervorgehen wird.

300. Nach der Gleichung (I) wollen wir hier die Integralfunction von:

$$\iiint e^{x^2}xdx^3,\ \text{oder von}\ \int^{(3)} e^{x^2}xdx^3$$

herstellen, welche wir in Nr. 297 nur auf:

$$\int\int (a + \frac{1}{2} e^{x^2}) dx^2$$

zurück zu bringen vermochten.

Die allgemeine Gleichung (I) auf den vorliegenden Fall angewandt, bietet folgende Bestimmung dar:

$$\int^{(3)} e^{x^2} x dx^3 = \frac{1}{1.2} \left\{ x^2 \int e^{x^2} x dx - 2x \int e^{x^2} x^2 dx + \int e^{x^2} x^3 dx \right\};$$

nun findet man sehr leicht:

$$\int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c,$$

$$\int e^{x^2} x^3 dx = \frac{1}{2} (x^2 - 1) e^{x^2} + a,$$

wo a und b von x unabhängige und willkührliche Größen sind: sonach hat man:

$$\int^{(3)} e^{x^2} x dx^3 = \frac{1}{1.2} \left\{ a + cx^2 + \left(x^2 - \frac{1}{2}\right) e^{x^2} - 2x \int e^{x^2} x^2 dx \right\},$$

aus welchem Ergebnisse ganz deutlich hervorgeht, daß, um zum Endziele zu gelangen, nur noch die Integration der Differenzialformel $e^{x^2} x^2 dx$ erübriget. Diese Integration kann man zwar von der der Formel $e^{x^2} dx$ abhängig machen; allein das Integrale $\int e^{x^2} dx$ ist eine noch nicht bekannte Function von x und kann, wie aus dem ersten Theile der Integralrechnung hervorgeht, bloß durch unendliche Reihen dargestellt werden. Stellt man daher die Constante der Integration von:

$$\int e^{x^2} dx$$

durch b vor; so erhält man endlich:

$$\int^{(3)} e^{x^2} x dx^3 = \frac{1}{1.2} \left\{ a + bx + cx^2 - \frac{1}{2} e^{x^2} + x \int e^{x^2} dx \right\},$$

wo a, b, c die Constanten der Integration sind.

Diese Function von x zur Rechten vom Gleichheitszeichen entspricht der Anforderung, nach einer successiven dreimaligen Differenziation in Bezug auf x die Differenzialfunction:

$$e^{x^2} x\, dx^3$$

darzubieten, wenn bei einer jeden Differenziation dx als Constante behandelt wird.

**301.** Die Gleichung (I)', die das mfache Integrale der Differenzialfunction:

$$q(x)\,dx^m$$

durch m noch zu vollziehenden, aber abgesonderten oder von einander unabhängigen Integrationen darstellt, ruft, wie wir auch in der vorangehenden Nr. an einem besondern Falle gesehen, eine gleich große Anzahl, nämlich m, willkührliche Constanten hervor, die vermöge dieser Willkührlichkeit uns in die Lage setzen, dasselbe mfache Integrale nur noch von der Ausmittelung eines einzigen bestimmten Integrals einer Variabeln, jedoch mit allgemeinen Integrationsgrenzen versehen, abhängig darzustellen. Mit der Einleitung hiezu befassen wir uns noch in vorliegender Nr.

Bei der Annahme:

$$d.\,F(x) = f(x)dx\,,$$

wo $F(x)$ und $f(x)$ Functionen von $x$ sind, hat man auch:

$$\int f(x)dx = F(x) + A - F(\alpha)\,,$$

wo $A - F(\alpha)$ die willkührliche Constante der Integration vorstellt; nun hat man unter derselben Voraussetzung:

$$F(x) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{x} f(x')dx'\,,$$

daher ist auch:

$$\int f(x)dx = \int_{\alpha}^{x} f(x')dx' + A\,, \qquad (\delta)$$

wo $\alpha$ irgend einen Zahlenwerth vorstellt, welcher statt $x'$ in $f(x')dx'$ gesetzt (Integralrechnung **III.** Nr. **105** und **106**) für letztere einen unendlich kleinwerdenden Werth darbieten muß, und wo $A$ die willkührliche Constante der Integration vorstellt.

Mittelst dieser Gleichung nun werden wir in der folgenden Nr. das in Rede stehende mfache Integrale, wie vorhin erwähnt wurde, durch ein einziges bestimmtes Integrale zwischen den Grenzen $\alpha$ und $x$, wie durch eine algebraisch rationale und ganze Function von $x$ darstellen, welche letztere die m willkührlichen Constanten implicirt wird.

**302.** Wird in der Gleichung ($\delta$) vorangehender Nr. die Function $f(x)$ nach und nach durch:

$$q(x),\quad xq(x),\quad x^2q(x),\ldots\ldots x^{m-1}q(x)$$

ersetzt, so ergeben sich in derselben Ordnungsfolge die Gleichungen:

$$\int q(x)dx = \int_\alpha^x q(x')dx' + A\,,$$

$$\int xq(x)dx = \int_\alpha^x x'q(x')dx' + A'\,,$$

$$\int x^2q(x)dx = \int_\alpha^x x'^2q(x')dx' + A''\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int x^{m-1}q(x)dx = \int_\alpha^x x'^{m-1}q(x')dx' + A^{(m-1)}\,,$$

wo $\alpha$ irgend einen bestimmten Zahlenwerth vorstellt, der statt $x'$ gesetzt, sämmtliche zu integrirende Differenzialfunctionen zur Rechten, als unendlich kleinwerdende Größen darstellt, und $A$, $A'$, $A''$ . . . $A^{(m-1)}$ willkührliche und von $x$ independente Größen vorstellen.

Multiplicirt man diese Gleichungen in der Ordnung ihrer Folge mit den aufeinanderfolgenden $m$ Gliedern aus der Entwickelung von $(x-1)^{m-1}$ nach absteigenden Potenzen von $x$, nämlich mit:

$$x^{m-1},\ -\binom{m-1}{1}x^{m-2},\ \binom{m-1}{2}x^{m-3},\ -\binom{m-1}{3}x^{m-4}\ \text{u. s. w.};$$

nimmt hierauf deren Summe; setzt endlich

$$\binom{m-1}{k}\frac{A^{(k)}}{1.2.3.\ldots.(m-1)} = A_k\,,$$

wo $k$ aller ganzen Zahlenwerthe von 0 angefangen bis und mit $(m-1)$ fähig ist: so erhält man, beachtend die Gleichung (I) Nr. 299, folgende Gleichung:

$$\int^{(m)}\varphi(x)dx^m = \frac{1}{1.2.3.\ldots.(m-1)}\int_\alpha^x (x-x')^{m-1}\varphi(x')dx'$$

$$+ A_0x^{m-1} + A_1x^{m-2} + A_2x^{m-3} + \ldots + A_{m-2}x + A_{m-1}\,, \quad \text{(II)}$$

welche die Ausgangs vorhergehender Nr. angekündigte ist.

In dieser Gleichung stellen die $m$ Coefficienten:

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots A_{m-1}$$

willkührliche, aber von $x$ unabhängige Größen vor, und für $\alpha$ ist

jeder Zahlenwerth zu setzen gestattet, für welchen die Differenzialfunction zur Rechten noch unendlich kleinwerdend verbleibt.

303. Mittelst der m willkührlichen Constanten der Gleichung (II) vorangehender Nr. kann eben so vielen der Integralfunction gestellten Anforderungen entsprochen werden.

Eine solche Anforderung wäre: Die Integralfunction und die aufeinanderfolgenden (m—1) Differenzialquotienten nach x sollen der Ordnung nach für:

$$x = a_0,\ x = a_1,\ x = a_2, \ldots x = a_{m-1}$$

verschwinden.

Dieser Anforderung zu entsprechen, haben wir vorerst den Differenzialquotienten von:

$$\int_a^x (x-x')^{m-1} q(x')dx'$$

nach x herzustellen. Stellt man denselben durch u vor, so hat man:

$$u = \text{Lim}: \frac{\int_a^{x+\omega} (x-x'+\omega)^{m-1} q(x')dx' - \int_a^x (x-x')^{m-1} q(x')dx'}{\omega},$$

wo das Grenzzeichen auf die unendlich kleinwerdende Abnahme von $\omega$ Bezug hat.

Nun hat man:

$$(x-x'+\omega)^{m-1} = (x-x')^{m-1} + (m-1)(x-x')^{m-2}\omega;$$

daher ist:

$$u = \text{Lim}: \left\{(m-1)\int_a^{x+\omega} (x-x')^{m-2} q(x')dx' + \frac{1}{\omega}\int_x^{x+\omega} (x-x')^{m-1}\varphi(x')dx'\right\},$$

oder auch:

$$u = \text{Lim}: \left\{(m-1)\int_a^{x+\omega} (x-x')^{m-2}\varphi(x')dx' + \omega^{m-2}\int_0^{\omega} q(x'+x)dx'\right\},$$

woraus endlich:

$$u = (m-1)\int_a^x (x-x')^{m-2}\varphi(x')dx'$$

gezogen wird. Geht man aber auf die Bedeutung von u zurück, so hat man:

$$\frac{d.\int_a^x (x-x')^{m-1}\varphi(x')dx'}{dx} = (m-1)\int_a^x (x-x')^{m-2}\varphi(x')dx'.$$

Mittelst dieser Gleichung, kann man die successiven Differenzialen der Gleichung (II) nach x herstellen, und hierauf die Coefficienten $A_0$, $A_1$, $A_2$, . . der gestellten Anforderung gemäß bestimmen.

Eine zweite Anforderung wäre: Die Integralfunction selbst gehe für eine Reihe von Werthen für x, nämlich für:

$$x = a_0, \quad x = a_1, \quad x = a_2, \quad \ldots \quad x = a_{m-1}$$

jedesmal in Null über.

Die ganze Schwierigkeit würde sich hier auf die Auflösung eines Systems von m linearen Gleichungen reduciren.

Noch ähnlichen Anforderungen dieser Art ließe sich mit Hülfe der m willkührlichen Constanten der Gleichung (II) entsprechen; wir begnügen uns hier jedoch mit den zwei so eben angeführten, und schließen in der folgenden Nr. den vorliegenden Paragraphen mit der Mittheilung einer zu beachtenden Bemerkung.

**304.** Die im ersten Theile der Integralrechnung (§. II Nr. **41** und §. III Nr. 50) zur Anwendung gebrachten Integrationsmethoden, die der „Ableitung“ und die des „Zurückführens auf dem Wege der Substitution“ erfreuen sich auch im vorliegenden Falle eines guten Erfolges, wenn nur die wahre Bedeutung der hier festgestellten Bezeichnung nicht außer Acht gelassen wird.

Das Wesen der am citirten Orte mitgetheilten Ableitungsmethode besteht nämlich darin, daß man, wenn $\varphi_1(x)$ den Differenzialquotienten von $\varphi(x)$ nach x vorstellt, von der Gleichheit:

$$\int \varphi_1(x)dx = \varphi(x) + \text{Const.}$$

ausgeht und, indem man für x irgend eine Function von x, z. B. f(x), zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens einsetzt, auf die Gleichheit:

$$\int \varphi_1(f(x))\, f_1(x)dx = \varphi(f(x)) + \text{Const.}$$

geführt wird, die uns die Bestimmung des nunmehr zur Linken befindlichen Integrals darbietet, in welchem $f_1(x)$ den Differenzialquotienten von f(x) nach x vorstellt.

In ähnlicher aber entgegengesetzter Weise führten wir nach der zweiten der oben citirten Methoden die Bestimmung eines Integrals der Form:

$$\int q(x)dx$$

auf die eines Integrals der Form:

$$\int q(f(y))\, f_1(y)dy$$

zurück, indem wir:

$$x = f(y) \text{ und } dx = f_1(y)dy$$

gesetzt haben.

Ein durchaus irriges Resultat ergäbe sich aber, wenn in Gleichung (II) Nr. 302 beim Umsetzen der Variabeln x daselbst in irgend eine Function von x, z. B. in f(x), wodurch dx in $f_1(x)dx$ übergeht, wenn man bei einem solchen Umsetzen der Integrationsvariabeln auch:

$$dx^n \text{ durch } f_1(x)^n\, dx^n$$

zu ersetzen versuchen würde.

Zur Erhöhung der Deutlichkeit fassen wir den besondern Fall:

$$\int^{(3)} q(x)dx^3$$

ins Auge. Nach Nr. 297 hat man:

$$\int^{(3)} q(x)dx^3 = \int \{ \int [ \int q(x)dx ]\, dx \}\, dx\,;$$

d. h., wie nämlich der Ausdruck zur Rechten zeigt, zuerst integrire man den Ausdruck $\varphi(x)dx$, dann das mit dx multiplicirte Ergebniß, hierauf endlich ist dieses Ergebniß noch einmal mit dx zu multipliciren und nach x zu integriren; das Endergebniß, das so erhalten würde, wäre dann auch dem Ausdruck zur Rechten in Gleichung (II) bei der Annahme $m = 3$ gleich. — Diesem nach gewinnt man aus der Gleichung:

$$\int^{(3)} \varphi(x)dx^3 = \frac{1}{1\cdot 2} \int_{\alpha}^{x} (x-x')^2 q(x')dx' + A_0x^2 + A_1x + A_2\,,$$

die aus (II) durch die Annahme $m = 3$ entspringt, folgende nach der Ableitungsmethode:

$$\int \{ \int [ \int q(f(x))f_1(x)dx]\, f_1(x)dx \}\, f_1(x)dx =$$

$$= \frac{1}{1\cdot 2} \int_{\alpha}^{f(x)} \{ f(x)-x' \}^2 q(x')dx' + A_0 f(x)^2 + A_1 f(x) + A_2\,;$$

d. h. der Ausdruck zur Rechten vom Gleichheitszeichen repräsentirt

eine in folgendem Sinne zu vollziehende dreifache Integration: Zuerst ist die Differenzialformel:

$$q\,(f(x))\;f_1(x)dx$$

zu integriren, das Ergebniß ist mit $f_1(x)dx$ zu multipliciren und abermals zu integriren, und das Ergebniß dieser Integration endlich hat man wieder mit $f_1(x)dx$ zu multipliciren und zu integriren. Nur in diesem Sinne ist jede aus (II) durch Ableitung gewonnene neue Gleichung zu deuten. Unterläßt man solches und erlaubt sich, wie oben bemerkt wurde, mit Außerachtlassung der Bedeutung des Symbols:

$$\int^{(n)} q(x)dx^n\,,$$

beim Umsetzen von x in f(x) auch:

$$dx^n \text{ in } f_1(x)^n\,dx^n$$

umzusetzen; so begeht man den analogen Fehler, als wenn der m te partielle Differenzialquotient:

$$\frac{d^m u}{dx^m}\,,$$

bei der Annahme $x = f(y)$, durch folgenden Ausdruck:

$$\frac{1}{f_1(y)^m}\cdot\frac{d^m u}{dy^m}$$

ersetzt würde. Hier wie dort würde wohl das Zeichen, nicht aber die wahre Bedeutung dieses Zeichens berücksichtiget worden sein.

So z. B. hat man:

$$\int^{(m)} dx^m = \frac{1}{1.2.3\,..\,(m-1)}\int_a^x (x-x')^{m-1}\,dx'$$

$$+\,A_0x^{m-1}+A_1x^{m-2}+A_2x^{m-3}+\ldots+A_{m-2}\,x+A_{m-1}\,;$$

läßt man in diese, nach dem Geiste der Ableitungsmethode, x in log. x übergehen, so ergiebt sich:

$$\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\ldots\ldots=\frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\int_a^{\log. x}(\log. x-x')^{m-1}\,dx'$$

$$+A_0(\log. x)^{m-1}+A_1(\log. x)^{m-2}+\ldots+A_{m-2}\log. x+A_{m-1}\,,$$

wo linkerhand die Integrationsoperation m mal vorzunehmen ist. Vollzieht man die Integration zur Rechten, so hat man, da gegenwärtig $\alpha = o$ gesetzt werden darf,

$$\int \frac{dx}{x} \int \frac{dx}{x} \int \frac{dx}{x} \ldots\ldots =$$

$$= \frac{1}{1.2.3 \ldots m} (\log. x)^m + A_0 (\log. x)^{m-1} + A_1 (\log. x)^{m-2} + \ldots A_{m-2} \log. x + A_{m-1},$$

wo $A_0, A_1, A_2, .. A_{m-1}$ die m willkührlichen Constanten der m Integrationsoperationen sind.

Ein analoges Bewenden hat es, wenn man die Integrationsmethode des Zurückfahrens auf dem Wege der Substitution zur Anwendung bringt, die nur die inverse der eben betrachteten ist.

---

## §. II.

## Integration der eingliedrigen nichtlinearen Differenzialfunctionen zweier und mehrerer Variabeln.

**305.** Die Integration einer nichtlinearen Differenzialfunction zweier Variabeln, wie die folgende:

$$\eta(x,y) dx^m dy^n,$$

womit wir hier den Anfang machen, kann, gleichwie solche durch successives partielles Differenziren entstanden, auch durch ein successives partielles Integriren nach den einzelnen Variabeln erzielt werden. Während man nach einer der Variabeln, nach x oder nach y die Integration vollzieht, verbleibt die andere, nämlich y oder x constant; daher ist auch die beizufügende willkührliche Constante der Integration im erstern Falle eine willkührliche Function von y, im letztern aber eine solche von x. Gleich wie ferner bei einer successiven partiellen Differenziation einer Function von x und y die Ordnungsfolge betreffend diese Variabeln willkührlich ist; so auch, wenn zur Kenntniß der Integralfunction in successiver Weise verfahren wird, es ganz freigestellt bleibt, in welcher Ordnung die einzelnen Integrationen nach x und nach y einander zu folgen haben.

Zur Erläuterung des successiven Integrationsverfahrens legen wir die Differenzialfunction:

$$x^2y\,dx^3\,dy^2$$

zur Integration vor, und deuten die vorzunehmenden fünf Integrationen, dreimal nach x und zweimal nach y, durch ein dieser Differenzialfunction vorgesetztes:

$$\int^{(2)}\int^{(3)}$$

an; so daß wir uns mit der Ausmittelung von:

$$\int^{(2)}\int^{(3)} x^2y\,dx^3\,dy^2$$

zu befassen haben.

Wird nun einmal nach x integrirt, so hat man:

$$\int^{(2)}\int^{(3)} x^2y\,dx^3\,dy^2 = \int^{(2)}\int^{(2)}\left(\frac{1}{3}x^3 + Y\right)y\,dx^2\,dy^2\,,$$

wo Y die willkührliche Constante dieser ersten Integration ist, die, weil y constant behandelt wurde, eine willkührliche Function von y vorstellt.

Integrirt man den Differenzialausdruck rechterhand abermals nach x, so hat man, wegen:

$$\int^{(2)}\int^{(2)}\left(\frac{1}{3}x^3 + Y\right)y\,dx^2\,dy^2 = \int^{(2)}\int^{(1)}\left(\frac{1}{12}x^4 + Yx + Y'\right)y\,dx\,dy^2\,,$$

folgende Gleichung:

$$\int^{(2)}\int^{(3)} x^2y\,dx^3\,dy^2 = \int^{(2)}\int^{(1)}\left(\frac{1}{12}x^4 + Yx + Y'\right)y\,dx\,dy^2\,,$$

wo Y' die Constante der zweiten Integration, und daher gleichfalls eine willkührliche Function von y ist.

Wir brechen mit dem Integriren nach x ab, indem wir den Differenzialausdruck zur Rechten zuerst nach y integriren. Man hat dann, wegen:

$$\int\left(\frac{1}{12}x^4 + Yx + Y'\right)y\,dy = \frac{1}{24}x^4y^2 + x\int Yy\,dy + \int Y'y\,dy + X\,,$$

oder auch, da Y und Y' willkührliche Functionen von y sind, wodurch der Ausdruck rechterhand auch, wie folgt, gestellt werden darf:

$$\frac{1}{24}x^4y^2 + xY + Y' + X,$$

folgende Gleichung:

$$\int^{(2)}\int^{(3)} x^2y\,dx^3\,dy^2 = \int^{(1)}\int^{(1)}\left(\frac{1}{24}x^4y^2 + xY + Y' + X\right)dx\,dy,$$

in der X eine willkührliche Function von x ist, welche Gleichung auch folgendermaßen gestellt werden darf:

$$\int^{(2)}\int^{(3)} x^2y\,dx^3\,dy^2 = \int\int\left(\frac{1}{24}x^4y^2 + xY + Y' + X\right)dx\,dy.$$

Integrirt man nun rechterhand zuerst nach x und hierauf nach y, oder auch umgekehrt; so erhält man in dem einen wie in dem andern Falle, beachtend die Willkührlichkeit von Y und Y′ als Functionen von y und die von X als Function von x, folgende Endgleichung:

$$\int^{(2)}\int^{(3)} x^2y\,dx^3\,dy^2 = \frac{1}{360}x^5y^3 + \frac{1}{2}x^2Y + xY' + Y'' + yX + X',$$

wo Y, Y′, Y″ willkührliche Functionen von y, und X, X′ dergleichen von x sind.

Der Ausdruck zur Rechten vom Gleichheitszeichen stellt die Integralfunction der nichtlinearen Differenzialfunction:

$$x^2y\,dx^3\,dy^2$$

in dem Sinne vor, daß wenn ersterer nach x dreimal und nach y zweimal partiell differenzirt wird, wobei die Differenzialien von x und y jedesmal als Constante auftreten, die zuletzt angegebene Differenzialfunction als Endergebniß sich darstellt.

306. Da das successive Integrationsverfahren im vorliegenden Falle demselben in Nr. 297 besprochenen Mißstande, wenn nicht in noch vergrößertem Maße, unterliegt; so theilen wir auch hier analoge zu den im vorangeschickten Paragraphen unter (I) und (II) aufgestellten Gleichungen mit, die, wie diese, besagten Mißstand beseitigen.

Wenn y unabhängig von x ist, und $\varphi(x,y)$ eine Function von x und y vorstellt; dann bietet die Gleichung (II) Nr. 302 auch folgende dar:

$$\int^{(m)} q(x,y)dx^m = \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\int_a^x (x-x')^{m-1}\,q(x',y)dx'$$
$$+ Y_0x^{m-1} + Y_1x^{m-2} + Y_2x^{m-3} + \ldots + Y_{m-2}x + Y_{m-1},$$

wo $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots Y_{m-1}$ beliebige, von x unabhängige Größen, also willkührliche Functionen von y vorstellen und wo $\alpha$, gleichwie in der Gleichung (II), einen Zahlenwerth vorstellt, der in die Differenzialformel zur Rechten statt $x'$ gesetzt, ein unendlich kleinwerdendes Resultat hervorruft.

Multipliciren wir diese Gleichung mit $dy^n$ und integriren dann beiderseits n mal hintereinander in Bezug auf y, so erhalten wir, wenn der Kürze wegen:

$$\sum_{k=0}^{k=m-1} Y_k x^{m-k-1} = Y_0 x^{m-1} + Y_1 x^{m-2} + Y_2 x^{m-3} + \ldots + Y_{m-1} x + Y_{m-1}$$

gesetzt wird, die Gleichung:

$$\int^{(n)} \int^{(m)} q(x,y) dx^m dy^n =$$

$$= \int^{(n)} \left\{ \frac{1}{1.2.3 \ldots (m-1)} \int_{\alpha}^{x} (x-x')^{m-1} q(x', y) dx' + \sum_{k=0}^{k=m-1} Y_k x^{m-k-1} \right\} dy^n .$$

Der Ausdruck innerhalb der Klammern zur Rechten vom Gleichheitszeichen dieser Gleichung ist eine Function von x und y; stellt man solche, und zwar nur einstweilen, durch $\psi(x, y)$ vor, nämlich:

$$\psi(x,y) = \frac{1}{1.2.3 \ldots (m-1)} \int_{\alpha}^{x} (x-x')^{m-1} q(x', y) dx' + \sum_{k=0}^{k=m-1} Y_k x^{m-k-1} ;$$

so hat man:

$$\int^{(n)} \int^{(m)} q(x,y) dx^m dy^n = \int^{(n)} \psi(x,y)\, dy^n ,$$

und wenn der Ausdruck rechterhand nach derselben oben citirten Gleichung (II) umgeformt wird, hat man auch:

$$\int^{(n)} \int^{(m)} q(x,y) dx^m dy^n = \frac{1}{1.2.3 \ldots (n-1)} \int_{\beta}^{y} (y-y')^{n-1} \psi(x,y') dy'$$

$$+ X_0 y^{n-1} + X_1 y^{n-2} + X_2 y^{n-2} + \ldots + X_{n-2} y + X_{n-1} ,$$

in welcher Gleichung $X_0, X_1, X_2, \ldots X_{n-1}$ beliebige von y unabhängige Größen oder auch willkührliche Functionen von x vorstellen, und wo $\beta$ eine Zahlengröße vorstellt, die in die Differenzialformel:

$$(y-y')^{n-1}\,\psi(x,y')\,dy'$$

statt $y'$ gesetzt, einen unendlich kleinwerdenden Werth hervorruft.

Stellen wir die willkührliche Function $Y_k$ von y, falls in derselben y in $y'$ übergeht, dnrch $Y'_k$ vor, so bietet die obige $\psi(x,y)$ darstellende Gleichung folgende dar:

$$\psi(x,y')=\frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\int_{\alpha}^{x}(x-x')^{m-1}\varphi(x',y')dx'+\sum_{k=0}^{k=m-1}Y'_k\,x^{m-k-1}\;;$$

wenn überdieß noch:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1}X_k\,y^{n-k-1}=X_0\,y^{n-1}+X_1\,y^{n-2}+X_2\,y^{n-3}+\ldots+X_{n-2}\,y+X_{n-1}$$

gesetzt wird, erhält man:

$$\int^{(n)}\int^{(m)}q(x,y)dx^m\,dy^n=$$

$$=\frac{1}{1.2.3\ldots.(n-1).1.2.3\ldots.(m-1)}\int_{\beta}^{y}\int_{\alpha}^{x}(x-x')^{m-1}(y-y')^{n-1}\,q(x',y')\,dx'\,dy'$$

$$+\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\int_{\beta}^{y}(y-y')^{n-1}\sum_{k=0}^{k=m-1}Y'_k\,x^{m-k-1}\,dy'+\sum_{k=0}^{k=n-1}X_k y^{n-k-1}\;;$$

nun ist:

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\int_{\beta}^{y}(y-y')^{n-1}\sum_{k=0}^{k=m-1}Y'_k\,x^{m-k-1}\,dy'=$$

$$=\sum_{k=0}^{k=m-1}x^{m-k-1}\int_{\beta}^{y}\frac{(y-y')^{n-1}\,Y'_k}{1.2.3\ldots(n-1)}\,dy'\;,$$

und wegen der Willkührlichkeit der Function $Y'_k$ kann man auch

$$\int_{\beta}^{y}\frac{(y-y')^{n-1}\,Y'_k}{1.2.3\ldots(n-1)}\,dy'\quad\text{durch}\quad Y_k$$

ersetzen, wo $Y_k$ eine dem Stellenzeiger k entsprechende willkührliche Function von y ist: daher hat man, nach Vollziehung der durch die

Summenzeichen angedeuteten Operationen, in dem Falle zweier Variabeln, folgende Gleichung:

$$\int^{(n)}\int^{(m)} q(x,y)\,dx^m\,dy^n =$$

$$= \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1).1.2.3\ldots(m-1)} \int_\beta^y\int_\alpha^x (x-x')^{m-1}(y-y')^{n-1} q(x',y')\,dx'\,dy'$$

$$+ Y_0 x^{m-1} + Y_1 x^{m-2} + Y_2 x^{m-3} + \ldots + Y_{m-2}\,x + Y_{m-1}$$

$$+ X_0 y^{n-1} + X_1 y^{n-2} + X_2 y^{n-3} + \ldots + X_{n-2}\,y + X_{n-1}\,. \quad \text{(III)}$$

Diese Gleichung, in der:

$$Y_0,\ Y_1,\ Y_2,\ Y_3,\ \ldots Y_{m-2},\ Y_{m-1}$$

willkührliche Functionen von y, und:

$$X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ \ldots X_{n-2},\ X_{n-1}$$

dergleichen von x bedeuten, stellt das $(n+m)$fache Integrale linkerhand vom Gleichheitszeichen nur noch von der Ausmittelung des Doppelintegrals:

$$\int\int (x-x')^{m-1}(y-y')^{n-1} q(x',y')\,dx'\,dy'$$

oder wenn die Binomien:

$$(x-x')^{m-1},\ (y-y')^{n-1}$$

aufgelöst werden, von der Ausmittelung eines Doppelintegrals der Form:

$$\int\int x^r y^s \varphi(x,y)\,dx\,dy$$

abhängig dar, wo r aller ganzen positiven Werthe von und mit 0 bis und mit $m-1$, und n jedes ganzen positiven Werthes von und mit 0 bis und mit $n-1$ fähig ist. Die Analogie dieser Gleichung (III) mit denen am Eingange erwähnten des vorhergehenden Paragraphen erscheint sonach hergestellt, wie auch die Lösung der Integration einer eingliedrigen nichtlinearen Differenzialfunction zweier Variabeln dem in vorliegender Abtheilung der Integralrechnung uns gesteckten Endziele zugeführt.

307. Mit der gleichen Ausführlichkeit, mit der wir in der vorangehenden Nr. die Integration der eingliedrigen nichtlinearen Differenzialfunction zweier Variabeln behandelt haben, werden wir

noch die Integration einer solchen Differenzialfunction dreier Variabeln mittheilen. Da hieraus das Verfahren und Endergebniß bei analogen Differenzialfunctionen mit noch mehr als drei Variabeln auf ganz unzweideutige Weise zu entnehmen sein wird; so werden wir auch jede weitere Besprechung und Angabe dieser letztern auf sich beruhen lassen, und dann sofort zu interessantern Mittheilungen über nichtlineare Differenzialfunctionen mit mehreren Variabeln übergehen.

Vorerst bemerken wir, daß die willkührlichen Functionen von y:

$$Y_0,\ Y_1,\ Y_2,\ \ldots\ Y_{m-1}$$

der Gleichung (III) vorhergehender Nr. außer der Variabeln y, mit alleiniger Ausschließung der Variabeln x, auch noch andere Größen impliciren können. Eine ähnliche Bewandtniß hat es mit den willkührlichen Functionen:

$$X_0,\ X_1,\ X_2,\ \ldots\ X_{n-1}$$

von x derselben Gleichung, die, die Variable y ausgenommen, was immer für allgemeine Größen anderer Art umfassen dürfen.

Dieses vorausgesetzt bietet dieselbe Gleichung (III), wenn $\varphi(x, y, z)$ eine Function von x, y und z vorstellt, folgende dar:

$$\int^{(n)}\int^{(m)} \varphi(x, y, z)\, dx^m\, dy^n =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)} \int_\beta^y \int_\alpha^x (x-x')^{m-1}\,(y-y')^{n-1}\,\varphi(x', y', z)\, dx'\, dy'$$

$$+ \sum_{k=0}^{k=m-1} F_k(y, z)\, x^{m-k-1} + \sum_{k=0}^{k=n-1} F'_k(x, z)\, y^{n-k-1}\ ,$$

wo man zur Vereinfachung:

$$\Gamma(m) = 1.2.3\ldots(m-1)\ ,$$

$$\Gamma(n) = 1.2.3\ldots(n-1)$$

gesetzt hat, wo ferner:

$$F_0(y, z),\ F_1(y, z),\ F_2(y, z),\ \ldots\ F_{m-1}(y, z)$$

willkührliche Functionen von y und z, wie:

$$F'_0(x, z),\ F'_1(x, z),\ F'_2(x, z),\ \ldots F'_{n-1}(x, z)$$

dergleichen Functionen von x und z sind, und wo endlich die Summenzeichen nur über die ganzen und positiven Werthe von k sich erstrecken.

Wird nun diese Gleichung mit $dz^p$ multiplicirt und p mal hintereinander nach z integrirt, so hat man:

$$\int^{(p)}\int^{(n)}\int^{(m)} \varphi(x,y,z)\,dx^m\,dy^n\,dz^p = \int^{(p)} \psi(x,y,z)\,dz^p\,,$$

wo einstweilen:

$$\psi(x,y,z) = \frac{1}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)} \int_\beta^y \int_\alpha^x (x-x')^{m-1}\,(y-y')^{n-1}\,\varphi(x',y',z)\,dx'\,dy'$$

$$+ \sum_{k=0}^{k=m-1} F_k(y,z)\,x^{m-k-1} + \sum_{k=0}^{k=n-1} F'_k(x,z)\,y^{n-k-1}$$

gesetzt ward.

Bei der Vollziehung des p fachen Integrals:

$$\int^{(p)} \psi(x,y,z)\,dz^p$$

nach z treten die Größen x und y als Constante auf; daher hat man, nach Gleichung (II) Nr. 302, folgende Bestimmung:

$$\int^{(p)} \psi(x,y,z)\,dz^p = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_\gamma^z (z-z')^{p-1}\,\psi(x,y,z')\,dz' + \sum_{k=0}^{k=p-1} F''_k(x,y)\,z^{p-k-1}\,,$$

wo

$$\Gamma(p) = 1.2.3.\ldots.(p-1)$$

ist, wo ferner:

$$F''_0(x,y),\ F''_1(x,y),\ F''_2(x,y),\ \ldots F''_{p-1}(x,y)$$

willkührliche Functionen von x und y sind und wo endlich $\gamma$ einen Zahlenwerth vorstellt, der statt $z'$ in:

$$(z-z')^{p-1}\,\psi(x,y,z')\,dz'$$

gesetzt, eine unendlich kleinwerdende Größe erzeugt.

Setzt man sonach in der obigen $\psi(x,y,z)$ darstellenden Gleichung z in $z'$ um, so erhält man nunmehr:

$$\int^{(p)}\int^{(n)}\int^{(m)} \varphi(x,y,z)\,dx^m\,dy^n\,dz^p =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)\,\Gamma(p)} \int_\gamma^z \int_\beta^y \int_\alpha^x (x-x')^{m-1}(y-y')^{n-1}(z-z')^{p-1}\varphi(x',y',z')\,dx'dy'dz'$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(p)} \int_\gamma^z (z-z')^{p-1} \sum_{k=0}^{k=m-1} F_k(y,z')\,x^{m-k-1}\,dz'$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(p)} \int_\gamma^z (z-z')^{p-1} \sum_{k=0}^{k=n-1} F'_k(x,z')\,y^{n-k-1}\,dz'$$

$$+ \sum_{k=0}^{k=p-1} F''_k(x,y)\,z^{p-k-1} \;;$$

nun hat man die Gleichung:

$$\frac{1}{\Gamma(p)} \int_\gamma^z (z-z')^{p-1} \sum_{k=0}^{k=m-1} F_k(y,z')\,x^{m-k-1}\,dz' =$$

$$= \sum_{k=0}^{k=m-1} x^{m-k-1} \int_\gamma^z \frac{(z-z')^{p-1}\,F_k(y,z')}{\Gamma(p)}\,dz' \;,$$

wie auch:

$$\frac{1}{\Gamma(p)} \int_\gamma^z (z-z')^{p-1} \sum_{k=0}^{k=n-1} F'_k(x,z')\,y^{n-k-1}\,dz' =$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n-1} y^{n-k-1} \int_\gamma^z \frac{(z-z')^{p-1}\,F'_k(x,z')}{\Gamma(p)}\,dz' \;;$$

und vermöge der Willkührlichkeit der Functionen:

$F_k(y,z')$ und $F'_k(x,z')$

ist man ferner:

$$\int_\gamma^z \frac{(z-z')^{p-1}\,F_k(y,z')}{\Gamma(p)}\,dz' \text{ durch } F_k(y,z) \;,$$

wie

$$\int_{\gamma}^{z} \frac{(z-z')^{p-1}\, F'_k(x,z')}{\Gamma(p)}\, dz' \text{ durch } F_k(z,x)$$

zu ersetzen berechtiget: daher erhält man, wenn die durch die Summenzeichen angedeuteten Operationen vollzogen werden, folgendes Endergebniß:

$$\int^{(p)}\int^{(n)}\int^{(m)} q(x,y,z)\, dx^m\, dy^n dz^p =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)\,\Gamma(p)} \int_{\gamma}^{z}\int_{\beta}^{y}\int_{\alpha}^{x} (x-x')^{m-1}\,(y-y')^{n-1}\,(z-z')^{p-1}\, q(x',y',z')\,dx'dy'dz'$$

$$+ F_0(y,z)\,x^{m-1} + F_1(y,z)\,x^{m-2} + \ldots + F_{m-2}(y,z)\,x + F_{m-1}(y,z)$$

$$+ F'_0(z,x)\,y^{n-1} + F'_1(z,x)\,y^{n-2} + \ldots + F'_{n-2}(z,x)\,y + F'_{n-1}(z,x)$$

$$+ F''_0(x,y)\,z^{p-1} + F''_1(x,y)\,z^{p-2} + \ldots + F''_{p-2}(x,y)\,z + F''_{p-1}(x,y)\,, \quad \text{(IV)}$$

aus dem die Richtigkeit unserer Aussage am Eingange vorliegender Nr. ohne weiters hervorgeht und uns, wie daselbst erwähnt wurde, der Ableitung und Mittheilung ähnlicher Gleichungen für eingliedrige, nichtlineare Differenzialfunctionen mit vier und noch mehr Variabeln überhebt.

**308.** Wie aus den vorausgeschickten Nrn. hervorgeht, reducirt sich das $(m+n)$ malige Integriren der Differenzialfunction:

$$\varphi(x,y)\,dx^m\,dy^n\,,$$

auf ein zweimaliges der Differenzialfunction:

$$(x-x')^{m-1}\,(y-y')^{n-1}\,\varphi(x',y')\,dx'\,dy'\,,$$

nach den zwei Variabeln $x'$ und $y'$; eben so hängt das $(m+n+p)$ fache Integrale der Differenzialfunction:

$$\varphi(x,y,z)\,dx^m\,dy^n\,dz^p\,,$$

von dem dreifachen Integrale der Differenzialfunction:

$$(x-x')^{m-1}\,(y-y')^{n-1}\,(z-z')^{p-1}\,\varphi(x',y',z')\,dx'\,dy'\,dz'\,,$$

nach den drei Variabeln $x'$, $y'$ und $z'$ ab; und da die eingliedrigen nichtlinearen Differenzialfunctionen mit vier und noch mehr Variabeln ähnliche Reductionen eingehen: so haben wir uns lediglich mit mehrfachen Integralien, wie die folgenden:

$$\int\int F(x,y)\,dx\,dy,\quad \int\int\int F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \text{ u. s. w.}$$

noch zu befassen, wo $F(x,y)$, $F(x,y,z)$ u. s. w. Functionen von $x,y$, von $x,y,z$ u. s. w. vorstellen.

Diesem nach werden wir in den nächstfolgenden Nrn. Doppelintegralien der Form:

$$\int\int \varphi(x,y)\,dx\,dy$$

in Untersuchung ziehen, wo die Variabeln x und y der Function $\varphi(x,y)$, als in keinerlei gegenseitigen Abhängigkeit stehend vorausgesetzt sein werden; hierauf, von Nr. 324 bis zum Schlusse vorliegenden Kapitels werden wir in ähnlicher Weise und Voraussetzung das dreifache Integrale:

$$\int\int\int \varphi(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

mit einer Ausführlichkeit noch discutiren, daß eine besondere Betrachtung der vier- und mehrfachen Integralien, als unnöthig und überflüssig erkannt werden soll.

309. Stellt man durch $F(x,y)$ eine Function der von einander unabhängigen Variabeln x und y vor, die zweimal nach einander partiell differenzirt, einmal nach x und einmal nach y, die Differenzialfunction $\varphi(x,y)\,dx\,dy$ darbietet; d. h., besteht die Gleichheit:

$$\frac{d^2 F(x,y)}{dx\,dy} = \varphi(x,y)\,, \qquad (1)$$

unter der einzigen Voraussetzung jedoch, daß in $F(x,y)$ keine Größe allgemeiner Art vorkömmt, die nicht auch in $\varphi(x,y)$ enthalten ist: so hat man nach dem Vorausgeschickten:

$$\int\int \varphi(x,y)\,dx\,dy = F(x,y) + X + Y\,, \qquad (2)$$

wo X und Y respective willkührliche Functionen von x und y vorstellen; und die ganze Schwierigkeit, diese Gleichung darzustellen, reducirt sich darauf, zu einer vorgelegten Function wie $\varphi(x,y)$ eine der Gleichheit (1) entsprechende Function $F(x,y)$ zu finden.

Dieses wird erreicht, wenn man zuerst die Differenzialfunction $\varphi(x,y)\,dx$ in gewöhnlicher Weise nach x integrirt, dabei aber y als Constante behandelt; dann das Ergebniß, das durch $f(x,y)$ vorgestellt sein mag, mit dy multiplicirt, nach y integrirt und dabei x als

Constante behandelt: das Endergebniß ist dann die Function $F(x, y)$. Berücksichtiget man, was vorhin über beide Functionen $\varphi(x, y)$ und $F(x, y)$ ausgesagt wurde, daß letztere nämlich keine allgemeine Größe enthalten soll, die nicht auch in der ersteren vorkömmt; so leuchtet sofort ein, daß auch $f(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ nur dieselben allgemeinen Größen enthalten dürfen, daß demnach dem unmittelbaren Ergebnisse der ersten Integration, oder der Function $f(x, y)$, weder eine willkührliche Constante, noch eine solche Function von y beizufügen ist. Ganz auf dieselbe Function $F(x, y)$ gelangt man, wenn die Ordnungsfolge der eben beschriebenen partiellen Integrationen umgekehrt wird. Die Lösung dieser zweimaligen Integration fällt in dem einen wie in dem andern Falle dem ersten Theile der Integralrechnung zu; so daß, wenn keine weitere Anforderung gestellt wird, der Ausdruck zur Rechten in (2) jedesmal darstellbar ist, und die Gleichungen (1) und (2), als zugleich bestehend erklärt werden können. — Vermöge der Willkührlichkeit der Functionen X und Y aber kann die Integralfunction in (2) oder der Ausdruck zur Rechten vom Gleichheitszeichen gewissen Anforderungen, die Zweck und Ziel der Integralrechnung sind, unterzogen werden. Ein Paar derselben werden wir daher noch in den nächstfolgenden Nrn. vorführen und, denselben zu entsprechen, diese eben erwähnten willkührlichen Functionen benützen.

**310.** Eine Anforderung, die einfachste und am häufigsten vorkommende ist folgende.

Die Integralfunction in Gleichung (2) so darzustellen, daß dieselbe erstens bei einem besondern Werth von x, etwa bei $x=a$, in Null übergehe, die Variable y mag dann was immer für einen Werth annehmen; dann zweitens soll dieselbe Integralfunction bei einem besondern Werth von y, etwa bei $y=b$, in Null übergehen, wo alsdann der Werth der Variabeln x willkührlich verbleibt.

Stellt man nun die willkührlichen Functionen X und Y respective durch $\psi(x)$ und $\psi'(y)$ dar, so kann die Gleichung (2) durch folgende ersetzt werden:

$$\int\int \varphi(x, y)\, dx\, dy = F(x, y) + \psi(x) + \psi'(y)\,,$$

wo $\psi(x)$ eine willkührliche Function von x und $\psi'(y)$ eine solche von y ist, die beide mittelst der gestellten Anforderung bestimmt, und aus dieser Gleichung eliminirt werden können.

Die gedoppelte Anforderung verlangt nämlich die Realisirung folgender zwei Gleichheiten:

$$0 = F(a, y) + \psi(a) + \psi'(y),$$
$$0 = F(x, b) + \psi(x) + \psi'(b),$$

erstere für alle Werthe von y und letztere für alle Werthe von x; sonach hat man auch, wenn in der erstern $y = b$, oder in der letztern $x = a$ gesetzt wird, bei der einen wie bei der andern Annahme die Gleichung:

$$0 = F(a, b) + \psi(a) + \psi'(b);$$

eliminirt man nun aus dieser und den beiden vorangehenden Gleichheiten $\psi(\alpha)$ und $\psi(b)$, so ergiebt sich:

$$0 = F(a, y) + F(x, b) - F(a, b) + \psi(x) + \psi'(y),$$

und wenn endlich diese von der vorhin aufgestellten Integralgleichung subtrahirt wird, erhält man die verlangte Gleichung:

$$\int\int \varphi(x, y)\, dx\, dy = F(x, y) - F(a, y) - F(x, b) + F(a, b), \quad (3)$$

welche keine willkührliche Function mehr enthält und vollkommen der am Eingange gestellten zweifachen Anforderung entspricht. Der Ausdruck zur Rechten genügt auch, wenn die Gleichung (1) vorangehender Nr. festgestellt wird, dem Begriffe eines Doppelintegrals zweier Variabeln, durch zweimaliges partielles Differenziren desselben nämlich, einmal nach x und einmal nach y, die Differenzialfunction $\varphi(x, y)\, dx\, dy$ darzubieten.

**311.** Eine zweite Anforderung, die, wie der Verfolg dieser Nr. zeigen wird, auf dasselbe, als die in vorangehender Nr. behandelte hinausläuft, ist folgende.

Das Doppelintegrale:

$$\int\int \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

dergestalt zu ermitteln, daß wenn zuerst die Integration partiell nach x und hierauf in gleicher Weise nach y vollzogen wird, die zuerst sich ergebende Integralfunction (welche noch nach y zu integriren ist) für $x = a$ und

das Endergebniß oder die gesuchte Integralfunction für $y=b$ in Null übergehe; oder aber auch zweitens, wenn man die Ordnungsfolge in den partiellen Integrationen umkehrt, soll dann die erste partielle Integralfunction (die noch nach x zu integriren sein wird) für $y=b$ und das Endergebniß für $x=a$ in Null übergehen.

Der erstern Anforderung zu entsprechen, nämlich wenn zuerst partiell nach x und hierauf in gleicher Weise nach y integrirt wird, sei:

$$\int \varphi(x,y)\,dx = f(x,y) + Y,$$

wo Y eine willkührliche Function von y vorstellt, und $f(x,y)$ unmittelbares Ergebniß der partiellen Integration nach x ist; so daß man

$$\frac{d.f(x,y)}{dx} = \varphi(x,y)$$

hat.

Da nun diese Integralfunction der Anforderung gemäß für $x=a$ in Null übergehen soll, so hat man:

$$0 = f(a,y) + Y,$$

die die willkührliche Function Y von y nunmehr bestimmt; dadurch aber geht die vorige Integralgleichung in folgende über:

$$\int \varphi(x,y)\,dx = f(x,y) - f(a,y),$$

aus welcher, nach beiderseitiger Multiplication mit dy und partieller Integration nach y, die folgende gezogen wird:

$$\int\int \varphi(x,y)\,dx\,dy = \int \{ f(x,y) - f(a,y) \}\,dy.$$

Hat die Function $F(x,y)$ der Variabeln x und y dieselbe Bedeutung wie in beiden vorangehenden Nrn., dann ist nothwendig:

$$\int f(x,y)\,dy = F(x,y),$$

sonach auch

$$\int f(a,y)\,dy = F(a,y);$$

so daß nunmehr die vorige Gleichung in folgende übergeht:

$$\int\int \varphi(x,y)\,dx\,dy = F(x,y) - F(a,y) + X,$$

in der X eine willkührliche Function von x vorstellt.

Der Ausdruck zur Rechten stellt bei Zugrundelegung der Gleichung (1) in Nr. 309 die Integralfunction der Differenzialfunction:

$$\varphi(x, y)\,dx\,dy$$

vor, und da solche der Anforderung gemäß für $y = b$ in Null übergehen soll; so ergiebt sich zur Bestimmung der willkührlichen Function X die Gleichung:

$$0 = F(x, b) - F(a, b) + X\,,$$

die mit der vorhergehenden, durch Subtraction verbunden, folgende Endgleichung darbietet:

$$\int\int \varphi(x, y)\,dx\,dy = F(x, y) - F(a, y) - F(x, b) + F(a, b)\,. \quad (3')$$

Vergleicht man diese mit (3) vorangehender Nr., so leuchtet deren Identität ohne weiters ein; woraus nun die Folgerung gezogen wird, daß ein Genügethun der zweiten, am Eingange vorliegender Nr. gestellten Anforderung auf dieselbe so eben aufgestellte Endgleichung geführt haben würde. — Alles vereint, berechtiget zum Schlusse, daß die Gleichung (3) vorangehender Nr. nicht nur der daselbst gestellten Anforderung genügt; sondern dieselbe Gleichung (3) genügt auch beiden in vorliegender Nr. gestellten Anforderungen eines Doppelintegrals.

312. Nach dem Vorausgeschickten sind wir in der Lage zur Begriffsbestimmung sowohl, als zu einer ausführlichen Discussion der bestimmten Doppelintegralien überzugehen.

Wird in Gleichung (3) Nr. 310.

$$x = A \text{ und } y = B$$

gesetzt, so deutet man solches im Ausdrucke zur Linken vom Gleichheitszeichen dieser Gleichung in ähnlicher Weise wie bei Integralien einer Variabeln, in folgender Weise nämlich, an:

$$\int_b^B \int_a^A \varphi(x, y)\,dx\,dy\,.$$

Nach der citirten Nr. bedeutet dieses Symbol soviel als: Die Integralfunction des Doppelintegrals:

$$\int\int \varphi(x, y)\,dx\,dy$$

soll für $x = A$ und $y = B$ bestimmt werden, falls dieselbe für $x = a$ oder $y = b$ verschwindet. Wir werden besagtes Symbol in der Folge bestimmtes Doppelintegrale nennen, dessen Werth, nach der vorhin citirten Gleichung (3), folgende Gleichung darstellt:

$$\int_b^B \int_a^A q(x, y)\, dx\, dy = F(A, B) - F(a, B) - F(A, b) + F(a, b)\,, \qquad (4)$$

wenn nämlich die Gleichung (1) in Nr. 309 zu Grunde gelegt wird.

Berücksichtiget man die im ersten Theile der Integralrechnung, in Nr. 155 aufgestellte Gleichung (G), so hat man auch:

$$\int_b^B \int_a^A q(x,y)\, dx\, dy = \int_a^A \int_b^B q(x, y)\, dy\, dx\,, \qquad (5)$$

welche Gleichheit nur insofern Bestand hat, als die Integrationsgrenzen von x, nämlich a und A unabhängig von y, und die Integrationsgrenzen von y, nämlich b und B von x unabhängig sind.

Vertauscht man in (4) entweder a mit A oder b mit B, so erhält man in jenem oder in diesem Falle die erste oder die zweite der nun folgenden zwei Gleichheiten:

$$\left.\begin{aligned} \int_b^B \int_A^a q(x, y)\, dx\, dy &= -\int_b^B \int_a^A q(x, y)\, dx\, dy\,, \\ \int_B^b \int_a^A q(x, y)\, dx\, dy &= -\int_b^B \int_a^A q(x, y)\, dx\, dy\,, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

deren jede mit der Gleichheit (4) in Nr. 32 des ersten Theiles analog ist, und eine ähnliche Deutung wie diese zuläßt.

Vertauscht man ferner in der oben aufgestellten Gleichung (4) a mit A, und zugleich b mit B, so ergiebt sich folgende:

$$\int_B^b \int_A^a q(x, y)\, dx\, dy = \int_b^B \int_a^A q(x, y)\, dx\, dy\,; \qquad (7)$$

diese Gleichheit sagt aus, daß der Werth des Doppelintegrals:

$$\int\int q(x, y)\, dx\, dy$$

für $x = A$ und $y = B$, falls dasselbe für $x = a$ oder $y = b$ verschwindet, mit dem Werthe desselben unter der genau entgegengesetzten Annahme (für $x = a$ und $y = b$, falls dasselbe für $x = A$ oder $y = B$ verschwindet) identisch sei.

**313.** Der Werth des bestimmten Doppelintegrals:

$$\int_b^B \int_a^A q(x, y)\, dx\, dy\,,$$

wie solchen die Gleichung (4) vorangehender Nr. darstellt, giebt

Summen von Reihen an, denen ähnlich, die das bestimmte Integrale einer Variabeln, nämlich:

$$\int_a^b q(x)\,dx\,,$$

in den Nrn. 33 und 36 des ersten Theiles der Integralrechnung summirt.

Zur Begründung dieser Behauptung gehen wir auf den durch die Gleichung (1) Nr. 309 angedeuteten Zusammenhang unter den Functionen $\varphi(x,y)$ und $F(x,y)$ zurück, der, vermöge dieser Gleichung und mit Zuziehung des in Nr. 251 Mitgetheilten, auch durch folgende Grenzgleichung ausgedrückt werden kann:

$$\omega\omega' q(x,y) = \text{Lim}: \{F(x+\omega, y+\omega') - F(x+\omega, y) - F(x, y+\omega') + F(x,y)\}\,,$$

die, wenn $\omega$ und $\omega'$ unendlich kleinwerdende Größen vorstellen, für alle jene Werthe von x und y Bestand hat, für die die Function $F(x,y)$ continuirlich verbleibt. Wenn sonach a und A im Bereiche der Continuitätsgrenzen dieser Function $F(x,y)$ in Bezug auf die Variable x liegen, wie b und B in ähnlicher Weise in Bezug auf y; so ist man in dieser Grenzgleichung für x alle Werthe von $x=a$ bis $x=A$ und für y alle von $y=b$ bis $y=B$ zu setzen berechtiget.

Werden nun in besagter Grenzgleichung statt x, nach der Reihe, die Werthe:

$$a,\ a+\omega_0,\ a+\omega_0+\omega_1,\ \ldots\ a+\omega_0+\omega_1+\ldots+\omega_{n-2}\,,$$

zugleich aber auch statt $\omega$ die unendlich kleinwerdenden Größen:

$$\omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \ldots\ldots\ \omega_{n-1}$$

gesetzt; wird dann die Summe der so gewonnenen n Gleichungen genommen, unter denen die $(k+1)$te folgender Form ist:

$$\omega_k\omega'\, q(a+\omega_0+\omega_1+\omega_2\ldots+\omega_{k-1},\ y) =$$

$$= \text{Lim}: \left\{\begin{array}{l} F(a+\omega_0+\omega_1\ldots.+\omega_k,\ y+\omega') - F(a+\omega_0+\omega_1\ldots.+\omega_k,\ y) \\ -F(a+\omega_0+\omega_1\ldots.+\omega_{k-1},\ y+\omega') + F(a+\omega_0+\omega_1\ldots.+\omega_{k-1},\ y) \end{array}\right\},\ (\alpha)$$

in der man also statt k die Zahlenwerthe:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ n-1$$

zu setzen hat: so stellt sich als Ergebniß dieser Summation folgende Grenzgleichung heraus:

$$\text{Lim}: \{ F(A, y+\omega') - F(A,y) - F(a, y+\omega') + F(a,y) \} =$$

$$= \omega' \{ \omega_0 q(a,y) + \omega_1 q(a+\omega_0, y) \ldots + \omega_{n-1} q(a+\omega_0+\omega_1 \ldots + \omega_{n-2}, y) \}, \quad (\beta)$$

in der, unter der Voraussetzung n stellt eine unendlich großwerdende ganze und positive Zahl vor, folgende Gleichung:

$$A = a + \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \ldots + \omega_{n-1}$$

festgestellt worden ist.

Setzt man in die Gleichung ($\beta$) statt y der Reihe nach die Werthe:

$$b,\ b+\omega'_0,\ b+\omega'_0+\omega'_1, \ldots b+\omega'_0+\omega'_1+\omega'_2+\ldots+\omega'_{n'-2}, \quad (\gamma)$$

zugleich aber auch statt $\omega'$ die Werthe:

$$\omega'_0,\ \omega'_1,\ \omega'_2, \ldots \omega'_{n'-1}, \quad (\delta)$$

addirt dann die sich so ergebenden n' Gleichungen; so gelangt man auf dieselbe Endgleichung, als wenn man in jede der n Gleichungen, deren allgemeiner Repräsentant die Gleichung ($\alpha$) ist, die n' Werthe für y aus ($\gamma$) und zugleich für $\omega'$ die n' Werthe aus ($\delta$) gesetzt, dann die sämmtlichen so erhaltenen nn' Gleichungen, deren allgemeiner Repräsentant der folgende ist:

$$\omega_k \omega'_{k'} q(a+\omega_0+\omega_1+\ldots+\omega_{k-1},\ b+\omega'_0+\omega'_1+\ldots+\omega'_{k'-1}) =$$

$$= \text{Lim}: \left\{ \begin{array}{l} F(a+\omega_0+\omega_1+\omega_2\ldots+\omega_k, b+\omega'_0+\omega'_1+\omega'_2\ldots+\omega'_{k'}) \\ -F(a+\omega_0+\omega_1+\omega_2\ldots+\omega_k, b+\omega'_0+\omega'_1+\omega'_2\ldots+\omega'_{k'-1}) \\ -F(a+\omega_0+\omega_1+\omega_2\ldots+\omega_{k-1}, b+\omega'_0+\omega'_1+\omega'_2\ldots+\omega'_{k'}) \\ +F(a+\omega_0+\omega_1+\omega_2\ldots+\omega_{k-1}, b+\omega'_0+\omega'_1+\omega'_2\ldots+\omega'_{k'-1}) \end{array} \right\}, \quad (\varepsilon)$$

unter der Annahme addirt hätte, daß k die Zahlenwerthe:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots n-1$$

und k' die folgenden:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots n'-1$$

durchläuft. Diese Endgleichung nun ist folgende:

$$F(A,B) - F(a,B) - F(A,b) + F(a,b) =$$

$$= \omega'_0 \{ \omega_0 q(a,b) + \omega_1 q(a+\omega_0, b) + \ldots + \omega_{n-1} q(a+\omega_0+\omega_1+\omega_2 \ldots \omega_{n-2}, b) \}$$

$$+ \omega'_1 \{ \omega_0 q(a, b+\omega'_0) + \omega_1 q(a+\omega_0, b+\omega'_0) \ldots + \omega_{n-1} q(a+\omega_0+\omega_1 \ldots + \omega_{n-2}, b+\omega'_0) \}$$

$$+$$

$$+\omega'_2\left\{\begin{matrix}\omega_0\,\varphi(a,\ b+\omega'_0+\omega'_1)+\omega_1\,\varphi(a+\omega_0,\ b+\omega'_0+\omega'_1)\,..\\ .....+\omega_{n-1}\,\varphi(a+\omega_0+\omega_1\,..+\omega_{n-2},\ b+\omega'_0+\omega'_1)\end{matrix}\right\}$$
$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$+\omega'_{n'-1}\left\{\begin{matrix}\omega_0\varphi(a,\ b+\omega'_0+\omega'_1..+\omega'_{n-2})+\omega_1\,\varphi(a+\omega_0,\ b+\omega'_0+\omega'_1...+\omega'_{n'-2})\\ .....+\omega_{n-1}\,\varphi(a+\omega_0+\omega_1..+\omega_{n-2},\ b+\omega'_0+\omega'_1...+\omega_{n'-2})\end{matrix}\right\},\ (\zeta)$$

wo n sowohl als n' positive ganze und unendlich großwerdende Zahlen vorstellen, die den Gleichungen:

$$\left.\begin{matrix}A=a+\omega_0+\omega_1+\omega_2+...+\omega_{n-1},\\ B=b+\omega'_0+\omega'_1+\omega'_2+...+\omega'_{n'-1}\end{matrix}\right\}\quad(\eta)$$

entsprechen, in denen $\omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ ..;\ \omega'_0,\ \omega'_1,\ \omega'_2,\ ...$ unendlich kleinwerdende Zahlengrößen repräsentiren.

Vergleicht man die Gleichung ($\zeta$) mit der Gleichung (4) vorangehender Nr., so leuchtet die Richtigkeit der am Eingange gemachten Behauptung ein, zumal dann, wenn auch die Gleichungen der folgenden zwei Nrn. mit in Betrachtnahme gezogen werden.

**314.** Aehnliche Gleichungen mit ($\zeta$) der vorangehenden Nr. erhält man noch drei, und zwar auf analoge Weise, wie im ersten Theile in Nr. 33 zwei Gleichungen zur Darstellung von $F(b)-F(a)$ erhalten worden. Diese nunmehr zusammengestellt, erhält man mit Berücksichtigung der Gleichung (4) aus Nr. 312 folgende vier Gleichungen:

$$\int_b^B\int_a^A \varphi(x,y)\,dx\,dy=$$
$$=\sum_{k=0}^{k=n-1}\sum_{k'=0}^{k'=n'-1}\omega_k\omega'_{k'}\,\varphi(a+\omega_0+\omega_1+..+\omega_{k-1},\ b+\omega'_0+\omega'_1+..+\omega'_{k'-1}),\quad(8)$$

$$\int_b^B\int_a^A \varphi(x,y)\,dx\,dy=$$
$$=\sum_{k=0}^{k=n-1}\sum_{k'=0}^{k'=n'-1}\omega_k\omega'_{k'}\,\varphi(a+\omega_0+\omega_1+...+\omega_k,\ b+\omega'_0+\omega'_1+..+\omega'_{k'-1}),\quad(9)$$

$$\int_b^B\int_a^A \varphi(x,y)\,dx\,dy=$$
$$+\sum_{k=0}^{k=n-1}\sum_{k'=0}^{k'=n'-1}\omega_k\omega'_{k'}\,\varphi(a+\omega_0+\omega_1+..+\omega_{k-1},\ b+\omega'_0+\omega'_1+..+\omega'_{k'}),\quad(10)$$

$$\int_b^B \int_a^A q(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n-1} \sum_{k'=0}^{k'=n'-1} \omega_k \omega'_{k'} q(a+\omega_0+\omega_1+\ldots+\omega_k,\ b+\omega'_0+\omega'_1+\ldots\omega'_{k'}); \quad (11)$$

in denen jeder auf das zweifache Summenzeichen folgende Ausdruck, da jeder derselben dem Ausdrucke zur Rechten in Gleichung (ε) gleich ist, und dieser wegen der Continuität der Function $F(x,y)$ im Bereiche der festgesetzten Integrationsgrenzen beständig unendlich kleinwerdend ist, eine unendlich kleinwerdende Größe vorstellen muß.

Vermöge der Gleichheit der in diesen vier Gleichungen auf das doppelte Summenzeichen folgenden Ausdrücke mit dem Ausdrucke zur Rechten in der Gleichung (ε) sind dieselben auch unter einander gleich*); daher hat man nur einen dieser vier Ausdrücke in der vorhin erwähnten Beziehung, ob derselbe nämlich eine unendlich kleinwerdende Größe vorstellt, zu untersuchen, um sofort alle vier in dieser Hinsicht beurtheilen zu können. — Stellt sich nämlich einer der besagten vier Ausdrücke für alle angedeuteten Werthe von k und k′ unendlich kleinwerdend heraus; so sind es auch die drei übrigen: die etwa unbekannte Integralfunction $F(x,y)$ ist alsdann für alle zusammengehörenden Werthe von x und y, so von $x=a$ bis $x=A$ und von $y=b$ bis $y=B$ enthalten sind, continuirlich. Ein bestimmtes Doppelintegrale dieser Art stellt eine auf eine anerkannte Einheit basirte mathematische Größe vor, und kann Gegenstand der Betrachtung vorliegenden Werkes sein. — Stellt sich aber einer der oben genannten vier Ausdrücke für irgend welche Werthe von k und k′, die noch im Bereiche der Summengrenzen fallen, als endliche oder gar als unendlich großwerdende Größe heraus; dann hört solch' ein bestimmtes Doppelintegrale auf, irgend welche Bedeutung für uns zu haben und fällt außer dem Bereich unserer Betrachtungen. Denn die Integralfunction $F(x,y)$ legt für jene Werthe von x und y, die solchen Werthen von k

---

*) Wir setzen nämlich die Integralfunction $F(x,y)$ als eindeutige Function der beiden Variabeln x und y voraus.

und k′ entsprechen, die Eigenschaft der Continuität ab; daher kann in diesem Momente besagte Integralfunction der Operation des Differenzirens nicht unterzogen werden, und folglich kann derselben alsdann auch keine Differenzialfunction entsprechen. — Stellt sich endlich einer derselben vier Ausdrücke für irgend welche im Bereiche der Summengrenzen fallenden Werthe von k und k′ unbestimmt heraus, welches offenbar nur dann eintreffen wird, wenn in der zu integrirenden Differenzialfunction der Differenzialcoefficient $\varphi(x,y)$ für die diesen Werthen von k und k′ zugehörenden Werthen von x und y unendlich großwerdend ausfällt; dann ist ein anderer dieser besagten vier Ausdrücke zur Hebung dieser Unbestimmtheit zuzuziehen, und der bestimmte Werth, den dieser hervorruft, entspricht auch den übrigen dreien. Wenn der aus der Unbestimmtheit gewonnene Werth, als endlich oder unendlich großwerdend erkannt wird, dann ist das bestimmte Doppelintegrale, wie schon erwähnt wurde, kein Gegenstand unserer Untersuchung; wohl aber im dritten Falle, wenn das aus der Unbestimmtheit gezogene Resultat eine unendlich klein-werdende Größe repräsentirt *).

Um endlich alles die Gleichungen (8) — (11) betreffende beisammen zu haben, lassen wir hier noch die Gleichungen $(\eta)$, durch Summenzeichen dargestellt, folgen, die nunmehr folgendermaßen aussehen:

$$A = a + \sum_{k=0}^{k=n-1} \omega_k \,, \quad B = b + \sum_{k'=0}^{k'=n'-1} \omega'_{k'} \,. \tag{12}$$

Mit diesen sowohl, als mit den Gleichungen (8) — (11) werden wir noch eine Specialisirung in der folgenden Nr. vornehmen.

315. Zur Specialisirung der allgemeinen Ergebnisse vorangehender Nr. setzen wir die Incremente von x unter einander gleich voraus, und eben so die von y; nämlich wir setzen folgende Gleichungen fest:

---

*) Das so eben Mitgetheilte dürfte an Deutlichkeit gewinnen, wenn das im ersten Theile der Integralrechnung, in den Nrn. 34, 105 und 106, bei einem analogen Anlasse mit etwas mehr Ausführlichkeit Besprochene zu Rathe gezogen würde.

$$\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \ldots = \omega_{n-1} = \omega\,,$$
$$\omega'_0 = \omega'_1 = \omega'_2 = \omega'_3 = \ldots = \omega'_{n'-1} = \omega'\,,$$

wo $\omega$ und $\omega'$ unendlich kleinwerdende Größen vorstellen.

Die Gleichungen (12) daselbst gehen nunmehr in folgende über:

$$A = a + n\omega\,,\quad B = b + n'\omega'\,; \tag{13}$$

und die Gleichungen (8) bis (11), oder die vier verschiedenen Darstellungsarten eines bestimmten Doppelintegrals bieten sich folgendermaßen dar:

$$\left.\begin{aligned}
\int_b^B\int_a^A q(x,y)\,dx\,dy &= \omega\omega' \sum_{k=0}^{k=n-1}\sum_{k'=0}^{k'=n'-1} q\left(a+k\omega,\ b+k'\omega'\right),\\
\int_b^B\int_a^A q(x,y)\,dx\,dy &= \omega\omega' \sum_{k=0}^{k=n-1}\sum_{k'=0}^{k'=n'-1} q\left(a+(k+1)\omega,\ b+k'\omega'\right),\\
\int_b^B\int_a^A q(x,y)\,dx\,dy &= \omega\omega' \sum_{k=0}^{k=n-1}\sum_{k'=0}^{k'=n'-1} q\left(a+k\omega,\ b+(k'+1)\omega'\right),\\
\int_b^B\int_a^A q(x,y)\,dx\,dy &= \omega\omega' \sum_{k=0}^{k=n-1}\sum_{k'=0}^{k'=n'-1} q\left(a+(k+1)\omega,\ b+(k'+1)\omega'\right).
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Von den vier Ausdrücken:

$$\omega\omega' q\left(a+k\omega,\ b+k'\omega'\right),\ \omega\omega' q\left(a+(k+1)\omega,\ b+k'\omega'\right),$$
$$\omega\omega' q\left(a+k\omega,\ b+(k'+1)\omega'\right),\ \omega\omega' q\left(a+(k+1)\omega,\ b+(k'+1)\omega'\right)$$

gilt ein Gleiches, was in der vorangehenden Nr. über die vier allgemeinern ausgesagt wurde; man ist nämlich mittelst derselben jedesmal zu beurtheilen in der Lage, ob das in Rede stehende bestimmte Doppelintegrale noch in den Kreis jener mathematischen Größen fällt, die auf bereits festgestellte Einheiten zurück geführt werden können.

Addirt man ferner die zwei ersten, wie die zwei letzten der Gleichungen (14), so gewinnt man auch folgende zwei Gleichungen zur Darstellung des in Rede stehenden bestimmten Doppelintegrals:

$$\int_b^B \int_a^A q(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \omega\omega' \sum_{k'=0}^{k'=n'-1} \left\{ \tfrac{1}{2}\varphi(a, b+k'\omega') + \sum_{k=1}^{k=n-1} \varphi(a+k\omega, b+k'\omega') + \tfrac{1}{2}\varphi(A, b+k'\omega') \right\}, \quad (15)$$

$$\int_b^B \int_a^A q(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \omega\omega' \sum_{k'=1}^{k'=n'} \left\{ \tfrac{1}{2}\varphi(a, b+k'\omega') + \sum_{k=1}^{k=n-1} \varphi(a+k\omega, b+k'\omega') + \tfrac{1}{2}\varphi(A, b+k'\omega') \right\}. \quad (16)$$

Addirt man endlich dieſe zwei Gleichungen, ſo ergiebt ſich:

$$\int_b^B \int_a^A q(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \tfrac{1}{2}\omega\omega' \left\{ \begin{array}{l} \tfrac{1}{2}q(a,b) + \sum_{k'=1}^{k'=n'-1} q(a, b+k'\omega') + \tfrac{1}{2}q(A,b) \\ + \sum_{k=1}^{k=n-1} \left\{ \tfrac{1}{2}\varphi(a+k\omega, b) + \sum_{k'=1}^{k'=n'-1} \varphi(a+k\omega, b+k'\omega') + \tfrac{1}{2}\varphi(a+k\omega, B) \right\} \\ + \tfrac{1}{2}q(A,b) + \sum_{k'=1}^{k'=n'-1} q(A, b+k'\omega') + \tfrac{1}{2}q(A,B) \end{array} \right\}. \quad (17)$$

316. Daß man von den in den vorausgeſchickten Nrn. aufgeſtellten Summengleichungen bei der näherungsweiſen Ausmittelung beſtimmter Doppelintegralien Vortheil ziehen kann, verſteht ſich von ſelbſt und bedarf keiner weitern Unterſtützung, wenn namentlich der Schlußparagraph des erſten Theiles der Integralrechnung zugezogen wird. — Da ferner jedes Doppelintegrale auf ein zweimaliges Integriren, jedesmal nach einer Variabeln, hinausläuft; ſo wird man den gleichen Vortheil wie bei einfachen beſtimmten Integralien aus den im erſten Theile von Nro. 107 – bis 129 aufgeſtellten Sätzen ziehen, um auch ein beſtimmtes Doppelintegral in Beziehung auf Convergenz und Divergenz zu unterſuchen. Aus gleichem Grunde dürften auch die Schwierigkeiten, ſo von der Vieldeutigkeit der Integralfunction bei der Herſtellung des beſtimmten Doppelintegrals herrühren, als beſeitiget erklärt werden; man wird ſich mit gleichem

Erfolge wie bei bestimmten Integralien einer Variabeln der im ersten Theile aufgestellten Sätze und der zur Erläuterung derselben beigegebenen besondern Fälle bedienen, die in den Nrn. 130 bis 138 mitgetheilt worden sind. — Es verbleibt sonach nur ein Punkt noch zur Erörterung, die Umformung nämlich eines mit constanten Integrationsgrenzen versehenen Doppelintegrals, durch Einführung neuer Integrationsvariabeln, in ein demselben aequivalentes. Mit Ausnahme von wenigen Fällen weicht das Verfahren der Umformung eines Doppelintegrals von dem eines einfachen bestimmten Integrals gänzlich ab, wenn, wie eben gesagt wurde, die ursprünglichen Variabeln der Integration durch Functionen neuer Variabeln ersetzt werden. Diesem nach werden wir in den folgenden Nrn. auch diesen Gegenstand einer sorgfältigen Prüfung und Erörterung unterziehen, und erst hernach zu den dreifachen Integralien dreier Variabeln übergehen.

317. Hat man das bestimmte Doppelintegrale:

$$\int_b^B \int_a^A \varphi(x, y)\, dx\, dy\,, \qquad (\alpha)$$

in dem die Variable x durch irgend eine Function einer andern Variabeln ersetzt werden soll, so bietet die Umformung desselben in ein analoges von gleichem Werthe keine größere Schwierigkeit dar, als wenn eine ähnliche Umformung mit einem einfachen bestimmten Integrale einer Variabeln vorzunehmen wäre, welche letztere wir bereits im ersten Theile in Nr. 144 in der größtmöglichen Allgemeinheit behandelt haben. Ein gleiches Bewenden hat es, wenn die zweite Variable y im vorgelegten bestimmten Doppelintegrale ($\alpha$) durch irgend eine Function einer andern Variabeln ersetzt werden soll.

Etwas verwickelter jedoch wird schon besagte Umformung, wenn statt einer der beiden Integrationsvariabeln, z. B. wenn statt x, irgend eine Function einer neuen und der ursprünglichen zweiten Variabeln y gesetzt wird, wenn man nämlich:

$$x = f(u, y) \qquad (\beta)$$

setzt, wo f die Beschaffenheit der Function fixirt, und u die neueingeführte Variable vorstellt. Aber auch hier sind noch die Schwie-

rigkeiten der Umformung, ohne Werthsänderung des vorgelegten Doppelintegrals, leicht zu heben, wie wir solches sofort, bevor wir zum allgemeinen Falle der Umformung übergehen, in vorliegender Nr. noch zeigen wollen.

Bedenkt man nämlich, daß im vorgelegten Doppelintegrale ($\alpha$), während in demselben die Intregration nach x vollzogen wird, die Variable y als Constante zu behandeln ist, so folgt hieraus, daß man bei der durch die Gleichung ($\beta$) angedeuteten Umformung gleichfalls y als Constante anzusehen habe; daß also nicht etwa das Differenziale von x durch:

$$\frac{dx}{du}\,du + \frac{dx}{dy}\,dy$$

zu ersetzen, sondern wegen des Constantsein von y lediglich:

$$dx = \frac{dx}{du}\,du \qquad (\gamma)$$

zu setzen ist, wo $\frac{dx}{du}$ der aus der Gleichung ($\beta$) gezogene partielle Differenzialquotient von x nach u ist.

Wird sonach die Integrationsvariable x im vorgelegten Doppelintegrale ($\alpha$) durch die in Gleichung ($\beta$) festgestellte Annahme, dann das Differenziale von x nach der eben aufgestellten Gleichung ($\gamma$) ersetzt, und stellen $a_1$ und $A_1$ die Integrationsgrenzen der neueingeführten Variabeln u vor; dann hat man:

$$\int_b^B \int_a^A \varphi(x,y)\,dx\,dy = \int_b^B \int_{a_1}^{A_1} \varphi(x,y)\,\frac{dx}{du}\,du\,dy\,, \qquad (\delta)$$

wenn man die Integrationsgrenzen der Variabeln u, nach der Gleichung (F) Nr. 144 des ersten Theiles, aus folgenden zwei Gleichungen zieht:

$$f(A_1, y) = A\,, \quad f(a_1, y) = a\,. \qquad (\varepsilon)$$

Bei der Ausmittelung der neuen Integrationsgrenzen $a_1$ und $A_1$ aus diesen Gleichungen ($\varepsilon$) kann zweierlei eintreffen. Erstens ist es möglich, daß dieselben unabhängig von y sich herausstellen; in diesem Falle kann man im Ausdrucke zur Rechten der Gleichung ($\delta$)

die Integration nach u der nach y vor- oder nachgehen lassen. Zweitens, und zwar in viel größerer Anzahl sind die Fälle, wo wenigstens eine dieser Integrationsgrenzen, $a_1$ oder $A_1$, als Function von y sich herausstellt; alsdann aber darf in demselben Ausdrucke der Gleichung ($\delta$) die Ordnungsfolge der partiellen Integrationen nicht mehr vertauscht werden, man ist alsdann gebunden, die Integration nach u inner den angegebenen Grenzen der nach y voraus gehen zu lassen. Denn die allgemeine Gleichung (5) Nr. 312, die eine Versetzung der Ordnungsfolge der Integrationen gestattet, ist im ersten Theile der Integralrechnung unter der ausdrücklichen Beschränkung erwiesen worden, daß die Integrationsgrenzen der einen Variabeln von der zweiten Integrationsvariabeln, und umgekehrt, unabhängig seien.

Nachdem wir auch diesen Fall, als erlediget erklären dürfen, wenden wir uns nunmehr in der nächstfolgenden Nr. dem allgemeinsten Falle zu, wenn nämlich beide Integrationsvariabeln x und y des Doppelintegrals in ($\alpha$) durch gegebene Functionen von zwei neuen Variabeln ersetzt werden.

318. Es sollen im Doppelintegrale ($\alpha$) die Integrationsvariabeln x und y durch Functionen zwei neuer Variabeln u und v, wie folgende Gleichungen zeigen:

$$x = \psi(u, v) , \quad y = \psi'(u, v) , \qquad (\zeta)$$

in der Weise ersetzt werden, daß das umgeformte Doppelintegrale genau denselben Werth, als das vorgelegte in ($\alpha$) darbiete.

Diese Umformung zu erzielen, denken wir uns aus den zwei Gleichungen ($\zeta$) eine der zwei neuen Variabeln u oder v eliminirt. Welche? — wird der Verfolg dieser Nr. lehren. Angenommen v ist die eliminirte Variable, so ergiebt sich eine Gleichung zwischen x, y und u, mittelst welcher im vorgelegten Doppelintegrale ($\alpha$) entweder x durch eine Function von u und y, oder aber umgekehrt y durch eine Function von u und x ersetzt werden kann. Auf die abermalige Frage, welche dieser Umsetzungen sei nun vorzunehmen? diene zur Antwort, jene, die die Integrationsgrenzen der neueingeführten Variabeln u, als Constante, oder als unabhängig von

der noch restirten zweiten Variabeln y oder x darstellt. — Hat man dieses Endziel beständig vor Augen, dann dürfte es nicht schwer fallen, auch in der vorhin aufgeworfenen Frage, betreffend die Elimination von u oder v aus den Gleichungen (ξ), eine diesen Zwecken fördernde Entscheidung zu treffen. Da uns nämlich die Auswahl der Buchstaben, um die neueingeführten Variabeln vorzustellen, frei gegeben ist; so erklären wir, mehr Einfachheit in unsern Vortrag zu bringen, ein für allemal die Buchstabengröße v als jene, deren Elimination aus (ξ) ein günstiges Resultat in der zuletzt erwähnten Beziehung darbietet, und stehen vor der Hand von dem allerdings oft vorkommenden Falle ab, bei dem die Integrationsgrenzen der restirten neuen Variabeln u keiner constanten Werthe fähig sind.

Gehen wir nun in vorliegender Nr. von der Annahme aus, es sei die Gleichung zwischen x, y und u (das Ergebniß der Elimination von v aus (ξ)) ganz geeignet, die Variable x aus dem Doppelintegrale (α) wegzuschaffen, und es biete dieselbe für x eine Function von u und y durch eine analoge Gleichung mit (β) vorhergehender Nr., oder, der größern Einfachheit wegen, durch diese selbst dar; so gewinnen wir, ganz den Vorschriften der vorangehenden Nr. folgend, auch eine analoge zu der daselbst aufgestellten Gleichung (δ), in der die Integrationsgrenzen $a_1$ und $A_1$, wie vorhin festgestellt ward, constante oder von y independente Größen sein werden. Da dieses letztern Umstandes wegen die Vertauschung der Ordnungsfolge der Integrationen nach u und y gestattet ist; so stellt sich nunmehr besagte analoge zur Gleichung (δ) auch folgendermaßen dar:

$$\int_b^B \int_a^A q(x,y)\,dx\,dy = \int_{a_1}^{A_1} \int_b^B q(x,y)\left(\frac{dx}{du}\right) dy\,du\,, \qquad (\eta)$$

wo $\left(\frac{dx}{du}\right)$ den partiellen Differenzialquotienten von x nach u vorstellt, den die Gleichung (β) vorangehender Nr., oder den jene Gleichung darbietet, die das Ergebniß der Elimination von v aus den Gleichungen (ξ) vorstellt *).

*) Wir haben diesen partiellen Differenzialquotienten deswegen mit Parenthesen umgeben, um solchen von jenem partiellen Differenzialquotienten der

Um nun die Eingangs dieser Nr. angezeigte Umformung zu Ende zu bringen, haben wir noch in der eben aufgestellten Gleichung aus dem bestimmten Doppelintegrale zur Rechten die Integrationsvariable y mittelst der zweiten Gleichung in (ξ) zu elimininen, welches in analoger Weise, wie in dem in vorangehender Nr. behandelten verwickeltern Falle bewerkstelliget wird. Zuerst wird nämlich, gleich wie in dem so erwähnten Falle, in dem Ausdrucke zur Rechten der Gleichung (η)

$$dy = \frac{dy}{dv}\, dv$$

gesetzt, wo der partielle Differenzialquotient zur Rechten aus der zweiten Gleichung in (ξ) zu bestimmen ist; dann werden die Integrationsgrenzen der neueingeführten Variabeln v, falls solche durch $b_1$ und $B_1$ angedeutet werden, aus folgenden Gleichungen bestimmt:

$$\psi'(u, B_1) = B\,, \quad \psi'(u, b_1) = b\,; \tag{ϑ}$$

so daß nunmehr die Gleichung (η) in folgende übergeht:

$$\int_b^B \int_a^A q(x, y)\, dx\, dy = \int_{b_1}^{B_1} \int_{a_1}^{A_1} q(x, y) \left(\frac{dx}{du}\right) \frac{dy}{dv}\, dv\, du\,, \tag{κ}$$

wo die rechterhand noch etwa vorkommenden Variabeln x und y durch u und v aus den zwei Gleichungen (ξ) zu ersetzen sind.

In dieser Gleichung, die die verlangte Umformung darstellt, haben wir nur noch den partiellen Differenzialquotienten $\left(\frac{dx}{du}\right)$ durch partielle Differenzialquotienten, welche unmittelbar aus den die Transformation bewirkenden Gleichungen (ξ) selbst fließen, umzusetzen; damit dann das transformirte Doppelintegrale keine andern partiellen Differenzialquotienten, als solche enthalte, die unmittelbar aus den zuletzt erwähnten Gleichungen (ξ) gezogen werden können.

Umgiebt man nach dem obigen Uebereinkommen mit Parenthesen jene partiellen Differenzialquotienten, die aus der Gleichung (β)

---

Variabeln x nach u, den die erste der oben aufgestellten Gleichungen (ξ) darbietet, unterscheiden zu können, welchen letztern wir in der Folge einfach durch $\frac{dx}{du}$ andeuten werden.

vorangehender Nr. oder aus der Gleichung gezogen werden, welche Ergebniß der Elimination von v aus den Gleichungen (ξ) ist: so bietet das totale Differenziale dieser Gleichung (β) folgende dar:

$$dx = \left(\frac{dx}{du}\right) du + \left(\frac{dx}{dy}\right) dy ;$$

die totalen Differenzialien von x und y aus den Gleichungen (ξ) bieten aber folgende Gleichungen dar:

$$dx = \frac{dx}{du}\, du + \frac{dx}{dv}\, dv ,$$

$$dy = \frac{dy}{du}\, du + \frac{dy}{dv}\, dv ;$$

daher erhält man, wenn der Ausdruck von dy aus dieser Gleichung in die vorige dx darstellende Gleichung gesetzt wird, auch folgende Bestimmung für dx:

$$dx = \left\{ \left(\frac{dx}{du}\right) + \left(\frac{dx}{dy}\right) \frac{dy}{du} \right\} du + \left(\frac{dx}{dy}\right) \frac{dy}{dv}\, dv ,$$

und aus Vergleichung der beiden Formenwerthe von dx mit Beachtung des Umstandes, daß die Variabeln u und v in keinerlei gegenseitiger Abhängigkeit zu einander stehen, ergeben sich folgende zwei Gleichungen:

$$\frac{dx}{du} = \left(\frac{dx}{du}\right) + \left(\frac{dx}{dy}\right) \frac{dy}{du} ,$$

$$\frac{dx}{dv} = \left(\frac{dx}{dy}\right) \frac{dy}{dv} ,$$

aus denen nach vollzogener Elimination von $\left(\frac{dx}{dy}\right)$ die folgende gezogen wird:

$$\left(\frac{dx}{du}\right) \frac{dy}{dv} = \frac{dx}{du}\,\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\,\frac{dy}{du} .$$

Führt man dieses Ergebniß in die aufgestellte Gleichung (κ) ein, dann stellt das Endresultat der am Eingange verlangten Umformung die folgende Gleichung dar:

$$\int_b^B \int_a^A \varphi(x, y)\, dx\, dy = \int_{a_1}^{A_1} \int_{b_1}^{B_1} \varphi(x, y) \left[\frac{dx}{du}\,\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\,\frac{dy}{du}\right] dv\, du , \quad (\lambda)$$

in der, im Ausdrucke zur Rechten nämlich, x und y, wie die partiellen Differenzialquotienten:

$$\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}, \frac{dx}{dv}, \frac{dy}{dv}$$

aus den die Umformung bewirkenden Gleichungen (ξ) zu nehmen sind.

Die auf v bezüglichen Integrationsgrenzen $b_1$ und $B_1$ können, da solche aus den Gleichungen (ϑ) zu ermitteln sind, und diese die Variable u involviren, gleichfalls von dieser Variabeln abhängen; in diesem Falle nun verbleibt das Doppelintegrale rechter Hand in Gleichung (λ) in der daselbst angedeuteten Ordnungsfolge der partiellen Integrationen, nämlich: zuerst wird nach v, von $v = b_1$ bis $v = B_1$, die Integration vollzogen und hierauf erst nach u, von $u = a_1$ bis $u = A_1$, welche letzteren Integrationsgrenzen, wie schon oben bemerkt wurde, aus den Gleichungen (ε) vorangehender Nr. gefolgert, constante Größen sein müssen. Stellen sich aber die Integrationsgrenzen $b_1$ und $B_1$, aus den Gleichungen (ϑ) gefolgert, als constante oder von u independente Größen dar; dann ist die Ordnungsfolge der partiellen Integrationen nach u und v völlig willkührlich, so daß alsdann besagtes Doppelintegrale auch durch folgendes

$$\int_{b_1}^{B_1}\int_{a_1}^{A_1} q(x,y)\left[\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right] du\,dv$$

ersetzt werden darf.

**319.** Die Umformungsgleichung (λ), auf die wir in vorangehender Nr. gelangt, ist unter der Annahme erhalten worden, daß die durch Elimination von v aus den Gleichungen (ξ) gewonnene Gleichung (β) vollkommen geeignet sei, die Variable x durch die neueingeführte u zu ersetzen; in der Weise, daß die Integrationsgrenzen $a_1$ und $A_1$, so auf die neueingeführte Variable u Bezug haben, constante oder von y independente Größen repräsentiren. Da einerseits beim Nichteintreffen dieser Voraussetzung die Gleichung (λ) nicht mehr Bestand hat, und somit die Möglichkeit einer Umformung nur noch unter der sofort mitzutheilenden Voraussetzung (wenn nämlich die Gleichungen (ξ) zu Grunde gelegt werden) denkbar ist; anderseits die Lösung der Umformung unter dieser zweiten Vor-

ausſetzung, auch abgeſehen von dem Falle, wenn ſolche noch die einzig denkbare iſt, theoretiſches Intereſſe darbieten dürfte: ſo gehen wir nun von der Annahme aus, die aus den Gleichungen ($\xi$) durch Elimination von v gewonnene ($\beta$) eigne ſich die Variable y durch die neueingeführte u zu erſetzen, dergeſtalt, daß die aus dieſer Gleichung ($\beta$) gefolgerten Grenzen von u, (welche nunmehr nach den für y beſtehenden Grenzen zu ermitteln ſind), als conſtante oder von x independente Größen ſich herausſtellen.

Zuerſt bemerken wir, daß das Doppelintegrale ($\alpha$) wegen der conſtanten Integrationsgrenzen desſelben auch folgendermaßen dargeſtellt werden darf:

$$\int_a^A \int_b^B q(x, y)\, dy\, dx \quad . \qquad (\alpha_1)$$

Wird hier die Variable y mit Zuziehung der Gleichung ($\beta$) Nr. 317, die wie in der vorausgeſchickten Nr. das Ergebniß der Elimination von v aus den Gleichungen ($\xi$) vorſtellen mag, durch die neueingeführte Variable u erſetzt; ſo hat man, als erſte Uebergangsgleichung:

$$\int_a^A \int_b^B q(x, y)\, dy\, dx = \int_a^A \int_{b'_1}^{B'_1} q(x, y) \left(\frac{dy}{du}\right) du\, dx ,$$

wo $\left(\frac{dy}{du}\right)$ den partiellen Differenzialquotienten von y nach u, aus der Gleichung ($\beta$) gefolgert, darſtellt, und wo die auf u bezüglichen Integrationsgrenzen $b'_1$ und $B'_1$, nach derſelben Gleichung ($\beta$), aus folgenden zwei Gleichungen:

$$x = f(b, b'_1) , \quad x = f(B, B'_1) \qquad (\varepsilon_1)$$

zu ziehen ſind, deren Werthe, zur Realiſirung der verlangten Umformung, von x unabhängig ſein müſſen. Beim Eintreffen dieſer Anforderung geht dieſe Gleichung über in:

$$\int_a^A \int_b^B q(x, y)\, dy\, dx = \int_{b'_1}^{B'_1} \int_a^A q(x, y) \left(\frac{dy}{du}\right) dx\, du ,$$

aus der noch, aus dem Doppelintegrale zur Rechten nämlich, mit

Zuziehung der ersten Gleichung in (ξ) die Variable x wegzuschaffen und durch die zweite der neueingeführten Variabeln, durch v, zu ersetzen ist.

Stellt man nun die Integrationsgrenzen von v durch $a'_1$ und $A'_1$ vor, so zieht man dieselben nach dem eben Mitgetheilten aus folgenden zwei Gleichungen:

$$a = \psi(u, a'_1), \quad A = \psi(u, A'_1), \qquad (\vartheta_1)$$

und man hat, statt der vorhergehenden Gleichung, folgende:

$$\int_a^A \int_b^B \varphi(x, y)\, dy\, dx = \int_{b'_1}^{B'_1} \int_{a'_1}^{A'_1} \varphi(x, y) \left(\frac{dy}{du}\right) \frac{dx}{dv}\, dv\, du,$$

wo der partielle Differenzialquotient $\frac{dx}{dv}$ gleichfalls aus der ersten der in (ξ) aufgestellten zwei Gleichungen zu ziehen ist.

Verfährt man, den Ausdruck:

$$\left(\frac{dy}{du}\right) \frac{dx}{dv}$$

durch partielle Differenzialquotienten darzustellen, die unmittelbar aus den Gleichungen (ξ) fließen, in ähnlicher Weise, wie bei analogem Anlasse in vorangehender Nr.; so erhält man:

$$\left(\frac{dy}{du}\right) \frac{dx}{dv} = -\left[\frac{dx}{du}\,\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\,\frac{dy}{du}\right],$$

und das Endergebniß der unter gegenwärtiger Voraussetzung verlangten Umformung wird durch folgende Gleichung dargestellt:

$$\int_b^B \int_a^A \varphi(x, y)\, dx\, dy = -\int_{b'_1}^{B'_1} \int_{a'_1}^{A'_1} \varphi(x, y) \left[\frac{dx}{du}\,\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\,\frac{dy}{du}\right] dv\, du, \qquad (\lambda')$$

wo im Doppelintegrale rechterhand, gleichwie im analogen der Gleichung (λ), die Variabeln x, y und deren partielle Differenzialquotienten:

$$\frac{dx}{du}, \quad \frac{dx}{dv}, \quad \frac{dy}{du}, \quad \frac{dy}{dv}$$

aus den Gleichungen (ξ) zu nehmen sind.

320. Die Gleichungen (λ) und (λ′) der zwei vorausgeschickten Nrn., die unter zwei verschiedenen Voraussetzungen, bei Zugrundelegung jedoch derselben vermittelnden Gleichungen (ξ), das Problem der Umformung eines Doppelintegrals in ein demselben äquivalentes und ähnliches lösen, sehen in gar vielen Stücken einander gleich; namentlich stellt sich diese Gleichheit ganz in die Augen fallend dar, wenn die Integrationsgrenzen in diesen beiden Gleichungen weggedacht werden; es besteht ihre Abweichung dannzumal lediglich in der Verschiedenheit der Zeichen der durchaus identischen Ausdrücke zur Rechten der Gleichheitszeichen. — Die Analysten, die bis jetzt diesen Gegenstand behandelt haben, wie Euler, von dem diese Transformation eines Doppelintegrals herrührt, bis auf Lacroix, stehen allerdings einigermaßen bei dieser Abweichung der Zeichen an. Sie verweilen jedoch nicht dabei, diese Verschiedenheit aufzuklären, sondern behelfen sich mit der Wendung, „diese Formel (der Ausdruck „zur Rechten in der Gleichung (λ) oder (λ′), wenn von den Inte„grationsgrenzen abgesehen wird) ist jedoch nur dazu bestimmt, die „Größe des vorgelegten Doppelintegrals anzugeben, was sein Zeichen „betrifft, weiß man dasselbe jedesmal aus andern Umständen zu „folgern“, oder auch mit einer dieser, dem Inhalte nach, ganz ähnlichen Ausrede, um, sobald wie möglich, über dieses Paradoxon weg zu sein, zur Anwendung dieser Umformung auf concrete Fälle überzugehen und dann deren Brauchbarkeit bei Planirungen krummer Flächen, bei Kubaturen u. dgl. mehr darzuthun. Der Geometer zumal ist bei diesen und ähnlichen Problemen der Geometrie oder der Mechanik nie in Verlegenheit die Integrationsgrenzen des durch Umformung gewonnenen Doppelintegrals dem räumlichen Gegenstande selbst abzusehen. Der Analyst aber, der nur von dem Begriffe seines Kalkuls geführt wird, ist, da er das mit der Umformung zu erstrebende Endziel beständig vor Augen haben muß, schon während der Umformung darauf angewiesen, die Integrationsgrenzen mit in den Kreis seiner Betrachtungen zu ziehen; dadurch wird nicht nur, wie aus den vorausgeschickten zwei Nrn. hervorgeht, das in der Ambiguität der Zeichen liegende Paradoxon gehoben, vielmehr leuchtet wegen der Verschiedenheit der Voraussetzungen, aus denen die Gleichungen (λ) und (λ′) entsprungen, die Nothwendigkeit

einer Verschiedenheit dieser Gleichungen selbst ein, welche nicht allein in den Vorzeichen der Ausdrücke rechterhand der Gleichheitszeichen, sondern auch in Bezug auf die Integrationsgrenzen derselben augenfällig hervortritt. Allerdings wird es auch Fälle geben, wo ohne Unterschied die eine oder die andere der Gleichungen (λ) und (λ′) zur Anwendung gebracht werden darf; im Allgemeinen aber schließt die eine dieser Gleichungen die andere aus, wie wir solches an besondern Fällen noch zeigen werden, denen wir aber in folgender Nr. eine gedrängte Zusammenstellung der bereits gewonnenen allgemeinen Ergebnisse voraus gehen lassen.

**321.** Wenn das Doppelintegrale:

$$\int_b^B \int_a^A q(x, y)\, dx\, dy \,, \qquad (A)$$

wo die Integrationsgrenzen a, b, A, B von den Integrationsvariabeln x und y independent sind, mittelst der Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \psi(u, v) \,, \\ y &= \psi'(u, v) \,, \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

in ein demselben gleichwerthiges auf die Variable u und v bezügliches Doppelintegrale umgesetzt werden soll; so eliminire man aus den die besagte Umformung vermittelnden Gleichungen (a) eine der Variabeln u und v, z. B. die Variable v. Wird das Ergebniß dieser Elimination durch:

$$f(x, y, u) = 0 \qquad (b)$$

dargestellt; dann müssen entweder die auf x bezüglichen Integrationsgrenzen a und A, in diese Gleichung (b) statt x gesetzt, für u constante oder von y unabhängige Werthe hervorrufen, oder aber die auf y bezüglichen Integrationsgrenzen des vorgelegten Doppelintegrals (A) müssen, wenn solche statt y in diese Gleichung (b) gesetzt werden, für u constante oder von x independente Werthe hervorrufen.

Je nachdem die erste oder die zweite dieser Anforderungen eintrifft, wird auch die erste oder die zweite der nun folgenden Umformungsgleichungen ein Statt haben; im erstern Falle nämlich wird man:

$$\int_b^B \int_a^A q(x,y)\,dx\,dy = \int_{a_1}^{A_1} \int_{b_1}^{B_1} q(x,y)\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)dv\,du\,, \quad (18)$$

haben, wo $a_1$ und $A_1$, aus folgenden zwei Gleichungen bestimmt:

$$f(a, y, a_1) = 0\,, \quad f(A, y, A_1) = 0\,, \quad (19)$$

independent von y erscheinen müssen, und wo ferner die Integrationsgrenzen $b_1$ und $B_1$ aus folgenden zwei Gleichungen zu ermitteln sind:

$$b = \psi'(u, b_1)\,, \quad B = \psi'(u, B_1)\,; \quad (20)$$

im letztern Falle hingegen stellt sich folgende Umformungsgleichung heraus:

$$\int_b^B \int_a^A q(x,y)\,dx\,dy = -\int_{b'_1}^{B'_1} \int_{a'_1}^{A'_1} \varphi(x,y)\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)dv\,du\,, \quad (21)$$

wo folgende zwei Gleichungen:

$$f(x, b, b'_1) = 0\,, \quad f(x, B, B'_1) = 0 \quad (22)$$

für $b'_1$ und $B'_1$ von x independente Werthe darbieten müssen, und wo die Integrationsgrenzen $a'_1$ und $A'_1$ aus folgenden Gleichungen:

$$a = \psi(u, a'_1)\,, \quad A = \psi(u, A'_1) \quad (23)$$

zu ziehen sind.

Ereignet es sich nun, daß weder die Gleichungen (19) constante Werthe für $a_1$ und $A_1$, noch die Gleichungen (22) dergleichen Werthe für $b'_1$ und $B'_1$ darbieten, und zwar auch dann noch nicht, nachdem man in den Gleichungen (a) die Variabeln u und v gegenseitig vertauscht hat; dann sind diese Gleichungen (a) zur Umformung des vorgelegten Doppelintegrales (A) unbrauchbar. Bieten hingegen die Gleichungen (19) constante Werthe für $a_1$ und $A_1$ und zugleich auch die Gleichungen (22) dergleichen Werthe für $b'_1$ und $B'_1$ dar; dann finden auch beide Umformungsgleichungen (18) und (21) zugleich Statt; so daß unter dieser letztern Voraussetzung auch folgende Gleichung:

$$\int_{a_1}^{A_1}\int_{b_1}^{B_1} q(x,y)\ \triangle\ dv\,du = -\int_{b'_1}^{B'_1}\int_{a'_1}^{A'_1} q(x,y)\ \triangle\ dv\,du \qquad (24)$$

bestehen wird, in der man

$$\triangle = \frac{dx}{du}\,\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\,\frac{dy}{du} \qquad (25)$$

gesetzt hat.

Wir fügen nur noch die Bemerkung bei, daß der so eben durch $\triangle$ angedeutete Ausdruck, der auch zur Rechten der Gleichungen (18) und (21) vorkömmt, unter der Voraussetzung, die Integrationsvariabeln x und y stehen in keinerlei gegenseitiger Abhängigkeit, welche Voraussetzung allen vorausgeschickten Betrachtungen zu Grunde liegt, daß unter besagter Voraussetzung also, die besagte Größe $\triangle$ weder unendlich groß noch unendlich klein je sein kann. Die Begründung dieser Behauptung haben wir bereits in Nr. 289 mitgetheilt, wo die daselbst durch $x'$ und $y'$ vorgestellten Variabeln gegenwärtig durch u und v ersetzt sind.

322. Wie bereits Ausgangs der zweitvorhergehenden Nr. angezeigt wurde, theilen wir auch ein Paar besondere Fälle zur Erläuterung der allgemeinen Ergebnisse mit.

1. Es sei das Doppelintegrale:

$$\int_0^1\int_0^c \sqrt{a^2 - x^2 - (c^2 - x^2)\,y^2}\ \sqrt{c^2 - x^2}\ dx\,dy\ ,$$

in dem wir $a > c$ voraussetzen, nach Euler, durch folgende Annahmen über x und y:

$$x = \frac{v}{\sqrt{1+u^2}}\ ,\quad y = \frac{uv}{\sqrt{c^2(1+u^2) - v^2}}\ ,$$

in ein, dem Werthe nach, demselben völlig gleiches und auf die Variabeln u und v bezügliches Doppelintegrale umzusetzen.

Eliminirt man aus diesen zwei vermittelnden Gleichungen, welche den allgemeinen Gleichungen (a) in vorangehender Nr. entsprechen, die Variable v, so ergiebt sich:

$$ux - y\sqrt{c^2 - x^2} = 0\ ,$$

die, für den vorliegenden Fall, der Repräsentant der allgemeinen Gleichung (b) vorangehender Nr. ist. Setzt man in dieser Gleichung

$x=0$, so findet man $u=\infty$; setzt man $x=c$, so stellt sich $u=0$ heraus: woraus nun geschlossen wird, es sei die Gleichung (18) vorangehender Nr. die passende Umformungsgleichung für den vorliegenden Fall, in der man, nach der eben getroffenen Bestimmung,

$$a_1=\infty \text{ und } A_1=0$$

zu setzen hat. Da ferner die Gleichungen (20) daselbst in folgende übergehen:

$$0=\frac{ub_1}{\sqrt{c^2(1+u^2)-b_1^2}},\quad 1=\frac{uB_1}{\sqrt{c^2(1+u^2)-B_1^2}},$$

aus welchen:

$$b_1=0 \text{ und } B_1=c$$

gezogen wird; so geht besagte Gleichung (18) über in:

$$\int_0^1\int_0^c \sqrt{a^2-x^2-(c^2-x^2)y^2}\ \sqrt{c^2-x^2}\ dxdy =$$

$$=\int_\infty^0\int_0^c \sqrt{a^2-x^2-(c^2-x^2)y^2}\ \sqrt{c^2-x^2}\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)dv\,du,$$

wo man zur Rechten vom Gleichheitszeichen die Variabeln $x$, $y$ und deren partiellen Differenzialquotienten:

$$\frac{dx}{du},\ \frac{dx}{dv},\ \frac{dy}{du},\ \frac{dy}{dv},$$

nach den am Eingange festgestellten Gleichungen zu ersetzen hat.

Nun hat man nach diesen Gleichungen:

$$\sqrt{a^2-x^2-(c^2-x^2)y^2}\ \sqrt{c^2-x^2}=\frac{\sqrt{a^2-v^2}\ \sqrt{c^2(1+u^2)-v^2}}{\sqrt{1+u^2}},$$

dann zieht man aus denselben Gleichungen folgende:

$$\frac{dx}{du}=\frac{-uv}{(1+u^2)\sqrt{1+u^2}},\quad \frac{dy}{dv}=\frac{c^2u(1+u^2)}{[c^2(1+u^2)-v^2]\sqrt{c^2(1+u^2)-v^2}},$$

$$\frac{dx}{dv}=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}},\quad \frac{dy}{du}=\frac{v(c^2-v^2)}{[c^2(1+u^2)-v^2]\sqrt{c^2(1+u^2)-v^2}},$$

die die Gleichung:

$$\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}=-\frac{v}{\sqrt{1+u^2}\ \sqrt{c^2(1+u^2)-v^2}}$$

darbieten; sonach hat man:

$$\int_0^1\int_0^c \sqrt{a^2-x^2-(c^2-x^2)y^2}\ \sqrt{c^2-x^2}\ dx\,dy=-\int_\infty^0\int_0^c \frac{\sqrt{a^2-v^2}}{1+u^2}\,v\,dv\,du,$$

die vermöge der zweiten der Gleichungen (6) Nr. 312 in folgende übergeht:

$$\int_0^1\int_0^c \sqrt{a^2-x^2-(c^2-x^2)\,y^2}\;\sqrt{c^2-x^2}\;dx\,dy = \int_0^\infty\int_0^c \frac{\sqrt{a^2-v^2}}{1+u^2}\,v\,dv\,du\,,$$

die die verlangte Umformungsgleichung ist, aus welcher, namentlich aus dem Ausdrucke zur Rechten derselben, der Werth des vorgelegten Doppelintegrals sehr leicht hergestellt wird.

Es ist nämlich:

$$\int_0^\infty\int_0^c \frac{\sqrt{a^2-v^2}}{1+u^2}\,v\,dv\,du = \int_0^c\left(\int_0^\infty \frac{du}{1+u^2}\right)\sqrt{a^2-v^2}\;v\,dv\,,$$

oder auch:

$$\int_0^\infty\int_0^c \frac{\sqrt{a^2-v^2}}{1+u^2}\,v\,dv\,du = \frac{\pi}{2}\int_0^c \sqrt{a^2-v^2}\;v\,dv\,,$$

oder endlich:

$$\int_0^\infty\int_0^c \frac{\sqrt{a^2-v^2}}{1+u^2}\,v\,dv\,du = \frac{\pi}{6}\left[a^3-(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}\right];$$

sonach hat man, wie oben behauptet wurde:

$$\int_0^1\int_0^c \sqrt{a^2-x^2-(c^2-x^2)\,y^2}\;\sqrt{c^2-x^2}\;dx\,dy = \frac{\pi}{6}\left\{a^3-\left(\sqrt{a^2-c^2}\right)^3\right\},$$

als Bestimmungsgleichung des am Eingange vorgelegten Doppelintegrales.

II. Als zweiten besondern Fall legen wir uns das Doppelintegrale:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(x^2+y^2)\,dx\,dy\,,$$

wo $\varphi(x^2+y^2)$ irgend eine Function von $x^2+y^2$ vorstellt, zur Umformung nach den zwei Gleichungen:

$$x = v\,\mathrm{Cos.}\,u\,,\quad y = v\,\mathrm{Sin.}\,u$$

vor.

Eliminirt man aus diesen vermittelnden Gleichungen die Variable v, so erhält man:

$$x \operatorname{Sin.} u - y \operatorname{Cos.} u = 0 ;$$

da hier sowohl die Annahme:

$$x = 0 \text{ und } x = \infty$$

respektive auf:

$$u = \frac{\pi}{2} \text{ und } u = 0 ,$$

als auch die Annahme:

$$y = 0 \text{ und } y = \infty$$

auf constante Werthe für u, nämlich auf:

$$u = 0 \text{ und } u = \frac{\pi}{2}$$

führt; so entnehmen wir hieraus, daß ohne Unterschied die eine oder die andere der in vorangehender Nr. aufgestellten Umformungsgleichungen (18) oder (21) zu Grunde gelegt werden kann, so daß jede derselben, da man gegenwärtig:

$$\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du} = -v$$

hat, auf folgende Gleichung führt:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \varphi(v^2)\,v\,dv\,du ,$$

oder, wenn zur Rechten die Integration nach u vollzogen und $v^2$ durch x ersetzt wird, auch auf folgende:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x^2+y^2)\,dx\,dy = \frac{\pi}{4} \int_0^\infty \varphi(x)\,dx .$$

Wird ferner zur Linken x in $x\sqrt{a}$ und y in $y\sqrt{b}$ umgesetzt, so stellt sich folgende Reduction heraus:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(a\,x^2 + b\,y^2)\,dx\,dy = \frac{\pi}{4\sqrt{ab}} \int_0^\infty \varphi(x)\,dx , \qquad (\alpha)$$

wo a und b reelle positive Werthe haben.

Diese zwei besondern Fälle dürften wohl genügen, das in voran-

gehender Nr. allgemein bezeichnete Verfahren zu erläutern. Während nämlich der in I behandelte Fall die allgemeine Umformungsgleichung (21) geradezu ausschließt und lediglich nach der in (18) aufgestellten Gleichung zu behandeln ist, bietet das Doppelintegrale in II einen Fall dar, der ohne Unterschied jeder dieser Umformungsgleichungen unterlegt werden kann.

323. Hat man die Möglichkeit der Umformung eines Doppelintegrals wie (A) in Nr. 321 in ein demselben aequivalentes, mittelst der daselbst aufgestellten Gleichungen (a) erkannt; so erübriget noch die Bestimmung des in Gleichung (25) aufgestellten Ausdruckes für $\triangle$, der, wie zum Theil schon aus den Nrn. 318 und 319 hervorgeht, mancher Darstellungsform fähig ist. Unter diesen wird, je nach Beschaffenheit der die Umformung bewirkenden Gleichungen (a), die eine und andere Darstellungsform den übrigen vorzuziehen sein, dannzumal namentlich, wenn die leichtere und schnellere Herstellung oder Bestimmung von $\triangle$, als Entscheidungsmoment auftritt. Aus diesem Grunde theilen wir die wesentlichern Darstellungsformen für $\triangle$ hier noch mit, bevor wir zu den Untersuchungen der dreifachen Integralien dreier Variabeln übergehen, mit welchen wir in der nächstfolgenden Nr. den Anfang machen werden.

Die Gleichungen (a) Nr. 321, die $x$ und $y$ als Functionen von $u$, $v$ darstellen, setzen auch $u$ und $v$ unter einander, gleich wie solches für $x$ und $y$ stillschweigend vorausgesetzt ist, in keinerlei gegenseitiger Abhängigkeit voraus; so daß aus denselben nicht nur $x$ und $y$ als Functionen von $u$, $v$, sondern auch umgekehrt $u$ und $v$ als Functionen von $x$, $y$ herausgehen.

Dieses festgestellt, bestehen folgende Gleichungen:

$$\frac{du}{du} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{du} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{du} = 1\,,\quad \frac{du}{dv} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dv} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dv} = 0\,,$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dv} + \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dv} = 0\,,\quad \frac{dv}{dv} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dv} + \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dv} = 1\,,$$

aus denen wir die vorzüglichern Werthformen von $\triangle$ ableiten werden.

Bedenkt man nämlich die Gleichung:

$$\triangle = \frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\,, \qquad (I)$$

so bieten die auf der ersten Zeile befindlichen zwei Gleichungen,

wenn solche gehörig verbunden werden, die folgenden zwei Bestimmungsgleichungen für $\triangle$ dar:

$$\frac{du}{dx}\triangle = \frac{dy}{dv}\,, \quad \frac{du}{dy}\triangle = -\frac{dx}{dv}\,; \tag{II}$$

ebenso rufen die zwei Gleichungen auf der zweiten Zeile desselben Systems folgende Bestimmungsgleichungen hervor:

$$\frac{dv}{dx}\triangle = -\frac{dy}{du}\,, \quad \frac{dv}{dy}\triangle = \frac{dx}{du}\,. \tag{III}$$

Multiplicirt man, von den zuletzt aufgestellten vier Gleichungen, die erste mit der vierten, wie die zweite mit der dritten, und nimmt dann den Unterschied der Produkte; so stellt sich, beachtend die Werthform vom $\triangle$ aus (I), folgende Gleichung heraus:

$$\left(\frac{du}{dx}\,\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dy}\,\frac{dv}{dx}\right)\triangle^2 = \triangle\,;$$

nun ist nach der Ausgangs Nr. 321 gemachten Bemerkung, die Beschaffenheit von $\triangle$ betreffend, dieselbe eine von Null verschiedene Größe: sonach hat man auch folgende Bestimmungsgleichung:

$$\left(\frac{du}{dx}\,\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dy}\,\frac{dv}{dx}\right)\triangle = 1\,, \tag{I'}$$

die in mancher Beziehung, was namentlich die partiellen Differenzialquotienten betrifft, die inverse zu der in (I) mitgetheilten Darstellungsform von $\triangle$ ist.

Daß auch die Ergebnisse in den Nrn. 318 und 319 zwei Darstellungsformen für $\triangle$ darbieten, leuchtet sehr bald ein; eben so giebt es noch zwei andere, die zu den so eben genannten in analoger Weise eine inverse Beziehung haben, als es die Darstellungsform (I′) zu der in (I) hat. Wir unterlassen jedoch solche hier aufzunehmen, da man nach einer nur etwelchen Ueberlegung schon zur Ueberzeugung der Gleichbedeutenheit dieser eben genannten vier Werthformen von $\triangle$ mit denen in (II) und (III) aufgestellten gelangt, wodurch eine besondere Angabe derselben unnöthig wird.

Mit diesen sechs Gleichungen sind wir der Ansicht die wesentlichere Darstellungsform von $\triangle$ mitgetheilt zu haben, von denen wir aber eine, deren Brauchbarkeit besser herauszuheben, auf den in vorangehender Nr. in I behandelten besondern Fall zur Anwendung bringen wollen.

In dem besagten besondern Falle sind die Gleichungen (a) folgende:

$$x = \frac{v}{\sqrt{1+u^2}}, \quad y = \frac{u\,v}{\sqrt{c^2(1+u^2)-v^2}},$$

aus welchen sehr leicht u als Function von x und y ausgedrückt werden kann, nämlich durch die Gleichung:

$$u = \frac{y}{x}\sqrt{c^2-x^2}.$$

Nachdem man diese Gleichung hergestellt, erkennt man auch sehr bald, daß die zweite der Gleichungen (II), am schnellsten zur Bestimmung von $\triangle$ führen dürfte. — In der That erhält man aus der ersten der zuletzt aufgestellten drei Gleichungen folgende Bestimmung:

$$\frac{dx}{dv} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}},$$

und aus der u darstellenden Gleichung folgende:

$$\frac{du}{dy} = \frac{\sqrt{c^2-x^2}}{x} = \frac{u}{y};$$

daher hat man, nach der zweiten der Gleichung (II), folgende Bestimmungsgleichung für $\triangle$:

$$\frac{u}{y}\triangle = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}},$$

und wenn für y der oben festgestellte Werth eingeführt wird, ergiebt sich dieselbe Bestimmung für $\triangle$, die wir in vorangehender Nr. nach der Gleichung (I) vorliegender Nr. auf einem etwas beschwerlichern Wege gefunden.

324. Wir wenden uns nunmehr den dreifachen Integralien dreier Variabeln der Form:

$$\int\int\int \varphi(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

zu, die wir in der vorliegenden und den folgenden Nrn. ähnlichen Untersuchungen, wie in den vorausgeschickten Nrn. die Doppelintegralien zweier Variabeln unterziehen werden.

Wenn $F(x, y, z)$ eine Function von x, y, z vorstellt, die dreimal nach einander partiell differenzirt, einmal nach x, einmal nach y und einmal nach z, die Function $\varphi(x, y, z)$ darbietet; nämlich, wenn man:

$$\frac{d^3F(x,y,z)}{dx\,dy\,dz} = q(x,\ y,\ z) \qquad (26)$$

hat, mit der Beschränkung jedoch, daß in $F(x,y,z)$ keine Größe allgemeiner Art vorkömmt, die nicht auch $\varphi(x,y,z)$ enthält: so ist man nach Nr. 307 folgende Gleichung aufzustellen berechtiget:

$$\int\int\int q(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = F(x,y,z) + \psi(y,z) + \psi'(z,x) + \psi''(x,y), \qquad (27)$$

wo $\psi(y,z)$ eine willkührliche Function von y und z, desgleichen $\psi'(z,x)$ eine von z und x, wie $\psi''(x,y)$ eine von x und y ist.

Der Ausdruck rechterhand stellt die vollständige oder allgemeine Auflösung der dreifachen Integration vor. Die analytische Schwierigkeit denselben zu erhalten reducirt sich darauf, zu einer vorgelegten Function $\varphi(x,y,z)$ eine der Gleichung (26) entsprechende Function $F(x,y,z)$ anzugeben, welche in analoger Weise, wie in Nr. 309 bei Doppelintegralien zweier Variabeln herzustellen ist.

325. Die in der Gleichung (27) vorangehender Nr. enthaltenen drei willkührlichen Functionen werden aus derselben eliminirt, wenn man das in Rede stehende dreifache Integrale ähnlichen Anforderungen, wie das in den Nrn. 310 und 311 betrachtete Doppelintegrale unterzieht.

Wäre z. B. eine Anforderung folgende:

Das dreifache Integrale:

$$\int\int\int q(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

so zu bestimmen, daß die Integralfunction, die die partielle Integration nach x darbietet, für $x=a$ verschwinde; nachdem diesem ein Genüge geschehen, gehe das durch abermalige partielle Integration nach y gewonnene Ergebniß für $y=b$ in Null über; wenn man dieses Ergebniß endlich, nach z partiell integrirt, gehe solches für $z=c$ in Null über: so führen Betrachtungen, analog mit denen in Nr. 311, auf die Gleichung:

$$\int\int\int \varphi(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$
$$= F(x,y,z) - F(x,y,c) - F(x,b,z) - F(a,y,z)$$
$$+ F(x,b,c) + F(a,y,c) + F(a,b,z) - F(a,b,c), \qquad (28)$$

welche der gestellten dreifachen Anforderung ein Genüge thut.

Da der Ausdruck zur Rechten vom Gleichheitszeichen dieser Glei-

chung für jede der drei Annahmen, nämlich für $x=a$, für $y=b$ und für $z=c$, in Null übergeht; so thut diese Gleichung der analogen Anforderung zu der in Nr. 310 gleichfalls ein Genüge, d. h. diese Gleichung (28) bestimmt das dreifache Integrale:

$$\int\int\int \varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

dermaßen, daß die Integralfunction derselben für $x=a$ sowohl, als auch für $y=b$, wie endlich für $z=c$ in Null übergeht.

Auf dieselbe Gleichung (28) gelangt man noch, wenn auch die Ordnungsfolge der partiellen Integrationen von der eben angegebenen abweicht, alles andere aber unverändert belassen wird.

326. Wenn die Integralfunction des dreifachen Integrals:

$$\int\int\int q(x, y, z)\, dx\, dy\, dz\ ,$$

wie solche in vorangehender Nr. bestimmt wurde, für:

$$x = A,\ y = B,\ z = C$$

zu bestimmen ist; dann hat man ein bestimmtes dreifache Integrale und deutet dasselbe in folgender Weise an:

$$\int_c^C \int_b^B \int_a^A q(x, y, z)\, dx\, dy\, dz\ ,$$

dessen Werth aus Gleichung (28) vorangehender Nr. gezogen, durch folgende Gleichung dargestellt wird:

$$\int_c^C \int_b^B \int_a^A q(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= F(A, B, C) - F(A, B, c) - F(A, b, C) - F(a, B, C)$$
$$+ F(A, b, c) + F(a, B, c) + F(a, b, C) - F(a, b, c)\ . \qquad (29)$$

Gestützt auf die Schlußbemerkung der vorangehenden Nr. besteht auch die Gleichung:

$$\int_c^C \int_b^B \int_a^A q(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_b^B \int_a^A \int_c^C \varphi(x, y, z)\, dz\, dx\, dy\ , \qquad (30)$$

wie noch vier analoge zu dieser, die jedoch nur unter der Beschränkung stattfinden, daß die Integrationsgrenzen:

a und A, b und B, c und C

von den Integrationsvariabeln x, y und z unabhängig sind.

Ferner erhält man, wenn in der Gleichung (29) a mit A, oder b mit B, oder endlich c mit C vertauscht wird, in gleicher Ordnung die erste, die zweite, die dritte der nun folgenden drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\int_c^C\int_b^B\int_A^a q(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= -\int_c^C\int_b^B\int_a^A q(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,,\\
\int_c^C\int_B^b\int_a^A q(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= -\int_c^C\int_b^B\int_a^A q(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,,\\
\int_C^c\int_b^B\int_a^A q(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= -\int_c^C\int_b^B\int_a^A q(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,,
\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

welche drei Gleichungen die analogen zu denen in (6) Nr. 312 sind.

Wird ferner in derselben Gleichung (29) a mit A und b mit B, oder c mit C und a mit A, oder endlich b mit B und c mit C vertauscht; so erhält man in gleicher Ordnung folgende drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\int_c^C\int_B^b\int_A^a q(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= \int_c^C\int_b^B\int_a^A q(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,,\\
\int_C^c\int_b^B\int_a^A q(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= \int_c^C\int_b^B\int_a^A q(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,,\\
\int_C^c\int_B^b\int_A^a q(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= \int_c^C\int_b^B\int_a^A q(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,.
\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Vertauscht man endlich in derselben Gleichung (29) zugleich a mit A, b mit B und c mit C; so hat man auch folgende:

$$\int_C^c\int_B^b\int_A^a q(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = -\int_c^C\int_b^B\int_a^A q(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,. \quad (33)$$

327. Was in den Nrn. 313—315 über den Zusammenhang zwischen bestimmten Doppelintegralien und Summen unendlich vieler unendlich kleinwerdender Glieder begründend mitgetheilt ward, erstreckt sich auch über bestimmte dreifache Integralien; wir verweisen daher auf diese citirten Nrn., und theilen hier blos einige Endergebnisse mit, ohne bei deren Ableitung zu verweilen.

Es stellen $\omega$, $\omega'$, $\omega''$ die constanten unendlich kleinwerdenden Zunahmen der Variabeln x, y, z, bei den entsprechenden successiven Uebergängen derselben von den untern bis zu den obern Grenz-

werthen vor, nämlich von $x=a$ bis $x=A$, von $y=b$ bis $y=B$, von $z=c$ bis $z=C$; ferner seien folgende Gleichungen:

$$A = a + n\omega\,,\quad B = b + n'\omega'\,,\quad C = c + n''\omega''$$

festgestellt, wie auch die folgende:

$$U = \int_c^C \int_b^B \int_a^A q(x, y, z)\,dx\,dy\,dz\,,$$

bloß zur Vereinfachung der Darstellung: so hat man die folgenden, denen in (14) Nr. 315 ganz analogen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
U &= \omega\omega'\omega'' \sum_{k=0}^{k=n-1}\sum_{k'=0}^{k'=n'-1}\sum_{k''=0}^{k''=n''-1} q\left(a+k\omega\,,\ b+k'\omega'\,,\ c+k''\omega''\right)\,,\\
U &= \omega\omega'\omega'' \sum_{k=0}^{k=n-1}\sum_{k'=0}^{k'=n'-1}\sum_{k''=0}^{k''=n''-1} q\left(a+(k+1)\omega,\ b+k'\omega',\ c+k''\omega''\right)\,,\\
U &= \omega\omega'\omega'' \sum_{k=0}^{k=n-1}\sum_{k'=0}^{k'=n'-1}\sum_{k''=0}^{k''=n''-1} q\left(a+k\omega\,,\ b+(k'+1)\omega',\ c+k''\omega''\right)\,,\\
U &= \omega\omega'\omega'' \sum_{k=0}^{k=n-1}\sum_{k'=0}^{k'=n'-1}\sum_{k''=0}^{k''=n''-1} q\left(a+k\omega,\ b+k'\omega',\ c+(k''+1)\omega''\right)\,,\\
U &= \omega\omega'\omega'' \sum_{k=0}^{k=n-1}\sum_{k'=0}^{k'=n'-1}\sum_{k''=0}^{k''=n''-1} q\left(a+(k+1)\omega\,,\ b+(k'+1)\omega',\ c+k''\omega''\right)\,,\\
U &= \omega\omega'\omega'' \sum_{k=0}^{k=n-1}\sum_{k'=0}^{k'=n'-1}\sum_{k''=0}^{k''=n''-1} q\left(a+(k+1)\omega\,,\ b+k'\omega'\,,\ c+(k''+1)\omega''\right)\,,\\
U &= \omega\omega'\omega'' \sum_{k=0}^{k=n-1}\sum_{k'=0}^{k'=n'-1}\sum_{k''=0}^{k''=n''-1} q\left(a+k\omega\,,\ b+(k'+1)\omega'\,,\ c+(k''+1)\omega''\right)\,,\\
U &= \omega\omega'\omega'' \sum_{k=0}^{k=n-1}\sum_{k'=0}^{k'=n'-1}\sum_{k''=0}^{k''=n''-1} q\left(a+(k+1)\omega,b+(k'+1)\omega',c+(k''+1)\omega''\right)\,.
\end{aligned}\right\}\quad(34)$$

Wenn von den acht Ausdrücken, die auf die dreifachen Summenzeichen folgen, keiner für irgend einen der angedeuteten Werthe von $k$, $k'$, $k''$ unendlich großwerdend ausfällt; so ist dieses ein

untrügliches Kennzeichen, daß die Integralfunction, die wir oben in Nr. 324 durch $F(x, y, z)$ angedeutet haben, für keinen der Werthe von $x = a$ bis $x = A$, von $y = b$ bis $y = B$ und von $z = c$ bis $z = C$ die Eigenschaft der Continuität ablegt. Giebt es hingegen zusammengehörende Werthe von $k$, $k'$, $k''$, die noch im Bereiche der Summengrenzen fallen, für die einer der eben erwähnten acht Ausdrücke unendlich großwerdend erkannt wird, d. h. giebt es Werthe für $x$, $y$, $z$, die noch im Bereiche der respectiven Integrationsgrenzen des in Rede stehenden bestimmten dreifachen Integrals fallen, welche der Function $\varphi(x, y, z)$ einen unendlich großwerdenden Werth beilegen; so untersuche man das Produkt von $\omega\omega'\omega''$ mit irgend einem dieser acht Ausdrücke, wähle letztern jedoch so, daß besagtes Produkt unter keiner unbestimmten Form erscheine: je nachdem dieses Produkt den unendlich kleinwerdenden Zustand, oder einen der beiden andern einer reellen Zahl, den endlichen oder unendlich großwerdenden Zustand, eingeht, verbleibt auch die allfällig unbekannte Integralfunction $F(x, y, z)$ in der nächsten Umgebung der eben angedeuteten drei Werthe von $x$, von $y$ und von $z$ im Zustande der Continuität, oder dieselbe erleidet dann eine Discontinuität. In letzterem Falle hört das dreifache Integrale auf Repräsentant einer mathematischen Größe zu sein, und fällt sonach außer dem Bereiche der unsern Betrachtungen noch zu unterziehenden Integralfunctionen.

328. Indem wir uns nunmehr anschicken, die Transformation eines dreifachen bestimmten Integrals, wenn die primitiven Integrationsvariabeln durch Functionen neuer ersetzt werden, vorzutragen, bemerken wir einleitend, daß wenn nicht jede der drei primitiven Variabeln $x$, $y$ und $z$ durch eine Function drei neuer Variabeln ersetzt wird, daß dannzumal das Problem dieser Transformation, wenn nicht auf das eines einfachen bestimmten Integrals, höchstens nur noch auf das der Transformation eines bestimmten Doppelintegrals zweier Variabeln hinausläuft: das demnach, da wir solches in den Nrn. 317—323 mit jeder nur wünschbaren Ausführlichkeit besprochen haben, keiner weitern Erörterung bedarf. — Zur Unterstützung dieses, theilen wir einen solchen Fall mit, welchen wir aus dem Grunde mit einiger Ausführlichkeit sogar besprechen wollen, um von demselben bei der Behandlung des allgemeinen Falles, wo jede

der ursprünglichen Variabeln durch eine Function dreier von einander unabhängigen Variabeln ersetzt sein wird, in ähnlicher Weise Gebrauch machen zu können, als solches bei der Behandlung der Transformation der Doppelintegralien mit dem in Nr. 317 behandelten Falle geschah. Folgendes Problem und die darauf folgende Lösung desselben stellen diesen einen Fall dar.

In einem dreifachen Integrale dreier Variabeln x, y, z sollen zwei der Variabeln durch gegebene Function der dritten und zwei neuer Variabeln ersetzt werden.

Sind x und y die zwei wegzuschaffenden Variabeln, so wollen wir vermittelst der zwei Gleichungen:

$$x = \psi(z, u, v)\,, \quad y = \psi'(z, u, v) \qquad (\alpha')$$

die Umformung des bestimmten dreifachen Integrals:

$$\int_c^C \int_b^B \int_a^A \varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz\,,$$

das wir bisweilen auch, wie solches schon in vorangehender Nr. geschah, durch U andeuten werden, in ein analoges demselben äquivalentes vornehmen, wo sonach u und v die neueingeführten Variabeln und $\psi(z, u, v)$, $\psi'(z, u, v)$ bekannte Functionen von z, u, v vorstellen.

Fassen wir nun das Doppelintegrale:

$$\int_b^B \int_a^A q(x, y, z)\, dx\, dy$$

in's Auge, und behandeln die in demselben vorkommende Größe z als Constante; so sind wir, nach den in Nr. 321 zusammengestellten Ergebnissen, dasselbe in ein äquivalentes auf die Variabeln u und v bezügliches Doppelintegrale umzusetzen in der Lage, falls die hier angenommenen Gleichungen ($\alpha'$) der einen oder der andern in der eben citirten Nr. gestellten Anforderung nachkommen.

I. Angenommen die der Gleichung (18) besagter Nr. zu Grunde liegende Anforderung findet Statt, d. h. die durch Elimination von v aus den hier vorgelegten Gleichungen ($\alpha'$) sich ergebende Gleichung, die der Form:

$$f(x, y, z, u) = 0 \qquad (\beta')$$

sein mag, bietet für $x = a$ sowohl als auch für $x = A$ Werthe für

u dar, die von y independent sind; so hat man, nach der eben citirten Gleichung (18),

$$\int_b^B \int_a^A q(x,y,z)\,dx\,dy = \int_{a_1}^{A_1} \int_{b_1}^{B_1} q(x,y,z)\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right) dv\,du\,, \quad (\gamma')$$

wo folgende zwei Gleichungen:

$$f(a,y,z,a_1) = 0\,,\ f(A,y,z,A_1) = 0 \quad (\delta')$$

die Werthe von $a_1$ und $A_1$ independent von y darzubieten haben, und aus folgenden zwei Gleichungen:

$$b = \psi'(z,u,b_1)\,,\quad B = \psi'(z,u,B_1) \quad (\varepsilon')$$

die Werthe von $b_1$ und $B_1$ zu ermitteln sind, so daß die Integrationsgrenzen des nach v und u zu vollziehenden Doppelintegrals im Allgemeinen auch Functionen von z sein werden. — Dieses vorausgesetzt, stellt die Gleichung:

$$\int_c^C \int_b^B \int_a^A \varphi(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_c^C \int_{a_1}^{A_1} \int_{b_1}^{B_1} \varphi(x,y,z)\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right) dv\,du\,dz \quad (\zeta')$$

die verlangte Umformung unter der Annahme vor, daß die der Gleichung (18) Nr. 321 zu Grunde liegende Anforderung hier eintrifft, daß nämlich die aus den Gleichungen ($\delta'$) gezogenen Werthe für $a_1$ und $A_1$ von y unabhängig sind.

Wir bemerkten vorhin, daß die Integrationsgrenzen nach v und u, nämlich $b_1$, $B_1$ und $a_1$, $A_1$, im Allgemeinen Functionen von z sein dürften. Sind sie es in der That, dann muß die zweifache Integration nach v und nach u, innerhalb der in ($\zeta'$) angedeuteten Grenzen, der Integration nach z vorangehen. Sind dieselben hingegen unabhängig von z, welche Annahme allein, wie wir in folgender Nr. zeigen werden, die allgemeine Umformung eines bestimmten dreifachen Integrals möglich macht; dann wird auch im dreifachen Integrale zur Rechten der Gleichung ($\zeta'$) die Integration nach z denen nach v und u vorausgehen dürfen, so daß nunmehr besagte Gleichung auch in folgender Weise wird gestellt werden können:

$$U = \int_{a_1}^{A_1} \int_{b_1}^{B_1} \int_c^C q(x,y,z)\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right) dz\,dv\,du\,. \quad (\eta')$$

Diese wie die vorausgehenden Gleichungen finden, wie schon oben erwähnt wurde, unter der Voraussetzung Statt, daß die Gleichung ($\beta'$) für $x = a$ sowohl, als auch für $x = A$ Werthe für u hervorruft, die von y independent sind. Beim Nichteintreffen dieser Anforderung findet auch die Gleichung ($\gamma'$), die der Gleichung (18) Nr. 321 entspricht, nicht Statt; und damit die vorgelegten Gleichungen ($\alpha'$) zur Umformung des in Rede stehenden dreifachen Integrals brauchbar erkannt werden, ist nunmehr unerläßlich, daß die Werthe b und B für y, in dieselbe Gleichung ($\beta'$) gesetzt, Werthe für u hervorrufen, die von x independent sind.

II. Unter Voraussetzung des Eintreffens der so eben erwähnten Anforderung bietet die Gleichung (21) Nr. 321 folgende Umformungsgleichung dar:

$$\int_b^B \int_a^A q(x,y,z)\,dx\,dy = -\int_{b'_1}^{B'_1} \int_{a'_1}^{A'_1} q(x,y,z)\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right) dv\,du, \quad (\gamma'_1)$$

wo folgende zwei Gleichungen:

$$f(x,b,z,b'_1) = 0\,, \quad f(x,B,z,B'_1) = 0\,, \quad (\delta'_1)$$

die den Gleichungen (22) eben citirter Nr. entsprechen, die Werthe von $b'_1$ und $B'_1$ von x unabhängig darbieten müssen, wo ferner die folgenden den Gleichungen (23) derselben Nr. analogen Gleichungen:

$$a = \psi(z,u,a'_1)\,, \quad A = \psi(z,u,A'_1)\,. \quad (\varepsilon'_1)$$

die Werthe von $a'_1$ und $A'_1$ darbieten.

Aus der Gleichung ($\gamma'_1$) zieht man in vorliegendem Falle die folgende:

$$U = -\int_c^C \int_{b'_1}^{B'_1} \int_{a'_1}^{A'_1} q(x,y,z)\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right) dv\,du\,dz\,, \quad (\zeta'_1)$$

von der, je nachdem die Integrationsgrenzen von v und u abhängig oder unabhängig von z sind, dasselbe, was von der vorhin aufgestellten Gleichung ($\zeta'$) gilt; im erstern Falle nämlich muß die Integration nach z denen nach v und u nachstehen, im letztern hingegen kann diese Ordnungsfolge vertauscht werden, und man hat dann auch:

$$U = -\int_{b'_1}^{B'_1}\int_{a'_1}^{A'_1}\int_{c}^{C} q(x, y, z)\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right) dz\, dv\, du\,, \quad (\eta'_1)$$

wo hier sowohl, als in der vorangehenden Gleichung die Variabeln x, y und deren partielle Differenzialquotienten nach den vorgelegten Gleichungen ($\alpha'$) zu bestimmen und zu ersetzen sind.

329. Werden, zum allgemeinen Falle übergehend, im dreifachen Integrale:

$$\int_{c}^{C}\int_{b}^{B}\int_{a}^{A} q(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = U\,, \quad (A')$$

die Integrationsvariablen x, y, z durch gegebene Functionen drei neuer Variabeln ersetzt, etwa durch die folgenden drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u, v, w)\,, \\ y &= \varphi'(u, v, w)\,, \\ z &= \varphi''(u, v, w)\,, \end{aligned}\right\} \quad (a')$$

in denen $\varphi$, $\varphi'$, $\varphi''$ bekannte Functionszeichen und u, v, w die neuen Integrationsvariabeln vorstellen; so haben wir nicht allein die partiellen Integrationen nach x, nach y und nach z in analoge nach u, nach v und nach w umzusetzen, sondern die Integrationsgrenzen für letztere haben wir gleichfalls noch, und zwar aus der Beschaffenheit der Gleichungen (a') sowohl, als der der Integrationsgrenzen der ursprünglichen Integrationsvariabeln festzustellen, welche entscheidenden Einfluß auf die Möglichkeit einer Transformation ausüben.

In dem Falle, wenn die Gleichungen (a') zur Transformation des vorgelegten dreifachen Integrals geeignet sind, worüber wir erst im weitern Verlaufe dieses Gegenstandes uns auszusprechen in der Lage sein werden, in diesem Falle nun, von dem wir einstweilen ausgehen, werden nur um so mehr zwei der ursprünglichen Variabeln x, y, z durch zwei der neueingeführten u, v, w ersetzt werden können. Denken wir uns nun eine dieser zuletzt genannten drei Variabeln, etwa w, aus den Gleichungen (a') eliminirt, und stellen die Ergebnisse dieser Elimination durch die zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \psi(x, y, z, u, v) &= 0\,, \\ \psi'(x, y, z, u, v) &= 0 \end{aligned}\right\}. \quad (b')$$

dar; so werden diese vollkommen geeignet erscheinen, das vorgelegte dreifache Integrale U in ein äquivalentes, nur noch auf eine der Variabeln x, y, z, dafür aber auf die beiden u und v bezügliches dreifache Integrale, in ähnlicher Weise umzuformen, als es die analogen zu diesen, die Gleichungen ($\alpha'$) vorangehender Nr., mit dem daselbst vorgelegten dreifachen Integrale, unter den dort festgestellten Anforderungen gethan.

Hat man sich von der Ausführbarkeit der eben genannten Transformation mittelst der Gleichungen (b′)*) überzeugt, in der Weise, daß auch eine analoge mit einer der Gleichungen ($\xi'$) oder ($\xi'_1$) vorangehender Nr. im vorliegenden Falle herzustellen möglich erkannt wird, welches, wie in der vorangehenden Nr. ausführlich mitgetheilt ward, von der Beschaffenheit der Integrationsgrenzen der neueingeführten Variabeln u und v abhängig ist; dann erst wird zur Wegschaffung der noch übrig gebliebenen dritten der ursprünglichen drei Integrationsvariabeln x, y, z, mittelst einer der oben aufgestellten Gleichungen (a′) geschritten. Dieses ist aber wegen der Anzahl dieser Variabeln, in drei zum Theile sich gegenseitig ausschließenden Weisen möglich; daher werden wir auch zur Erhöhung der Deutlichkeit unseres Vortrages jede derselben von den beiden andern abgesondert in einer eigenen Nr. mittheilen und erörtern, worauf wir dann die so gewonnenen Ergebnisse auf ein Paar besonderer Fälle zur Anwendung bringen werden und den vorliegenden Paragraphen damit schließen, die wesentlichern Darstellungsformen einer analogen

---

*) Mit den Gleichungen (b′) giebt es noch zwei Systeme, von denen eines durch Elimination von v und das andere durch Elimination von u aus den Gleichungen (a′) erhalten wird, die in analoger Weise und zu gleichem Zwecke wie diese (b′) benutzt werden können. Da aber die Auswahl der Buchstaben, um die neuen Integrationsvariabeln vorzustellen, uns frei gestellt ist; so erklären wir, um mehr Kürze und Einfachheit in den Vortrag zu bringen, die Variable w als jene, deren Elimination aus (a′) zwei Gleichungen wie (b′) jedesmal hervorruft, die allen zur Realisirung der Umformung unerläßlichen Anforderungen nachkommen. So z. B. wäre es gar wohl möglich, daß bei einer gewissen Annahme der Gleichungen (a′), die Elimination der Variabeln u zum Nachkommen dieser Anforderungen tauglich erkannt würde; in einem solchen Falle hat man einfach in den angenommenen Gleichungen (a′) die Variabeln u und w mit einander zu vertauschen.

zu der bei den Doppelintegralien durch △ vorgestellten Größe abzuleiten und zusammen zu stellen.

Die Gleichungen vorliegender Nr. werden wir, bei den folgenden Betrachtungen der von uns beabsichtigten Transformation, jedesmal ohne Citation der Nr. zu Hülfe rufen. Um sonach sämmtliche Gleichungen dieser Art beisammen zu haben, nehmen wir hier jene Gleichungen noch auf, die aus (b′) hervorgehen, wenn aus denselben je eine der Größen z, y oder x eliminirt wird, die wir auch in der gleichen Ordnung hier folgen lassen:

$$\left.\begin{aligned} f'(x, y, u, v) &= 0\,, \\ f''(z, x, u, v) &= 0\,, \\ f'''(y, z, u, v) &= 0\,; \end{aligned}\right\} \qquad (c')$$

so daß die erste durch Elimination der Variabeln z, die zweite durch Elimination von y, die dritte durch Elimination von x aus den Gleichungen (b′) entstanden sein soll. Zu gleichem Zwecke nehmen wir hier noch das Ergebniß der Elimination von v aus denselben Gleichungen (b′) auf, welches wir durch folgende Gleichung:

$$f(x, y, z, u) = 0 \qquad (d')$$

darstellen, die in gleicher Weise eine analoge zur Gleichung ($\beta'$) vorangehender Nr. darstellt, als solches die Gleichungen (b′) zu den Gleichungen ($\alpha'$) derselben Nr. sind.

330. In der vorliegenden Nr. setzen wir zur Erzielung einer allgemeinen Transformation des dreifachen Integrals U die beiden Variabeln x und y, als Functionen von z, u, v aus den Gleichungen (b′) ausgedrückt voraus, und versuchen es mittelst dieser Ergebnisse die ursprünglichen Variabeln x und y durch die neueingeführten u und v, nach Nr. 328, vorerst zu ersetzen.

Bedenkt man, daß je zwei der in (c′) und (d′) aufgestellten vier Gleichungen die Gleichungen in (b′) ersetzen; so wird man, der eben getroffenen Anordnung nachzukommen, entweder die zweite und dritte der Gleichungen in (c′) oder nur eine dieser Gleichungen mit der Gleichung in (d′) vereint zu Grunde legen. Man wird nämlich entweder mittelst der Gleichungen:

$$f''(z, x, u, v) = 0\,,\quad f'''(y, z, u, v) = 0\,, \qquad (3\frac{1}{4})$$

die Variabeln x und y durch u und v ersetzen, oder man wird zu demselben Zwecke nur eine dieser eben aufgestellten zwei Gleichungen mit der Ergebnißgleichung, so die Elimination von v aus denselben darbietet, vereinen. Diese letztere Gleichung ist die vorhin erwähnte (d'), nämlich:

$$f(x, y, z, u) = 0 , \qquad (35)$$

welche überdieß noch eine analoge zu der in Nr. 328 aufgestellten Gleichung ($\beta'$) ist.

Legt man nun die Gleichung ($\xi'$) der zuletzt citirten Nr. zu Grunde, so hat man:

$$U = \int_c^C \int_{a_1}^{A_1} \int_{b_1}^{B_1} q(x, y, z) \left\{ \left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dy}{dv}\right) - \left(\frac{dx}{dv}\right)\left(\frac{dy}{du}\right) \right\} dv\, du\, dz ,$$

wo $a_1$ und $A_1$ die aus Gleichung (35) gefolgerten Werthe von u sind, welche respective den Annahmen a und A für x entsprechen, d. h., dieselben sind aus folgenden Gleichungen:

$$f(a, y, z, a_1) = 0 , \quad f(A, y, z, A_1) = 0 \qquad (36)$$

zu ziehen und müssen nothwendig von y unabhängig erkannt werden, wo dann ferner $b_1$ und $B_1$ die aus der zweiten der Gleichungen (34) gefolgerten Werthe von v, für die respectiven Annahmen $y = b$ und $y = B$, vorstellen.

Beim Nichteintreffen der Anforderung, betreffend die Unabhängigkeit der Integrationsgrenzen $a_1$ und $A_1$ von y, findet auch die zuletzt aufgestellte Umformungsgleichung für U nicht Statt; bei der am Eingange festgestellten Annahme ist eine Umformungsgleichung für U nur noch mit Zuziehung der Gleichung ($\xi'_1$) Nr. 328 zu erhalten möglich. Nach dieser Gleichung hat man:

$$U = -\int_c^C \int_{b'_1}^{B'_1} \int_{a'_1}^{A'_1} q(x, y, z) \left\{ \left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dy}{dv}\right) - \left(\frac{dx}{dv}\right)\left(\frac{dy}{du}\right) \right\} dv\, du\, dz \text{ *)} ,$$

*) Zum richtigen Verstehen dieser und der vorangehenden Umformungsgleichung, wenn nämlich die eine oder die andere Bestand hat, wie ferner aller analogen zu denselben, die wir in den folgenden zwei Nrn. noch mittheilen werden, erinnern wir, daß die mit Parenthesen umgebenen partiellen Differenzialquotienten aus den Gleichungen (b'), also, im vorliegenden Falle, aus den Gleichungen (34) zu ziehen sind. Offenbar sind die partiellen Differenzialquotienten, aus den zuletzt genannten Gleichungen gezogen, von denen verschieden,

in der $b'_1$ und $B'_1$ die aus Gleichung (35) folgenden und von x unabhängigen Werthe von u sind, die respective den Annahmen $y = b$ und $y = B$ entsprechen, die nämlich aus den Gleichungen:

$$f(x, b, z, b'_1) = 0 \,, \quad f(x, B, z, B'_1) = 0 \tag{37}$$

zu ziehen sind; und in der ferner $a_1$ und $A_1$ Werthe von v vorstellen, die man aus der ersten unter den Gleichungen (34), für die respectiven Annahmen $x = a$ und $x = A$, zu ziehen hat.

Vorausgesetzt nun, die eine oder die andere dieser zwei Gleichungen oder gar beide zugleich finden Statt; dann bieten solche, wenn nebst den zum Bestehen derselben unerläßlichen Bedingungen auch noch entweder $a_1$ und $A_1$ wie $b_1$ und $B_1$, oder $b'_1$ und $B'_1$ wie $a'_1$ und $A'_1$ von z unabhängig erkannt werden, je nachdem jenes oder dieses eintrifft, die erste oder zweite der nun folgenden zwei Umformungsgleichungen dar:

$$\left.\begin{aligned} U &= \int_{a_1}^{A_1}\int_{b_1}^{B_1}\int_{c}^{C} q(x,y,z)\left\{\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dy}{dv}\right)-\left(\frac{dx}{dv}\right)\left(\frac{dy}{du}\right)\right\} dz\,dv\,du\,, \\ U &= -\int_{b'_1}^{B'_1}\int_{a'_1}^{A'_1}\int_{c}^{C} q(x,y,z)\left\{\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dy}{dv}\right)-\left(\frac{dx}{dv}\right)\left(\frac{dy}{du}\right)\right\} dz\,dv\,du\,. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Die erste dieser Gleichungen besteht sonach, wenn die Gleichung (35) für $x = a$ sowohl als auch für $x = A$ constante oder von y und z unabhängige Werthe für u darbietet, und zugleich die zweite der Gleichungen (34) für $y = b$ und $y = B$ Werthe für v hervorruft, die unabhängig von z sind. Die zweite dieser Gleichungen wird bestehen, wenn die aus der Gleichung (35) gefolgerten, der Annahme $y = b$ sowohl als auch der $y = B$ entsprechenden Werthe von u constante oder von x und z independente Größen sind, und zugleich die aus der ersten unter den Gleichungen (34), für $x = a$ und $x = A$, gefolgerten Werthe von v unabhängig von z sind.

---

die die Gleichungen in (a′) darbieten, und da wir zuletzt jedesmal diese einführen und in gewöhnlicher Weise (nicht umgeben mit Parenthesen) darstellen werden; so haben wir, diesen Unterschied auch äußerlich bemerkbar zu machen, erstere, oder die aus (b′) zu ziehenden partiellen Differenzialquotienten, jedesmal mit Parenthesen umgeben.

Endlich werden beide Gleichungen zugleich bestehen, wenn die eine sowohl, als die andere dieser Anforderungen eintrifft.

Nunmehr erübriget noch, je nach dem Statthaben der zuletzt aufgestellten zwei Gleichungen, in der einen, oder in der andern, oder in beiden zugleich die Variable z durch die dritte der neueinzuführenden Integrationsvariabeln, nämlich durch die Variable w, mit Zuziehung der dritten unter den Gleichungen (a′) zu ersetzen. Dieses wird, obgleich ein dreifaches Integrale dreier Variabeln gegenwärtig vorliegt, da aus demselben nur eine Variable wegzuschaffen übrig ist, in ähnlicher Weise bewerkstelliget, als solches bei einem einfachen bestimmten Integralien im ersten Theile der Integralrechnung Nr. 144 gelehrt worden ist. Setzen wir sonach, die auf w bezüglichen Integrationsgrenzen zu erhalten, in die eben citirte der Gleichungen (a′) statt z die Werthe c und C; so haben wir, wenn die diesen Annahmen entsprechenden Werthe von w durch $c_1$ und $C_1$ vorgestellt werden, folgende zwei Gleichungen zur Bestimmung derselben:

$$c = \psi''(u, v, c_1) \ , \quad C = \psi''(u, v, C_1) \ . \tag{39}$$

Ferner hat man, da in beiden dreifachen Integralien der Gleichungen (38) während der Integration nach z die beiden Variabeln u und v constant verbleiben, bei der Herstellung von dz aus derselben dritten unter den Gleichungen (a′) diese letztgenannten Variabeln u und v gleichfalls als Constante zu behandeln, und einfach:

$$dz = \frac{dz}{dw}\, dw$$

zu setzen, wo $\frac{dz}{dw}$ der aus dieser citirten Gleichung gefolgerte partielle Differenzialquotient von z nach w ist.

Alles dieses vorausgesetzt, gehen die obigen zwei Transformationsgleichungen in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} U &= \int_{a_1}^{A_1}\int_{b_1}^{B_1}\int_{c_1}^{C_1} q(x,y,z)\left\{\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dy}{dv}\right) - \left(\frac{dx}{dv}\right)\left(\frac{dy}{du}\right)\right\}\frac{dz}{dw}\, dw\, dv\, du \ , \\ U &= -\int_{b'_1}^{B'_1}\int_{a'_1}^{A'_1}\int_{c_1}^{C_1} q(x,y,z)\left\{\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dy}{dv}\right) - \left(\frac{dx}{dv}\right)\left(\frac{dy}{du}\right)\right\}\frac{dz}{dw}\, dw\, dv\, du \ , \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

wo in $\varphi(x, y, z)$ sowohl, als auch in den aus den Gleichungen (34) gefolgert gedachten partiellen Differenzialquotienten:

$$\left(\frac{dx}{du}\right), \left(\frac{dx}{dv}\right), \left(\frac{dy}{du}\right), \left(\frac{dy}{dv}\right),$$

wie endlich in dem aus der dritten der Gleichungen (a′) zu ziehenden partiellen Differenzialquotienten $\frac{dz}{dw}$ die Variabeln x, y und z durch die Variabeln u, v, w nach den Gleichungen (a′) zu ersetzen sind.

Wir könnten uns mit diesen Gleichungen (40) begnügen, läge uns nicht daran, die Transformationsgleichung eines dreifachen Integrals in der bekanntern, von Lagrange zuerst mitgetheilten Form auch noch aufzustellen, die nicht zweierlei Arten von partiellen Differenzialquotienten, sondern nur solche umfaßt, welche unmittelbar aus den Gleichungen (a′) entnommen werden können. Diesem nach haben wir noch die in den Gleichungen (40) enthaltenen und mit Parenthesen umgebenen partiellen Differenzialquotienten, die aus den Gleichungen (34) zu ziehen sind, durch partielle Differenzialquotienten, so unmittelbar aus den Gleichungen (a′) folgen, auszudrücken und zu ersetzen.

Differenziren wir zu diesem Zwecke die Gleichungen (a′) nach allen in denselben vorkommenden Variabeln, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{dx}{du}\,du + \frac{dx}{dv}\,dv + \frac{dx}{dw}\,dw, \\ dy &= \frac{dy}{du}\,du + \frac{dy}{dv}\,dv + \frac{dy}{dw}\,dw, \\ dz &= \frac{dz}{du}\,du + \frac{dz}{dv}\,dv + \frac{dz}{dw}\,dw; \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

stellen wir ferner aus den Gleichungen (34) die totalen Differenzialien von dx und dy her, so stellen sich dieselben, nach dem getroffenen Uebereinkommen, wie folgt dar:

$$\left.\begin{aligned} dx &= \left(\frac{dx}{du}\right)du + \left(\frac{dx}{dv}\right)dv + \left(\frac{dx}{dz}\right)dz, \\ dy &= \left(\frac{dy}{du}\right)du + \left(\frac{dy}{dv}\right)dv + \left(\frac{dy}{dz}\right)dz; \end{aligned}\right\} \qquad (\beta)$$

wenn nun in diese der obige Werth von dz eingeführt wird, und

die Ergebnisse mit den obigen für dx und dy aufgestellten Werthformen verglichen werden: so stellt sich folgendes System von Gleichungen heraus:

$$\frac{dx}{du} = \left(\frac{dx}{dz}\right)\frac{dz}{du} + \left(\frac{dx}{du}\right), \quad \frac{dy}{du} = \left(\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{du} + \left(\frac{dy}{du}\right),$$

$$\frac{dx}{dv} = \left(\frac{dx}{dz}\right)\frac{dz}{dv} + \left(\frac{dx}{dv}\right), \quad \frac{dy}{dv} = \left(\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dv} + \left(\frac{dy}{dv}\right),$$

$$\frac{dx}{dw} = \left(\frac{dx}{dz}\right)\frac{dz}{dw}, \quad \frac{dy}{dw} = \left(\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dw};$$

aus welchen, nach Elimination von $\left(\frac{dx}{dz}\right)$ und $\left(\frac{dy}{dz}\right)$, folgende entspringen:

$$\left(\frac{dx}{du}\right)\frac{dz}{dw} = \frac{dx}{du}\frac{dz}{dw} - \frac{dx}{dw}\frac{dz}{du}, \quad \left(\frac{dy}{du}\right)\frac{dz}{dw} = \frac{dy}{du}\frac{dz}{dw} - \frac{dy}{dw}\frac{dz}{du},$$

$$\left(\frac{dx}{dv}\right)\frac{dz}{dw} = \frac{dx}{dv}\frac{dz}{dw} - \frac{dx}{dw}\frac{dz}{dv}, \quad \left(\frac{dy}{dv}\right)\frac{dz}{dw} = \frac{dy}{dv}\frac{dz}{dw} - \frac{dy}{dw}\frac{dz}{dv};$$

und aus diesen endlich die folgende:

$$\left\{\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dy}{dv}\right) - \left(\frac{dx}{dv}\right)\left(\frac{dy}{du}\right)\right\}\frac{dz}{dw} =$$

$$= \left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)\frac{dz}{dw} + \left(\frac{dx}{dw}\frac{dy}{du} - \frac{dx}{du}\frac{dy}{dw}\right)\frac{dz}{dv} + \left(\frac{dx}{dv}\frac{dy}{dw} - \frac{dx}{dw}\frac{dy}{dv}\right)\frac{dz}{du}.$$

Der Ausdruck zur Rechten vom Gleichheitszeichen stellt, vermöge seiner Gleichheit mit dem Ausdrucke zur Linken und mit Zuziehung der Schlußbemerkung in Nr. 321, weder eine unendlich kleinwerdende noch eine unendlich großwerdende Größe vor; deutet man denselben der Kürze wegen durch $\Delta'$ an, so sind die obigen Gleichungen (40) gleichbedeutend mit den folgenden:

$$\left.\begin{aligned} \int_c^C \int_b^B \int_a^A q(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= +\int_{a_1}^{A_1}\int_{b_1}^{B_1}\int_{c_1}^{C_1} q(x,y,z)\,\Delta'\,dw\,dv\,du, \\ \int_c^C \int_b^B \int_a^A q(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= -\int_{b'_1}^{B'_1}\int_{a'_1}^{A'_1}\int_{c_1}^{C_1} q(x,y,z)\,\Delta'\,dw\,dv\,du, \end{aligned}\right\} \quad (I)$$

wo zur Rechten der Gleichheitszeichen in $\varphi(x,y,z)$ sowohl als in $\Delta'$, welche letztere die folgende Gleichung darstellt:

$$\Delta' = \left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)\frac{dz}{dw} + \left(\frac{dx}{dw}\frac{dy}{du} - \frac{dx}{du}\frac{dy}{dw}\right)\frac{dz}{dv} + \left(\frac{dx}{dv}\frac{dy}{dw} - \frac{dx}{dw}\frac{dy}{dv}\right)\frac{dz}{du}, \quad (41)$$

die Variabeln x, y, z durch die u, v, w nach den Gleichungen (a′) zu ersetzen sind. Die erste oder die zweite dieser Umformungsgleichungen hat Bestand, wenn vorerst entweder die aus (36) gezogenen Werthe von $a_1$ und $A_1$, oder die aus (37) für $b'_1$ und $B'_1$ gefolgerten Werthe constant sind; hierauf ist im ersten Falle überdieß noch unerläßlich, daß $b_1$ und $B_1$, die Werthe von v aus der zweiten Gleichung in (34) für $y = b$ und $y = B$, von z independent erkannt werden; im zweiten Falle hat es ein gleiches Bewenden mit den Größen $a'_1$ und $A'_1$, als den Werthen von v aus der erstern der Gleichungen (34) für $x = a$ und $x = A$. Beim Eintreffen dieser gedoppelten Anforderung finden auch beide Gleichungen in (I) Statt; keine dieser Gleichungen hat aber Bestand, wenn weder die eine noch die andere dieser Anforderungen realisirt wird.

331. Bei Zugrundelegung der in Nr. 329 aufgestellten Gleichungen läßt sich die Transformation des daselbst vorgelegten dreifachen Integrals auch in der Weise bewerkstelligen, daß man die Variabeln z und x mittelst der Gleichungen (b′), als Functionen von y, u, v ausdrückt und erstere, nämlich z und x, vorerst durch die neueingeführten Variabeln u und v zu ersetzen versucht.

Mit Beachtung des Ursprunges der Gleichungen (c′) und (d′) wird man, entweder mittelst der folgenden zwei Gleichungen aus (c′):

$$f'''(y, z, u, v) = 0 , \quad f'(x, y, u, v) = 0 , \tag{34′}$$

oder nur mit einer dieser und dem Ergebnisse der Elimination von v aus denselben, welches Ergebniß die Gleichung (d′) oder die in (35) ist, nämlich:

$$f(x, y, z, u) = 0 , \tag{35}$$

die ursprünglichen Integrationsvariabeln z und x durch u und v ersetzen.

Je nachdem diese Gleichung (35) bei der Annahme $z = c$ sowohl als auch bei der $z = C$ für u Werthe darbietet, die von x independent, oder aber für $x = a$ und $x = A$ Werthe für u darbietet, so von z independent sind, wird man die erste, oder aber die zweite der nun folgenden zwei Gleichungen:

$$U = \int_b^B \int_{c_2}^{C_2} \int_{a_2}^{A_2} q(x,y,z) \left\{ \left(\frac{dz}{du}\right)\left(\frac{dx}{dv}\right) - \left(\frac{dz}{dv}\right)\left(\frac{dx}{du}\right) \right\} dv\,du\,dy\,,$$

$$U = -\int_b^B \int_{a'_2}^{A'_2} \int_{c'_2}^{C'_2} q(x,y,z) \left\{ \left(\frac{dz}{du}\right)\left(\frac{dx}{dv}\right) - \left(\frac{dz}{dv}\right)\left(\frac{dx}{du}\right) \right\} dv\,du\,dy\,, \quad *)$$

als bestehend annehmen dürfen; d. h. zum Bestehen der erstern ist erforderlich, daß die folgenden aus (35) gefolgerten zwei Gleichungen:

$$f(x,y,c,c_2) = 0\,, \quad f(x,y,C,C_2) = 0\,, \qquad (36')$$

für $c_2$ und $C_2$ Werthe darbieten, so von x unabhängig sind, wo dann $a_2$ und $A_2$ die Werthe von v aus der zweiten der Gleichungen (34′) vorstellen, die respective den Annahmen $x = a$ und $x = A$ entsprechen; zum Bestehen der letztern dieser Umformungsgleichung ist aber unerläßlich, daß die gleichfalls aus (35) gefolgerten zwei Gleichungen:

$$f(a,y,z,a'_2) = 0\,, \quad f(A,y,z,A'_2) = 0\,, \qquad (37')$$

für $a'_2$ und $A'_2$ Werthe darbieten, so von z unabhängig sind, wo nunmehr $c'_2$ und $C'_2$ die aus der ersten der Gleichungen (34′) für v fließenden Werthe sind, wenn in derselben $z = c$ und $z = C$ angenommen wird.

Bei der fernern Voraussetzung, es sind entweder die Integrationsgrenzen $c_2$, $C_2$, aus den Gleichungen (36′) bestimmt, nicht allein von x, sondern dieselben sind überdieß noch, gleichwie die Integrationsgrenzen $a_2$, $A_2$, von y independent, oder, es sind die aus den Gleichungen (37′) gefolgerten Bestimmungen von $a'_2$, $A'_2$ nicht allein von z, sondern noch, wie auch die Integrationsgrenzen $c'_2$, $C'_2$, von y unabhängig; dann dürfen die obigen Umformungsgleichungen auch folgendermaßen gestellt werden:

$$\left.\begin{aligned} U &= \int_{c_2}^{C_2} \int_{a_2}^{A_2} \int_b^B q(x,y,z) \left\{ \left(\frac{dz}{du}\right)\left(\frac{dx}{dv}\right) - \left(\frac{dz}{dv}\right)\left(\frac{dx}{du}\right) \right\} dy\,dv\,du\,, \\ U &= -\int_{a'_2}^{A'_2} \int_{c'_2}^{C'_2} \int_b^B q(x,y,z) \left\{ \left(\frac{dz}{du}\right)\left(\frac{dx}{dv}\right) - \left(\frac{dz}{dv}\right)\left(\frac{dx}{du}\right) \right\} dy\,dv\,du\,, \end{aligned}\right\} \qquad (38')$$

*) Mit den in Parenthesen eingeschlossenen partiellen Differenzialquotienten hat es hier das gleiche Bewenden, wie mit den analogen in der vorangehenden Nr.

aus welchen, bei deren Statthaben nämlich, die Variable y mittelst der zweiten der Gleichungen (a′) in ähnlicher Weise weggeschafft wird, als unter Zuziehung der dritten der Gleichungen (a′) solches bei den Gleichungen (38) vorangehender Nr. mit der Variabeln z geschah. Stellt man nun die aus der zweiten der Gleichungen (a′) für w gefolgerten Werthe, wenn nämlich $y = b$ und $y = B$ angenommen wird, durch $b_2$ und $B_2$ dar, d. h. zieht man die Werthe von $b_2$ und $B_2$ aus folgenden zwei Gleichungen:

$$b = \psi'(u, v, b_2) \ , \quad B = \psi'(u, v, B_2) \ ; \tag{39′}$$

so gehen die Transformationsgleichungen (38′) über in:

$$\left.\begin{aligned} U &= \int_{c_2}^{C_2}\int_{a_2}^{A_2}\int_{b_2}^{B_2} q(x,y,z)\left\{\left(\frac{dz}{du}\right)\left(\frac{dx}{dv}\right)-\left(\frac{dz}{dv}\right)\left(\frac{dx}{du}\right)\right\}\frac{dy}{dw}\,dw\,dv\,du, \\ U &= -\int_{a'_2}^{A'_2}\int_{c'_2}^{C'_2}\int_{b_2}^{B_2} q(x,y,z)\left\{\left(\frac{dz}{du}\right)\left(\frac{dx}{dv}\right)-\left(\frac{dz}{dv}\right)\left(\frac{dx}{du}\right)\right\}\frac{dy}{dw}\,dw\,dv\,du, \end{aligned}\right\} \tag{40′}$$

welche die analogen zu (40) vorangehender Nr. sind, und beim Bestandhaben der oben ausgesprochenen Beschränkungen, betreffend die Integrationsgrenzen:

$$c_2,\ C_2,\ a_2,\ A_2 \text{ und } a'_2,\ A'_2,\ c'_2,\ C'_2,$$

gleichwie diese (40), das Problem der Transformation eines dreifachen Integrals dreier Variabeln vollständig lösen.

Um endlich aus diesen Umformungsgleichungen (40′) die mit Parenthesen umgebenen partiellen Differenzialquotienten, die man aus den Gleichungen (b′) oder, im vorliegenden Falle, aus denen in (34′) zu ziehen hat, wegzuschaffen, verbinden wir die Gleichungen ($\alpha$) vorangehender Nr. mit den beiden folgenden:

$$dz = \left(\frac{dz}{du}\right) du + \left(\frac{dz}{dv}\right) dv + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy \ ,$$

$$dx = \left(\frac{dx}{du}\right) du + \left(\frac{dx}{dv}\right) dv + \left(\frac{dx}{dy}\right) dy \ ,$$

in ähnlicher Weise, wie dieselben Gleichungen ($\alpha$) mit den in derselben Nr. aufgestellten Gleichungen ($\beta$) verbunden worden sind. Wir erhalten alsdann die folgenden Gleichungen:

$$\frac{dz}{du} = \left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{du} + \left(\frac{dz}{du}\right), \quad \frac{dx}{du} = \left(\frac{dx}{dy}\right)\frac{dy}{du} + \left(\frac{dx}{du}\right),$$

$$\frac{dz}{dv} = \left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dv} + \left(\frac{dz}{dv}\right), \quad \frac{dx}{dv} = \left(\frac{dx}{dy}\right)\frac{dy}{dv} + \left(\frac{dx}{dv}\right),$$

$$\frac{dz}{dw} = \left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dw}, \quad \frac{dx}{dw} = \left(\frac{dx}{dy}\right)\frac{dy}{dw},$$

aus welchen, wenn man aus denselben zuerst $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ und $\left(\frac{dx}{dy}\right)$ eliminirt, die Endgleichung:

$$\left\{\left(\frac{dz}{du}\right)\left(\frac{dx}{dv}\right) - \left(\frac{dz}{dv}\right)\left(\frac{dx}{du}\right)\right\}\frac{dy}{dw} = \triangle'$$

gezogen wird, wo $\triangle'$ die Ausgangs vorhergehender Nr. in Gleichung (41) festgestellte Bedeutung hat.

Alles dieses vorausgesetzt, stellen folgende zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\int_c^C\int_b^B\int_a^A q(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= +\int_{c_2}^{C_2}\int_{a_2}^{A_2}\int_{b_2}^{B_2} q(x,y,z)\,\triangle'\,dw\,dv\,du,\\ \int_c^C\int_b^B\int_a^A q(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= -\int_{a'_2}^{A'_2}\int_{c'_2}^{C'_2}\int_{b_2}^{B_2} \varphi(x,y,z)\,\triangle'\,dw\,dv\,du\end{aligned}\right\} \quad (II)$$

die analogen zu (I) vorangehender Nr. vor, die auch unter analogen Beschränkungen wie diese bestehen. So besteht die erste dieser Gleichungen, wenn vorerst die aus (36′) gefolgerten Größen $c_2$ und $C_2$ constante Werthe annehmen; beim Eintreffen dieses haben noch die Integrationsgrenzen $a_2$ und $A_2$, als die Werthe von v aus der zweiten der Gleichungen (34′) gefolgert, wenn respective $x = a$ und $x = A$ daselbst gesetzt wird, von y independente Größen vorzustellen. Die zweite dieser Umformungsgleichungen findet Statt, wenn erstens $a'_2$ und $A'_2$, aus (37′) gezogen, constante Größen vorstellen; dann aber ist zweitens noch unerläßlich, daß die Größen $c'_2$ und $C'_2$, die die respectiven Werthe von v aus der ersten der Gleichungen (34′) für $z = c$ und $z = C$ sind, gleichfalls von y independent sich herausstellen. Je nachdem endlich diese gedoppelte Anforderung zugleich realisirt wird oder nicht, bestehen auch beide Gleichungen in (II) zugleich oder keine derselben findet Statt.

332. Nach der in Nr. 329 angedeuteten Behandlungsweise, betreffend die Transformation eines dreifachen Integrals dreier Variabeln, haben wir noch aus den Gleichungen (b′) die ursprünglichen Integrationsvariabeln y und z durch x,

u, v auszudrücken und vorerst zu untersuchen, ob nach den vorliegenden Integrationsgrenzen die beiden erstgenannten, y und z, durch die zwei neueingeführten Variabeln u und v ersetzt werden können.

Mit Rücksichtnahme auf die Gleichungen (c′) und (d′) hat man gegenwärtig aus den Gleichungen:

$$f'(x, y, u, v) = 0\,, \quad f''(z, x, u, v) = 0\,, \tag{34''}$$

oder aus einer derselben und dem Ergebnisse der Elimination von v aus denselben, nämlich aus:

$$f(x, y, z, u) = 0\,, \tag{35}$$

die Variabeln y und z im vorgelegten dreifachen Integrale durch die neueingeführten u und v zu ersetzen.

Je nachdem die aus (35) gezogenen zwei Gleichungen:

$$f(x, b, z, b_3) = 0\,, f(x, B, z, B_3) = 0\,, \tag{36''}$$

in denen:

$$y = b \text{ und } u = b_3\,, \text{ wie}$$
$$y = B \text{ und } u = B_3$$

zusammengehörende Werthenpaare sind, für $b_3$ und $B_3$ Werthe darbieten, welche von z unabhängig sind, oder aber die aus den folgenden zwei Gleichungen:

$$f(x, y, c, c'_3) = 0\,, \quad f(x, y, C, C'_3) = 0\,, \tag{37''}$$

in denen:

$$z = c \text{ und } u = c'_3\,, \text{ wie}$$
$$z = C \text{ und } u = C'_3$$

zusammengehörende Werthenpaare sind, fließenden Werthe für $c'_3$ und $C'_3$ von y unabhängig erkannt werden; je nachdem jene oder diese Anforderung eintrifft, besteht auch die erste oder die zweite der nun folgenden zwei Umformungsgleichungen:

$$U = \int_a^A \int_{b_3}^{B_3} \int_{c_3}^{C_3} \varphi(x, y, z) \left\{ \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dz}{dv}\right) - \left(\frac{dy}{dv}\right)\left(\frac{dz}{du}\right) \right\} dv\, du\, dx\,,$$

$$U = -\int_a^A \int_{c'_3}^{C'_3} \int_{h'_3}^{B'_3} \varphi(x, y, z) \left\{ \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dz}{dv}\right) - \left(\frac{dy}{dv}\right)\left(\frac{dz}{du}\right) \right\} dv\, du\, dx\,. \quad *)$$

*) Die in Parenthesen eingeschlossenen partiellen Differenzialquotienten treten in analogen Bedeutungen, wie in den beiden vorangehenden Nrn. auf, d. h. dieselben sind aus den Gleichungen (34″) zu ziehen.

In der ersten dieser Gleichungen stellen $c_3$ und $C_3$ die aus der zweiten der Gleichungen (34″) gefolgerten Werthe von v vor, wenn in gleicher Ordnung $z = c$ und $z = C$ gesetzt wird; in der zweiten dieser Gleichungen aber sind $b'_3$ und $B'_3$ die Werthe von v, aus der ersten der Gleichungen (34″) gefolgert, wenn daselbst $y = b$ und $y = B$ angenommen wird.

Wenn außer den bis jetzt gestellten Anforderungen entweder die aus (36″) gefolgerten Werthe von $b_3$ und $B_3$ auch noch von x unabhängig sind, d. h. wenn dieselben durchaus als Constanten erkannt werden und letzteres, d. h. die Unabhängigkeit von x, auch von $c_3$ und $C_3$ ausgesagt werden kann, oder, wenn die aus (37″) gefolgerten Werthe von $c'_3$ und $C'_3$, als constante Größen sich herausstellen und überdieß noch $b'_3$ und $B'_3$ gleichfalls von x unabhängig sind; dann sind auch die vorangehenden Bestimmungsgleichungen für U, je nach dem Eintreffen dieser Anforderungen, folgender Darstellung zuläßig:

$$\left.\begin{aligned} U &= \int_{b_3}^{B_3}\int_{c_3}^{C_3}\int_{a}^{A} q(x,y,z)\left\{\left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dz}{dv}\right)-\left(\frac{dy}{dv}\right)\left(\frac{dz}{du}\right)\right\} dx\,dv\,du\,, \\ U &= -\int_{c'_3}^{C'_3}\int_{b'_3}^{B'_3}\int_{a}^{A} q(x,y,z)\left\{\left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dz}{dv}\right)-\left(\frac{dy}{dv}\right)\left(\frac{dz}{du}\right)\right\} dx\,dv\,du\,. \end{aligned}\right\} \quad (38'')$$

Beim Statthaben dieser Gleichungen wird aus denselben x mittelst der ersten der drei Gleichungen in (a′) weggeschafft, indem man w an deren Stelle einführt. Bezeichnet man die Integrationsgrenzen von w, die aus der eben genannten Gleichung zu ziehen sind, durch $a_3$ und $A_3$, so hat man zur Bestimmung derselben die Gleichungen:

$$a = \psi(u, v, a_3)\,, \quad A = \psi(u, v, A_3)\,; \qquad (39'')$$

und die vorangehenden Umformungsgleichungen (38″) gehen nunmehr in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} U &= \int_{b_3}^{B_3}\int_{c_3}^{C_3}\int_{a_3}^{A_3} q(x,y,z)\left\{\left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dz}{dv}\right)-\left(\frac{dy}{dv}\right)\left(\frac{dz}{du}\right)\right\}\frac{dx}{dw}\,dw\,dv\,du\,, \\ U &= -\int_{c'_3}^{C'_3}\int_{b'_3}^{B'_3}\int_{a_3}^{A_3} q(x,y,z)\left\{\left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dz}{dv}\right)-\left(\frac{dy}{dv}\right)\left(\frac{dz}{du}\right)\right\}\frac{dx}{dw}\,dw\,dv\,du\,. \end{aligned}\right\} \quad (40'')$$

Diese Gleichungen sind die analogen zu den Gleichungen (40) und (40′) der beiden vorausgehenden Nrn. und lösen gleichfalls, beim Eintreffen der oben ausgesprochenen Bedingungen, betreffend die Integrationsgrenzen:

$$c_3,\ C_3,\ b_3,\ B_3, \text{ und } b'_3,\ B'_3,\ c'_3,\ C'_3,$$

das Problem der Umformung des vorgelegten dreifachen Integrals U.

Denkt man sich ferner aus den Gleichungen (34″) die Variabeln y und z als Functionen von u, v, x ausgedrückt, so stellen sich die totalen Differenzialien der erstern, wie folgt dar:

$$dy = \left(\frac{dy}{du}\right) du + \left(\frac{dy}{dv}\right) dv + \left(\frac{dy}{dx}\right) dx,$$

$$dz = \left(\frac{dz}{du}\right) du + \left(\frac{dz}{dv}\right) dv + \left(\frac{dz}{dx}\right) dx;$$

verbindet man diese mit den Gleichungen ($\alpha$) Nr. 329 durch Elimination von dx, so erhält man:

$$\begin{array}{l|l} \frac{dy}{du} = \left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dx}{du} + \left(\frac{dy}{du}\right), & \frac{dz}{du} = \left(\frac{dz}{dx}\right)\frac{dx}{du} + \left(\frac{dz}{du}\right), \\ \frac{dy}{dv} = \left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dx}{dv} + \left(\frac{dy}{dv}\right), & \frac{dz}{dv} = \left(\frac{dz}{dx}\right)\frac{dx}{dv} + \left(\frac{dz}{dv}\right), \\ \frac{dy}{dw} = \left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dx}{dw}, & \frac{dz}{dw} = \left(\frac{dz}{dx}\right)\frac{dx}{dw}; \end{array}$$

und wenn mit Hülfe dieser die mit Parenthesen umgebenen partiellen Differenzialquotienten aus den Gleichungen (40″) eliminirt werden: dann erhält man auch folgende zwei Umformungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \int_c^C \int_b^B \int_a^A q(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= + \int_{b_3}^{B_3} \int_{c_3}^{C_3} \int_{a_3}^{A_3} q(x,y,z)\,\Delta'\,dw\,dv\,du, \\ \int_c^C \int_b^B \int_a^A q(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= - \int_{c'_3}^{C'_3} \int_{b'_3}^{B'_3} \int_{a_3}^{A_3} q(x,y,z)\,\Delta'\,dw\,dv\,du, \end{aligned}\right\} \text{(III)}$$

wo $\Delta'$ in derselben Bedeutung, als in den zu diesen analogen Gleichungen (I) und (II) der beiden vorausgehenden Nrn. zu nehmen ist.

Die erste dieser Umformungsgleichungen findet Statt, wenn die Integrationsgrenzen $b_3$ und $B_3$ aus den Gleichungen (36″) gezogen constante Größen sind, und wenn $c_3$, $C_3$, als Werthe von v aus

der zweiten der Gleichungen (34″) für $z=c$ und $z=C$, von x unabhängig sind. Die zweite dieser Umformungsgleichungen findet Statt, wenn die aus (37″) zu ziehenden Integrationsgrenzen $c'_3$ und $C'_3$ constante Größen sind und überdieß $b'_3$ und $B'_3$, die die Werthe von v aus der ersten der Gleichungen (34″) sind, wenn in derselben $y=b$ und $y=B$ gesetzt wird, gleichfalls die Variable x nicht impliciren. Endlich werden diese beiden Umformungsgleichungen entweder zugleich bestehen oder keine derselben, je nachdem jede dieser doppelten Anforderung oder keine derselben eintreffen wird.

333. Die in den vorausgehenden Nrn. gewonnenen allgemeinen Ergebnisse zur Transformation eines dreifachen Integrals dreier Variabeln bringen wir nunmehr zur Anwendung; und zwar werden wir in der vorliegenden Nr. das dreifache Integrale:

$$U=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-z^2)\sqrt{1-y^2}\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{\left\{\left(a-\alpha x\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}\right)^2+\left(b-\beta y\sqrt{1-z^2}\right)^2+\left(c-\gamma z\right)^2\right\}}},$$

mittelst der folgenden drei Gleichungen:

$$\alpha x\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}=w\,\mathrm{Sin.u\,Sin.v},\ \beta y\sqrt{1-z^2}=w\,\mathrm{Sin.u\,Cos.v},\ \gamma z=w\,\mathrm{Cos.u},\ (a)$$

in ein demselben äquivalentes, auf die Variabeln u, v, w bezügliches dreifache Integrale umzusetzen suchen.

Eliminirt man, wie in der Note zur Nr. 329 festgesetzt worden, aus diesen Gleichungen (a) die Variable w, so erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$\alpha x\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}=z\,\mathrm{Tang.u\,Sin.v},\ \beta y\sqrt{1-z^2}=z\,\mathrm{Tang.u\,Cos.v},\ (b)$$

welche den allgemeinen (b′) in derselben Nr. entsprechen.

Da wir nunmehr unter den in den vorangehenden Nrn. abgesondert behandelten drei Combinationen eine Auswahl zu treffen haben, werden wir, um den vorliegenden Fall bei andern analogen Anlässen zu Rathe ziehen zu können, bei derselben mit einer größern, als geradezu nothwendigen, Ausführlichkeit verweilen; nämlich, wir werden jede dieser Combinationen besonders vorführen und untersuchen, ob dieselbe auch sämmtlichen zum Bestehen derselben unerläßlichen Anforderungen nachkömmt. Das Endergebniß dieser Untersuchung wird für den vorliegenden Fall die in Nr. 332 behandelte Combination,

und zwar die zweite der Gleichungen in (III) daselbst, als die einzig brauchbare herausstellen.

Vorerst haben wir, einem frühern Uebereinkommen gemäß, noch die Variable v aus den vorigen Gleichungen in (b) zu eliminiren. Das Ergebniß dieser Elimination ist die Gleichung:

$$\alpha^2x^2(1-y^2)(1-z^2) + \beta^2y^2(1-z^2) = \gamma^2z^2\,\mathrm{Tang.}u^2\,, \qquad (c)$$

welche, als analoge zur allgemeinen Gleichung (d′) der gleichen citirten Nr., von wesentlichem Einflusse in besagter Untersuchung ist.

Nach der in Nr. 330 behandelten Combination soll diese Gleichung (c) entweder für die auf x oder für die auf y bezüglichen Integrationsgrenzen des vorgelegten dreifachen Integrals U constante Werthe für u darbieten. Nun stellt diese Gleichung für $x=0$ sowohl als auch für $x=1$ die Größe u als Variable heraus; ein ähnliches Bewenden hat es mit den Werthen von u, wenn in derselben die auf y bezüglichen Integrationsgrenzen, $y=0$ und $y=1$, eingeführt werden: daher sind auch die Ergebnisse dieser Nr. für vorliegenden Fall unbrauchbar und zu verwerfen.

Nach der Combination in Nr. 331 hat dieselbe Gleichung (c) vorerst entweder für die Integrationsgrenzen der Variabeln z oder für die von x constante Werthe für u darzubieten. Daß solches für die Integrationsgrenzen der Variabeln x nicht eintrifft, erhellet aus dem unmittelbar Vorausgeschickten; sonach erübriget uns gegenwärtig noch die Variable z in eben erwähnter Beziehung zu untersuchen. Wird nun in diese Gleichung (c):

$$z = 0 \text{ und } z = 1$$

gesetzt, so erhält man in gleicher Ordnung:

$$\mathrm{Tang.}\,u = \infty \text{ und } \mathrm{Tang.}\,u = 0\,,$$

oder die constanten Ergebnisse:

$$u = \frac{\pi}{2} \text{ und } u = 0\,.$$

Da nun die auf u bezüglichen Integrationsgrenzen als Constante sich herausgestelltne, erübriget uns noch die auf v bezüglichen Integrationsgrenzen nach dem Ergebnisse der Elimination von z aus den Gleichungen (b), nämlich, nach der Gleichung:

$$\mathrm{Tang.}\,v = \frac{\alpha x\sqrt{1-y^2}}{\beta y}\,, \qquad (d)$$

wenn in derselben $x=0$ und $x=1$ gesetzt wird, zu bestimmen: je nachdem die Ergebnisse für v von y unabhängig oder abhängig sich herausstellen, besteht auch die erste der Umformungsgleichungen (II) oder die in dieser Nr. behandelte Combination ist gleichfalls noch zu verwerfen. Es tritt hier aber für $x=1$ der letztere Fall ein; daher erübriget uns noch, soll das hier vorgelegte dreifache Integrale mittelst der Gleichungen (a) umgeformt werden, der letzte Versuch, die in Nr. 332 behandelte Combination zu untersuchen, welche, wie wir bereits angekündiget haben und auch sogleich sehen werden, allen Anforderungen zum Bestehen der zweiten Umformungsgleichung in (III) daselbst nachkömmt.

Die in Nr. 332 behandelte Combination verlangt nämlich zuvörderst, daß die vorliegende Gleichung (c) entweder für die Integrationsgrenzen der Variabeln y oder für die von z constante Werthe für u hervorrufe. Nach dem Vorausgeschickten trifft diese Anforderung einzig bei der Variabeln z ein, man hat nämlich:

$$u = \frac{\pi}{2} \text{ für } z = 0 \text{ und } u = 0 \text{ für } z = 1;$$

sonach erübriget noch, nach der in Rede stehenden Nr., daß die erste der Gleichungen (34″), die gegenwärtig die oben aufgestellte Gleichung (d) ist, wenn in derselben $y=0$ und $y=1$ angenommen wird, Werthe für v darbiete, die von x independent sind. Nun giebt diese Gleichung:

$$v = \frac{\pi}{2} \text{ für } y = 0 \text{ und } v = 0 \text{ für } y = 1,$$

welche Werthe also von x independent, ja sogar constant sind: daher ist eine Umformung des vorgelegten dreifachen Integrals mittelst der Gleichungen (a) möglich, und die zweite der Gleichungen in (III) kann gegenwärtig zur Anwendung gebracht werden.

Um diese Gleichung ganz dem vorliegenden Falle gemäß herzustellen, haben wir noch erstens, die Integrationsgrenzen von w nach denen von x und zweitens, den in Gleichung (41) Nr. 330 aufgestellten Ausdruck für $\triangle'$ zu bestimmen; zu welchem doppelten Zwecke wir aus den Gleichungen (a) die Variabeln x, y und z, als Functionen von u, v, w darzustellen haben.

Um x zu erhalten, dividire man die Gleichungen (a) nach der

Ordnung ihrer Folge durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und multiplicire überdieß noch die zweite und dritte mit x; quadrirt man nun die so umgeformten Gleichungen: so bietet die Summe derselben folgende Bestimmungsgleichung für x dar:

$$x^2 = \frac{w^2}{\alpha^2}\,\mathrm{Sin.u^2\,Sin.v^2} + \frac{w^2}{\beta^2}\,x^2\,\mathrm{Sin.u^2\,Cos.v^2} + \frac{w^2}{\gamma^2}\,x^2\,\mathrm{Cos.u^2}\,.$$

Um ferner y zu erhalten, dividire man die zweite und dritte der Gleichungen (a) respective durch $\beta$ und $\gamma$, und multiplicire überdieß die dritte mit y; quadrirt man diese zwei Gleichungen und nimmt ihre Summe: so stellt sich die Bestimmungsgleichung für y, wie folgt heraus:

$$y^2 = \frac{w^2}{\beta^2}\,\mathrm{Sin.u^2\,Cos.v^2} + \frac{w^2}{\gamma^2}\,y^2\,\mathrm{Cos.u^2}\,.$$

Aus diesen zwei Gleichungen und der dritten der Gleichungen (a) ziehen wir die folgenden x, y und z darstellenden Gleichungen:

$$x^2\left\{1 - \frac{w^2}{\beta^2}\,\mathrm{Sin.u^2\,Cos.v^2} - \frac{w^2}{\gamma^2}\,\mathrm{Cos.u^2}\right\} = \frac{w^2}{\alpha^2}\,\mathrm{Sin.u^2\,Sin.v^2}\,,$$

$$y^2\left\{1 - \frac{w^2}{\gamma^2}\,\mathrm{Cos.u^2}\right\} = \frac{w^2}{\beta^2}\,\mathrm{Sin.u^2\,Cos.v^2}\,,$$

$$z = \frac{w}{\gamma}\,\mathrm{Cos.u}\,.$$

Aus der ersten zieht man:

$$w = 0 \text{ für } x = 0, \text{ und } w = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mathrm{Sin.u^2\,Sin.v^2}}{\alpha^2} + \frac{\mathrm{Sin.u^2\,Cos.v^2}}{\beta^2} + \frac{\mathrm{Cos.u^2}}{\gamma^2}}} \text{ für } x = 1\,,$$

welche Werthe von w die Integrationsgrenzen von w in der zweiten der Umformungsgleichungen (III) sind, nämlich man hat:

$$a_3 = 0 \text{ und } A_3 = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mathrm{Sin.u^2\,Sin.v^2}}{\alpha^2} + \frac{\mathrm{Sin.u^2\,Cos.v^2}}{\beta^2} + \frac{\mathrm{Cos.u^2}}{\gamma^2}}}\,,$$

wo $a_3$ die untere und $A_3$ die obere Integrationsgrenze von w ist.

Dieselben drei x, y und z darstellenden Gleichungen bieten, nachdem man aus denselben die partiellen Differenzialquotienten:

$$\frac{dx}{du}\,,\ \frac{dx}{dv}\,,\ \frac{dx}{dw}\,,\ \frac{dy}{du}\,,\ \frac{dy}{dv}\,,\ \ldots$$

hergestellt hat, nach einigen nicht allzubeschwerlichen Reductionen, folgende Bestimmung für $\Delta'$ dar:

$$\Delta' = -\frac{w^4 \,\mathrm{Sin.u^3\, Sin.v\, Cos.v}}{\alpha^2\beta^2\gamma\, xy\left(1-\frac{w^2}{\gamma^2}\mathrm{Cos.u^2}\right)\left(1-\frac{w^2}{\beta^2}\mathrm{Sin.u^2\, Cos.v^2}-\frac{w^2}{\gamma^2}\mathrm{Cos.u^2}\right)},$$

oder auch, wenn Zähler und Nenner des Bruches mit xy multiplicirt werden, mit Beachtung der obigen Bestimmungsgleichungen von $x^2$ und $y^2$, folgende:

$$\Delta' = -\frac{xy}{\gamma\,\mathrm{Sin.u\, Sin.v\, Cos.v}};$$

multiplicirt man auch in diesem Bruche Zähler und Nenner mit $w^2\,\mathrm{Sin.u}$, so erhält man endlich, mit Beachtung der beiden erstern der Gleichungen (a), folgende Bestimmungsgleichung für $\Delta'$:

$$\Delta' = -\frac{w^2\,\mathrm{Sin.u}}{\alpha\beta\gamma\,(1-z^2)\sqrt{1-y^2}}.$$

Alles dieses vorausgesetzt, bietet die zweite der Gleichungen (III) vorangehender Nr. folgende Umformungsgleichung dar:

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-z^2)\sqrt{1-y^2}\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{\left\{\left(a-\alpha x\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}\right)^2+\left(b-\beta y\sqrt{1-z^2}\right)^2+\left(c-\gamma z\right)^2\right\}}} =$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta\gamma}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int_0^M \frac{w^2\,\mathrm{Sin.u}\,dw\,dv\,du}{\sqrt{\left\{\left(a-w\,\mathrm{Sin.u\,Sin.v}\right)^2+\left(b-w\,\mathrm{Sin.u\,Cos.v}\right)^2+\left(c-w\,\mathrm{Cos.u}\right)^2\right\}}},$$

oder auch, mit Zuziehung der dritten unter den Gleichungen (32) Nr. 326, folgende:

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-z^2)\sqrt{1-y^2}\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{\left\{\left(a-\alpha x\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}\right)^2+\left(b-\beta y\sqrt{1-z^2}\right)^2+\left(c-\gamma z\right)^2\right\}}} =$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta\gamma}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^M \frac{w^2\,\mathrm{Sin.u}\,dw\,dv\,du}{\sqrt{\left\{a^2+b^2+c^2-2(a\,\mathrm{Sin.u\,Sin.v}+b\,\mathrm{Sin.u\,Cos.v}+c\,\mathrm{Cos.u})w+w^2\right\}}}, \quad (e)$$

in der der Kürze wegen:

$$M = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mathrm{Sin.u^2\,Sin.v^2}}{\alpha^2}+\frac{\mathrm{Sin.u^2\,Cos.v^2}}{\beta^2}+\frac{\mathrm{Cos.u^2}}{\gamma^2}}} \quad (f)$$

gesetzt wurde, die in eine Constante übergeht, wenn man $\alpha=\beta=\gamma$ annimmt, als Function von u erscheint, wenn man $\alpha=\beta$ hat, als Function von u und v endlich, wenn sämmtliche drei Größen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ unter einander ungleich sind.

334. Das folgende dreifache Integrale:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz\,,$$

wo $\varphi(x^2+y^2+z^2)$ irgend welche Function von $x^2+y^2+z^2$ repräsentirt, wollen wir noch mittelst der folgenden drei Gleichungen:

$$x = w\ \text{Cos.}\,u\ \text{Cos.}\,v\,,\quad y = w\ \text{Sin.}\,u\ \text{Cos.}\,v\,,\quad z = w\ \text{Sin.}\,v\,, \qquad (a')$$

in ein aequivalentes, auf die Variabeln w, v, u bezügliches, dreifaches Integrale umsetzen.

Eliminirt man zu diesem Zwecke aus den Gleichungen (a') die Variable w, so stellen sich folgende zwei Gleichungen heraus:

$$\frac{x}{z} = \text{Cos.}\,u\ \text{Cotang.}\,v\,,\quad \frac{y}{z} = \text{Sin.}\,u\ \text{Cotang.}\,v\,; \qquad (b')$$

und wenn aus diesen noch v eliminirt wird, hat man:

$$\frac{x}{z}\ \text{Sin.}\,u - \frac{y}{z}\ \text{Cos.}\,u = 0\,. \qquad (c')$$

Um zu erfahren, ob die in Nr. 330 gewonnenen Ergebnisse im vorliegenden Falle brauchbar sind, sehen wir vorerst zu, ob diese Gleichung (c') für $x=0$ und für $x=\infty$ constante Werthe für u darbietet. Nun erhält man in der That dergleichen Werthe für u, nämlich:

$$u = \frac{\pi}{2} \text{ für } x = 0\,,\ \text{und } u = 0 \text{ für } x = \infty\,;$$

folglich haben wir noch die zweite der Gleichungen (b') zu befragen, ob dieselbe für $y=0$ und für $y=\infty$ Werthe für v darbietet, die von z independent sind. Da auch diese Anforderung eintrifft, indem man:

$$v = \frac{\pi}{2} \text{ für } y = 0\,,\ \text{und } v = 0 \text{ für } y = \infty$$

hat: so schließen wir hieraus, daß die erste der Gleichungen (I) in der oben citirten Nr. zur Transformation des am Eingange vorgelegten dreifachen Integrals zu Grunde gelegt werden darf.

Bedenkt man ferner, daß die dritte der Gleichungen (a′) folgende Bestimmungen für die Integrationsgrenzen von w darbietet:

$$w = 0 \text{ für } z = 0, \text{ und } w = \infty \text{ für } z = \infty ;$$

und daß dieselben Gleichungen (a′) folgende Bestimmung des in Gleichung (41) Nr. 330 aufgestellten Ausdruckes für $\Delta'$ darbieten:

$$\Delta' = w^2 \operatorname{Cos.} v ;$$

so bietet die besagte Gleichung in (I), wenn einstweilen das vorgelegte dreifache Integrale durch U dargestellt wird, folgende Bestimmungsgleichung für U dar:

$$U = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \int_{0}^{\infty} q(w^2)\, w^2 \operatorname{Cos.} v \, dw\, dv\, du ,$$

oder vermöge der dritten unter den Gleichungen (32) Nr. 326 auch folgende:

$$U = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{\infty} q(w^2)\, w^2 \operatorname{Cos.} v \, dw\, dv\, du ,$$

auf welches Ergebniß auch die zweite der Gleichungen (I) Nr. 330 führt, da alle Anforderungen, so zum Bestehen dieser Gleichung unerläßlich sind, welche wir Ausgangs der eben citirten Nr. angeführt haben, gleichfalls im vorliegenden Falle realisirt werden.

Da ferner in dem U darstellenden dreifachen Integrale sämmtliche Integrationsgrenzen constant sind, so darf man die Ordnungsfolge der partiellen Integrationen nach w, v, u auch vertauschen und solche etwa in der Ordnungsfolge v, u, w vollziehen. Auf diesem Wege stellt sich folgende Transformations- und Reductionsgleichung heraus:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty q(x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty q(x^2)\, x^2\, dx ,$$

in der wir zur Rechten x statt w gesetzt haben. Wird überdieß noch zur Linken x in $x\sqrt{a}$, y in $y\sqrt{b}$ und z in $z\sqrt{c}$ umgesetzt, dann ergiebt sich folgende noch allgemeinere Reductionsgleichung:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty q(ax^2 + by^2 + cz^2)\, dx\, dy\, dz = \frac{\pi}{2\sqrt{abc}} \int_0^\infty \varphi(x^2)\, x^2\, dx ,$$

oder auch folgende:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty q(ax^2 + by^2 + cz^2)\,dx\,dy\,dz = \frac{\pi}{4\sqrt{abc}} \int_0^\infty \varphi(x)\sqrt{x}\,dx\,, \quad (\alpha)$$

die, wie die vorhergehende, für alle positiven reellen Werthe von a, b, c Bestand hat.

335. Aus dem gleichen in Nr. 323 geltend gemachten Grunde, den bei der Transformation von Doppelintegralien eingeführten Ausdruck $\triangle$ durch verschiedene Werthformen darzustellen, befassen wir uns auch gegenwärtig mit der Ableitung und Zusammenstellung der wesentlicheren Formenwerthe des bei der Transformation dreifacher Integralien kennen gelernten Ausdruckes $\triangle'$; mit deren Mittheilung wir den vorliegenden Paragraphen beschließen.

Die Größe $\triangle'$, wie solche die Gleichung (41) Nr. 330 darstellt, umfaßt die partiellen Differenzialquotienten dreier Variabeln x, y und z nach jeder der drei Variabeln u, v und w, wenn jede der ersteren als Function der letzteren, und umgekehrt, jede der letzteren als Function der ersteren auftritt; wobei also nothwendig die Voraussetzung zu Grunde liegen muß, daß die drei ersteren unter einander, wie in gleicher Weise die drei letzteren, in keinerlei gegenseitiger Beziehung stehen.

Dieses vorausgesetzt bestehen folgende drei Systeme von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du}{du} &= \frac{du}{dx}\frac{dx}{du} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{du} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{du} = 1\,,\\
\frac{du}{dv} &= \frac{du}{dx}\frac{dx}{dv} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dv} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dv} = 0\,,\\
\frac{du}{dw} &= \frac{du}{dx}\frac{dx}{dw} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dw} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dw} = 0\,,
\end{aligned}\right\} \quad (a)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dv}{du} &= \frac{dv}{dx}\frac{dx}{du} + \frac{dv}{dy}\frac{dy}{du} + \frac{dv}{dz}\frac{dz}{du} = 0\,,\\
\frac{dv}{dv} &= \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dv} + \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dv} + \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dv} = 1\,,\\
\frac{dv}{dw} &= \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dw} + \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dw} + \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dw} = 0\,,
\end{aligned}\right\} \quad (b)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dw}{du} &= \frac{dw}{dx}\frac{dx}{du} + \frac{dw}{dy}\frac{dy}{du} + \frac{dw}{dz}\frac{dz}{du} = 0\,,\\
\frac{dw}{dv} &= \frac{dw}{dx}\frac{dx}{dv} + \frac{dw}{dy}\frac{dy}{dv} + \frac{dw}{dz}\frac{dz}{dv} = 0\,,\\
\frac{dw}{dw} &= \frac{dw}{dx}\frac{dx}{dw} + \frac{dw}{dy}\frac{dy}{dw} + \frac{dw}{dz}\frac{dz}{dw} = 1\,.
\end{aligned}\right\} \quad (c)$$

Bedenkt man, daß die $\Delta'$ darstellende Gleichung (41), Nr. 330 in jeder der drei folgenden Weisen gestellt werden kann:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta' &= \left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)\frac{dz}{dw} + \left(\frac{dx}{dw}\frac{dy}{du} - \frac{dx}{du}\frac{dy}{dw}\right)\frac{dz}{dv} + \left(\frac{dx}{dv}\frac{dy}{dw} - \frac{dx}{dw}\frac{dy}{dv}\right)\frac{dz}{du}, \\
\Delta' &= \left(\frac{dz}{du}\frac{dx}{dv} - \frac{dz}{dv}\frac{dx}{du}\right)\frac{dy}{dw} + \left(\frac{dz}{dw}\frac{dx}{du} - \frac{dz}{du}\frac{dx}{dw}\right)\frac{dy}{dv} + \left(\frac{dz}{dv}\frac{dx}{dw} - \frac{dz}{dw}\frac{dx}{dv}\right)\frac{dy}{du}, \\
\Delta' &= \left(\frac{dy}{du}\frac{dz}{dv} - \frac{dy}{dv}\frac{dz}{du}\right)\frac{dx}{dw} + \left(\frac{dy}{dw}\frac{dz}{du} - \frac{dy}{du}\frac{dz}{dw}\right)\frac{dx}{dv} + \left(\frac{dy}{dv}\frac{dz}{dw} - \frac{dy}{dw}\frac{dz}{dv}\right)\frac{dx}{du};
\end{aligned}\right\} \quad (I)$$

so bietet, erstens, das System der Gleichungen (a) folgende Bestimmungsgleichungen für $\Delta'$ dar:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du}{dx}\Delta' &= \frac{dy}{dv}\frac{dz}{dw} - \frac{dy}{dw}\frac{dz}{dv}, \\
\frac{du}{dy}\Delta' &= \frac{dz}{dv}\frac{dx}{dw} - \frac{dz}{dw}\frac{dx}{dv}, \\
\frac{du}{dz}\Delta' &= \frac{dx}{dv}\frac{dy}{dw} - \frac{dx}{dw}\frac{dy}{dv},
\end{aligned}\right\} \quad (II)$$

dann führt, zweitens, das System der Gleichungen (b) auf folgende Bestimmungsgleichungen für $\Delta'$:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dv}{dx}\Delta' &= \frac{dy}{dw}\frac{dz}{du} - \frac{dy}{du}\frac{dz}{dw}, \\
\frac{dv}{dy}\Delta' &= \frac{dz}{dw}\frac{dx}{du} - \frac{dz}{du}\frac{dx}{dw}, \\
\frac{dv}{dz}\Delta' &= \frac{dx}{dw}\frac{dy}{du} - \frac{dx}{du}\frac{dy}{dw},
\end{aligned}\right\} \quad (III)$$

endlich erhält man, drittens, folgende Bestimmungsgleichungen für $\Delta'$ aus dem Systeme der Gleichungen (c):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dw}{dx}\Delta' &= \frac{dy}{du}\frac{dz}{dv} - \frac{dy}{dv}\frac{dz}{du}, \\
\frac{dw}{dy}\Delta' &= \frac{dz}{du}\frac{dx}{dv} - \frac{dz}{dv}\frac{dx}{du}, \\
\frac{dw}{dz}\Delta' &= \frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}.
\end{aligned}\right\} \quad (IV)$$

Durch Verbindung der in diesen drei Systemen enthaltenen Bestimmungsgleichungen für den Ausdruck $\Delta'$ untereinander ergeben sich dergleichen neue; die wesentlicheren unter diesen sind jene, die eine inverse Beziehung, was namentlich die partiellen Differenzialquotienten betrifft, zu den erstgenannten haben, welche wir hier gleichfalls noch mittheilen.

Multiplicirt man die erste der Gleichungen (II) mit der zweiten der Gleichungen (III), subtrahirt dann vom Ergebnisse das Produkt aus der zweiten des erstgenannten in die erste des letztgenannten Systems; so stellt sich, beachtend die Bedeutung von $\Delta'$ aus einer der Gleichungen (I), folgende Gleichung heraus:

$$\left(\frac{du}{dx}\,\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dy}\,\frac{dv}{dx}\right)\Delta'^{2} = \frac{dz}{dw}\,\Delta' .$$

Es läßt sich aber in ähnlicher Weise wie in Nr. 289 darthun, daß $\Delta'$, bei der am Eingange festgestellten Voraussetzung, weder eine unendlich kleinwerdende noch eine unendlich großwerdende Größe ist; daher geht die eben gewonnene Gleichung über in:

$$\left(\frac{du}{dx}\,\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dy}\,\frac{dv}{dx}\right)\Delta' = \frac{dz}{dw},$$

welche man, als inverse zur dritten der Gleichungen (IV) ansehen kann, und eine der vorhin erwähnten inversen Darstellungsweisen von $\Delta'$ ist. Analoge mit dieser Gleichung erhält man aus denselben Systemen (II) und (III) noch zwei, die, mit dieser vereint, folgendes neue System von Bestimmungsgleichungen des Ausdruckes $\Delta'$ abgeben:

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{du}{dx}\,\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dy}\,\frac{dv}{dx}\right)\Delta' &= \frac{dz}{dw},\\
\left(\frac{du}{dz}\,\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dx}\,\frac{dv}{dz}\right)\Delta' &= \frac{dy}{dw},\\
\left(\frac{du}{dy}\,\frac{dv}{dz} - \frac{du}{dz}\,\frac{dv}{dy}\right)\Delta' &= \frac{dx}{dw},
\end{aligned}\right\} \qquad (IV')$$

und die inversen zum Systeme in (IV) sind.

Wenn in ähnlicher Weise, wie die Systeme der Gleichungen (II) und (III), die Systeme in (IV) und (II) untereinander verbunden werden, stellt sich folgendes System heraus, das wir als inverses zu (III) erklären können:

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{dw}{dx}\,\frac{du}{dy} - \frac{dw}{dy}\,\frac{du}{dx}\right)\Delta' &= \frac{dz}{dv},\\
\left(\frac{dw}{dz}\,\frac{du}{dx} - \frac{dw}{dx}\,\frac{du}{dz}\right)\Delta' &= \frac{dy}{dv},\\
\left(\frac{dw}{dy}\,\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dz}\,\frac{du}{dy}\right)\Delta' &= \frac{dx}{dv}.
\end{aligned}\right\} \qquad (III')$$

Endlich erhält man durch analoge Verbindungen der Gleichungen in (III) und (IV) folgendes System von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dv}{dx}\frac{dw}{dy}-\frac{dv}{dy}\frac{dw}{dx}\right)\Delta'&=\frac{dz}{du},\\ \left(\frac{dv}{dz}\frac{dw}{dx}-\frac{dv}{dx}\frac{dw}{dz}\right)\Delta'&=\frac{dy}{du},\\ \left(\frac{dv}{dy}\frac{dw}{dz}-\frac{dv}{dz}\frac{dw}{dy}\right)\Delta'&=\frac{dx}{du},\end{aligned}\right\}\qquad(II')$$

welche aus gleichen Gründen wie die beiden vorhergehenden Systeme, als inverse zu (II) angesehen werden können.

Aus jedem dieser Systeme gelangt man endlich auf eine inverse zu jeder der in (I) aufgestellten Gleichungen. So z. B. ergiebt sich aus den Gleichungen (IV′), wenn dieselben nach der Ordnung ihrer Aufeinanderfolge mit:

$$\frac{dw}{dz},\quad\frac{dw}{dy},\quad\frac{dw}{dx}$$

multiplicirt und hierauf addirt werden, mit Beachtung der dritten unter den Gleichungen (c), folgende Bestimmungsgleichung für $\Delta'$:

$$\left\{\left(\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}-\frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}\right)\frac{dw}{dz}+\left(\frac{du}{dz}\frac{dv}{dx}-\frac{du}{dx}\frac{dv}{dz}\right)\frac{dw}{dy}+\left(\frac{du}{dy}\frac{dv}{dz}-\frac{du}{dz}\frac{dv}{dy}\right)\frac{dw}{dx}\right\}\Delta'=1.$$

Ganz auf dieselbe Gleichung führt jedes der beiden andern Systeme, nämlich, (III′) und (II′); so daß man folgende inversen Gleichungen zu (I′) hat:

$$\left.\begin{aligned}\left\{\left(\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}-\frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}\right)\frac{dw}{dz}+\left(\frac{du}{dz}\frac{dv}{dx}-\frac{du}{dx}\frac{dv}{dz}\right)\frac{dw}{dy}+\left(\frac{du}{dy}\frac{dv}{dz}-\frac{du}{dz}\frac{dv}{dy}\right)\frac{dw}{dx}\right\}\Delta'&=1,\\ \left\{\left(\frac{dw}{dx}\frac{du}{dy}-\frac{dw}{dy}\frac{du}{dx}\right)\frac{dv}{dz}+\left(\frac{dw}{dz}\frac{du}{dx}-\frac{dw}{dx}\frac{du}{dz}\right)\frac{dv}{dy}+\left(\frac{dw}{dy}\frac{du}{dz}-\frac{dw}{dz}\frac{du}{dy}\right)\frac{dv}{dx}\right\}\Delta'&=1,\\ \left\{\left(\frac{dv}{dx}\frac{dw}{dy}-\frac{dv}{dy}\frac{dw}{dx}\right)\frac{du}{dz}+\left(\frac{dv}{dz}\frac{dw}{dx}-\frac{dv}{dx}\frac{dw}{dz}\right)\frac{du}{dy}+\left(\frac{dv}{dy}\frac{dw}{dz}-\frac{dv}{dz}\frac{dw}{dy}\right)\frac{du}{dx}\right\}\Delta'&=1,\end{aligned}\right\}\qquad(I')$$

die, gleichwie die Gleichungen (I) untereinander, wenn die angezeigten Multiplikationen ausgeführt werden, gleichfalls identisch untereinander sind, oder in eine einzige Bestimmungsgleichung für $\Delta'$ zusammen fallen.

Mit diesen 20 Darstellungsgleichungen des Ausdruckes für $\Delta'$ begnügen wir uns gegenwärtig und beschliessen den vorliegenden Gegenstand, die Brauchbarkeit derselben besser ins Licht zu setzen, mit der Anwendung einer derselben auf einen besondern Fall.

Für den in Nr. 333 behandelten besondern Fall bestimmten wir daselbst den Werth von $\Delta'$ nach einer der hier in (I) zusammengestellten Gleichungen. Nach einiger Ueberlegung aber überzeugt man sich alsbald, daß man in der Bestimmung von $\Delta'$ am schnellsten mit der ersten der in (IV′) aufgestellten Gleichungen zu einem Endziele kommen dürfte.

Der besagte besondere Fall ist nämlich durch folgende drei Gleichungen gegeben:

$$\alpha x\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}=w\,\mathrm{Sin.u\,Sin.v},\ \beta y\sqrt{1-z^2}=w\,\mathrm{Sin.u\,Cos.v},\ \gamma z=w\,\mathrm{Cos.u},$$

welche mit den folgenden gleichbedeutend sind:

$$\mathrm{Tang.u^2}=\frac{1-z^2}{\gamma^2z^2}(\alpha^2x^2+\beta^2y^2-\alpha^2x^2y^2),\ \mathrm{Tang.v}=\frac{\alpha}{\beta}x\frac{\sqrt{1-y^2}}{y},\ \gamma z=w\,\mathrm{Cos.u}.$$

Nach der besagten ersten der Gleichungen (IV′) haben wir aus diesen Gleichungen die folgenden fünf partiellen Differenzialquotienten herzustellen:

$$\frac{du}{dx},\ \frac{du}{dy},\ \frac{dv}{dx},\ \frac{dv}{dy},\ \frac{dz}{dw};$$

nun bieten diese Gleichungen, als unmittelbares Ergebniß der partiellen Differenziationen derselben, folgende Bestimmungen dar:

$$\frac{du}{dx}=\frac{1-z^2}{\gamma^2z^2}\frac{\mathrm{Cos.u^3}}{\mathrm{Sin.u}}\alpha^2x(1-y^2),\qquad \frac{du}{dy}=\frac{1-z^2}{\gamma^2z^2}\frac{\mathrm{Cos.u^3}}{\mathrm{Sin.u}}y(\beta^2-\alpha^2x^2)$$

$$\frac{dv}{dx}=\frac{\alpha}{\beta}\mathrm{Cos.v^2}\frac{\sqrt{1-y^2}}{y},\qquad \frac{dv}{dy}=-\frac{\alpha}{\beta}\mathrm{Cos.v^2}\frac{x}{y^2\sqrt{1-y^2}},$$

$$\frac{dz}{dw}=\frac{1}{\gamma}\mathrm{Cos.u};$$

aus denen, als unmittelbares Ergebniß, die folgende gezogen wird:

$$\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}-\frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}=-\frac{\alpha}{\beta}\frac{\mathrm{Cos.u^3}}{\mathrm{Sin.u}}\mathrm{Cos.v^2}\frac{1-z^2}{\gamma^2z^2}(\alpha^2x^2+\beta^2y^2-\alpha^2x^2y^2)\frac{\sqrt{1-y^2}}{y^2},$$

die vermöge der obigen Gleichungen von $\mathrm{Tang.u^2}$ und $\mathrm{Tang.v}$ in:

$$\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}-\frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}=-\frac{1}{xy}\,\mathrm{Sin.u\,Cos.u\,Sin.v\,Cos.v}$$

übergeht. Man hat also nach der oben erwähnten Bestimmungsgleichung für $\Delta'$:

$$-\frac{\Delta'}{xy}\,\text{Sin.u Cos.u Sin.v Cos.v} = \frac{1}{\gamma}\,\text{Cos.u},$$

woraus:

$$\Delta' = -\frac{xy}{\gamma\,\text{Sin.u Sin.v Cos.v}}$$

gezogen wird, welches Resultat in völliger Uebereinstimmung mit dem in Nr. 333 gefundenen, und, wie man sich sehr bald überzeugt, leichter und schneller als daselbst erhalten worden ist.

# Siebentes Kapitel.

## Nichtlineare, mehrgliedrige Differenzialfunctionen zweier und mehrerer Variabeln.

336. Im vorausgeschickten Kapitel haben wir die Integration eingliedriger nichtlinearer Differenzialfunktionen einer und mehrerer Variabeln auf Integrationen von eingliedrigen linearen Differenzialfunctionen, der Form $\varphi(x)dx$, zurückgebracht; diese aber sind, wie wir am Eingange zu Integralrechnung VI bemerkt haben, immer als integrabel anzunehmen: daher haben wir dort auch, den Erfolg vorausfehend, alle und jede Voruntersuchung über Integrabilität derselben unbeachtet gelassen. Hingegen haben wir schon in der Integralrechnung V, namentlich in den Nrn. 279—281 vorliegenden Bandes, zu zeigen Gelegenheit gehabt, daß lineare Differenzialfunctionen sogar, falls solche mehrgliedrig und mehr als einer Variabeln sind, nicht immer Ergebnisse unmittelbarer Differenziationen seien; ein Gleiches steht aber um so mehr von den in der Ueberschrift vorliegenden Kapitels angedeuteten Differenzialfunctionen zu gewärtigen: daher sehen wir uns auch gegenwärtig angewiesen, alle hieher gehörenden Differenzialfunctionen einer auf Integrabilität Bezug habenden Untersuchung zu unterziehen, bevor wir zu deren Integrationen übergehen. Erst nach Feststellung der denselben entsprechenden Bedingungsgleichungen werden wir unter Voraussetzung des Bestandhabens derselben zur Angabe des Verfahrens schreiten, die Integralfunctionen solcher Differenzialfunctionen herzustellen, die, wie der Verfolg dieses Kapitels lehren wird, alsdann auch jedesmal durch eine Aufeinanderfolge einfacher Quadraturen angebbar sind.

## §. I.

## Mehrgliedrige nichtlineare Differenzialfunctionen zweier Variabeln.

**337.** Indem wir unter Integriren, wie schon an frühern Orten festgestellt worden, die inverse Operation des Differenzirens verstehen, wenden wir uns den im vorliegenden Bande, Differenzialrechnung III, namentlich im ersten Paragraphen daselbst, gewonnenen Ergebnissen zu, um Stoff für den vorliegenden Paragraphen sowohl, als für die folgenden gegenwärtigen Kapitels zu gewinnen.

Nach der so eben angeführten Abtheilung der Differenzialrechnung kann eine mehrgliedrige, nichtlineare Differenzialfunction zweier und mehrerer Variabeln Glieder enthalten, die darauf hindeuten, daß die unendlichklein werdenden Aenderungen der Variabeln, die Differenzialien derselben nämlich, als Variabeln behandelt worden sind; solches zeigt z. B. der Ausdruck rechterhand vom Gleichheitszeichen in Gleichung (e), Nr. 252 ganz unzweideutig, aus dem entnommen wird, daß man nicht nur die Variabeln x, y, z, sondern daß man auch die Differenzialien dieser Variabeln als Variable behandelt und dieselben der Operation des Differenzirens gleichfalls unterzogen hat: — Differenzialfunctionen dieser Art nun schliessen wir im vorliegenden, wie in den beiden folgenden Paragraphen dieses Kapitels von unseren Untersuchungen aus. Bloß Differenzialfunctionen, die keine Differenzialien von Differenzialien enthalten, wie etwa der Ausdruck rechterhand in Gleichung (d) der vorhin citirten Nr., werden in den eben erwähnten Paragraphen des vorliegenden Kapitels Gegenstand unserer Betrachtung sein. Erst im vierten oder Schlußparagraphen dieses Kapitels werden wir auch die zuerst erwähnten nichtlinearen Differenzialfunctionen in Beziehung auf Integrabilität untersuchen, wo wir alles Wesentliche, das uns bis jetzt über dieselben bekannt geworden, entwicklend mittheilen werden.

Dieses vorausgeschickt, ist die einfachste nichtlineare Differenzialfunction zweier Variabeln, mit der wir unsere Untersuchungen eröffnen, die vom zweiten Grade in Bezug auf die Differenzialien der Variabeln, und sonach von folgender Form:

$$M\,dx^2 + N\,dx\,dy + P\,dy^2\,, \qquad (1)$$

wo M, N und P beliebige Functionen von x und y sind.

Von dieser vorgelegten Differenzialfunction verlangen wir nicht zu wissen, ob solche durch zweimaliges Differenziren einer Function von x und y entstanden sei; sondern lediglich, ob solche durch einmaliges totales Differenziren einer linearen Differenzialfunction zwischen den Variabeln x und y (Integralrechnung V, Nr. 278) habe entstehen können.

Gehen wir, wie in Integralrechnung V, allwo wir ähnliche Untersuchungen leiteten, von der Annahme des Bestandhabens einer solchen linearen Differenzialfunction aus; so haben wir dieselbe nach Differenzialrechnung III, Nr. 249 von der Form:

$$M'\,dx + N'\,dy \qquad (2)$$

vorauszusetzen, wo M' und N' unbekannte Functionen x und y sind, die keiner weitern Bedingung unterliegen, als durch totales Differenziren dieses eben aufgestellten Differenzialausdruckes unter der Annahme, dx und dy verbleiben constant, die vorgelegte Differenzialfunction darzubieten.

Vollzieht man diese Differenziation, so ergiebt sich:

$$\frac{dM'}{dx}\,dx^2 + \left(\frac{dM'}{dy} + \frac{dN'}{dx}\right) dx\,dy + \frac{dN'}{dy}\,dy^2\,;$$

damit dieses Ergebniß mit (1) identisch werde, erhält man die Gleichungen:

$$\frac{dM'}{dx} = M\,, \quad \frac{dM'}{dy} + \frac{dN'}{dx} = N\,, \quad \frac{dN'}{dy} = P\,, \qquad (3)$$

die bei der Annahme, die Differenzialfunction in (1) sei unmittelbares Ergebniß einer totalen Differenziation des Differenzialausdruckes in (2), in Bezug auf x und y Gleichheiten vorzustellen haben.

Angenommen nun die Gleichungen in (3) stellen in der That Gleichheiten vor, so ist man jede derselben nach jeder einzelnen der Variabeln x und y zu differenziren berechtiget, und die Gleichungen, so auf diesem Wege erzielt werden können, verbleiben noch immer als Gleichheiten.

Differenzirt man sonach die erste derselben nach y, die zweite nach x, so stellt der Unterschied der Ergebnisse folgende Gleichheit dar:

$$\frac{d^2N'}{dx^2} = \frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}\,;$$

wird ferner diese nach y differenzirt und die dritte in (3) zweimal nacheinander in Bezug auf x, so ergiebt sich gleichfalls nach geschehener Subtraktion derselben folgende:

$$0 = \frac{d^2N}{dxdy} - \frac{d^2M}{dy^2} - \frac{d^2P}{dx^2},$$

oder:

$$\frac{d^2M}{dy^2} - \frac{d^2N}{dxdy} + \frac{d^2P}{dx^2} = 0, \qquad (4)$$

die noch immer als Gleichheit Bestand haben muß.

Diese Gleichheit nun, die von den unbekannten Functionen M' und N' unabhängig ist, drückt die Bedingung aus, der die Coefficienten M, N, P in der vorgelegten Differenzialfunction zu entsprechen haben, oder, dieselbe stellt die zu realisirende Bedingungsgleichung vor, damit die Annahme, die Differenzialfunction in (1) ist unmittelbar durchs Differenziren einer linearen Differenzialfunction wie (2) entstanden, nicht zu den Unmöglichkeiten gehöre. Ob aber umgekehrt, wenn diese Bedingungsgleichung realisirt erscheint, ob alsdann diese eben erwähnte Annahme zu den Möglichkeiten gehöre; dieses werden wir in der folgenden Nr. schon im bejahenden Sinne entscheiden, indem wir bei Zugrundelegung dieser Bedingungsgleichung das Integrale von (1), nämlich die entsprechende lineare Differenzialfunction (2), herzustellen lehren werden.

338. Die unmittelbar vorausgehende Integralfunction zu (1) wird bei der Annahme des Bestandhabens der Bedingungsgleichung (4) erhalten, indem man von den Gleichungen (3), aus denen diese (4) gefolgert ward, ausgeht. Mittelst dieser Gleichungen (3) nun werden wir die Coefficienten M' und N' der linearen Differenzialfunction in (2) herzustellen suchen.

Vorerst bietet die erste dieser Gleichungen (3) folgende Bestimmung für M' dar:

$$M' = \int M\,dx + Y, \qquad (5)$$

wo, da die angezeigte Integration zur Rechten nur die Variable x betrifft, die Constante dieser Integration, die wir durch Y vorgestellt haben, nur noch eine Function von y sein kann, welche wir in folgender Weise bestimmen.

Stellt man aus dieser so eben aufgestellten Gleichung (5) den

partiellen Differenzialquotienten von M′ nach y her, so erhält man:

$$\frac{dM'}{dy} = \int \frac{dM}{dy}\, dx + \frac{dY}{dy};$$

mit Berücksichtigung dieses Ergebnisses bieten die zweite und dritte der Gleichungen (3) folgende Bestimmungen für die partiellen Differenzialquotienten von N′ nach x und nach y dar:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dN'}{dx} &= N - \int \frac{dM}{dy}\, dx - \frac{dY}{dy}, \\ \frac{dN'}{dy} &= P; \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

wird endlich die erste dieser Gleichungen partiell nach y und die zweite in gleicher Weise nach x differenzirt, wodurch folgender Unterschied dieser Ergebnisse sich herausstellt:

$$0 = \frac{dN}{dy} - \frac{dP}{dx} - \int \frac{d^2M}{dy^2}\, dx - \frac{d^2Y}{dy^2};$$

so stellt sich folgende Bestimmungsgleichung für Y heraus:

$$\frac{d^2Y}{dy^2} = \frac{dN}{dy} - \frac{dP}{dx} - \int \frac{d^2M}{dy^2}\, dx. \qquad (7)$$

Soll nun, wie aus dem Vorausgeschickten hervorgeht, Y bloß eine Function von y sein, dann ist unerläßlich, daß der Ausdruck zur Rechten dieser Gleichung independent von x erkannt werde; welches auch in der That mit Zuziehung der Bedingungsgleichung (4) nachgewiesen werden kann. Wird nämlich von diesem Ausdrucke zur Rechten der partielle Differenzialquotient nach x hergestellt, so erhält man:

$$\frac{d^2N}{dxdy} - \frac{d^2P}{dx^2} - \frac{d^2M}{dy^2},$$

und da dieses Ergebniß vermöge der Bedingungsgleichung in (4) identisch in Null übergeht; so ist unsre vorige Aussage, die Gleichung (7) betreffend, gerechtfertiget, und wir sind aus derselben (nach Integralrechnung VI, Nr. 302, Gleichung II) Y als Function von y, die zwei willkührliche Constanten mitführen wird, darzustellen in der Lage. Wird diese für Y gewonnene Function von y in (5) eingesetzt; so erscheint M′, als bekannte Function von x und y, die zwei willkührliche Constanten mitführen wird.

Stellt man ferner, zur Kenntniß von N′ zu gelangen, den Differenzialquotienten von Y nach y, oder $\frac{dY}{dy}$ her, setzt dann das Ergebniß in die erste der Gleichungen (6) ein, dann bietet solche den partiellen Differenzialquotjenten von N′ nach x, als bekannte Function von x und y dar; die zweite dieser Gleichungen (6) bietet auch den partiellen Differenzialquotienten von N′ nach y, als bekannte Function von x und y dar: daher hat man zur Bestimmung des totalen Differenzials von N′ die Gleichung:

$$dN' = \frac{dN'}{dx}\,dx + \frac{dN'}{dy}\,dy\,, \qquad (8)$$

in der nunmehr die Coefficienten von dx und dy, als bekannte Functionen von x und y anzusehen sind. Diese Coefficienten entsprechen überdieß der Bedingung der Integrabilität des Ausdruckes rechterhand dieser Gleichung; denn die Gleichung (7), die uns zur Bestimmung von Y geführt, ist der analytische Ausdruck dieser Bedingung: daher bietet diese Gleichung (8), mit Zuziehung des in Integralrechnung V Nr. 282 gewonnenen Theorems, N′ als Function von x und y dar, die außer den beiden bei der Bestimmung von Y eingeführten willkührlichen Constanten noch eine dritte derartige Constante mitführen wird.

Denken wir uns nun M′ und N′ in eben beschriebener Weise, als Functionen von x und y ermittelt, und dieselben in (2) vorangehender Nr. eingesetzt; so stellt die so sich ergebende lineare Differenzialfunction, welche drei willkührliche Constanten mitführen wird, die dem Differenzialausdrucke in (1) derselben Nr. entsprechende, unmittelbar vorhergehende Integralfunction vor.

339. Zur Erläuterung des in vorangehender Nr. auseinander gesetzten allgemeinen Verfahrens legen wir uns die Differenzialfunction:

$$dx^2 + (x^2 + y^2)\,dx\,dy + dy^2$$

zur Integration vor.

Vergleicht man diese mit der allgemeinen (1), so hat man:

$$M = 1\,,\quad N = x^2 + y^2\,,\quad P = 1\,;$$

und da hier die Bedingungsgleichung (4) realisirt erscheint: so können

wir auch zur Herstellung des unmittelbar vorhergehenden Integrals derselben, nach den Vorschriften der vorhergehenden Nr. übergehen.

Die Gleichung (5) daselbst bietet:

$$M' = x + Y$$

dar, wo man Y als Function von y durch die Gleichung (7), die gegenwärtig folgender Form ist:

$$\frac{d^2Y}{dy^2} = 2y\,,$$

zu bestimmen hat. Aus dieser Gleichung zieht man zunächst:

$$Y = 2\int^{(2)} y\,dy^2\,,$$

und wenn das zweifache Integrale, nach Gleichung (II) Nr. 302, in ein einfaches umgesetzt wird, hat man auch:

$$Y = 2\int_a^y (y-y')\,y'\,dy' + ay + b\,,$$

wo a und b die Constanten der Integration vorstellen, und $\alpha$ jedweden Zahlenwerthes fähig ist, für den die Differenzialformel hinter dem Integralzeichen unendlich kleinwerdend verbleibt, die sonach im vorliegenden Falle auch gleich Null gesetzt werden darf.

Man hat also:

$$Y = 2\int_0^y (y-y')\,y'\,dy' + ay + b\,,$$

oder auch:

$$Y = 2y^3\int_0^1 (1-z)\,z\,dz + ay + b\,;$$

ferner ist:

$$\int_0^1 (1-z)\,z\,dz = \frac{1}{2\,.\,3}\,,$$

daher hat man:

$$Y = \tfrac{1}{3}\,y^3 + ay + b\,.$$

Aus dieser Gleichung zieht man:

$$\frac{dY}{dy} = y^2 + a\,,$$

daher gehen die Gleichungen (6) über in:

$$\frac{dN'}{dx} = x^2 - a\,, \quad \frac{dN'}{dy} = 1\,,$$

und man hat zur Bestimmung von $N'$, nach Gleichung (8), die Gleichung:

$$dN' = (x^2 - a)\,dx + dy\,,$$

aus der:

$$N' = \tfrac{1}{3}x^3 - ax + y + c\,,$$

gezogen wird, wo c eine Constante der Integration ist.

Es stellt sonach, beachtend die gewonnenen Bestimmungen von $M'$, Y und $N'$, die lineare Differenzialfunction:

$$(\tfrac{1}{3}y^3 + ay + x + b)\,dx + (\tfrac{1}{3}x^3 - ax + y + c)\,dy\,,$$

in der a, b, c willkührliche Constanten sind, das vollständige unmittelbar vorhergehende Integrale der Eingangs dieser Nr. vorgelegten Differenzialfunction zweiten Grades vor.

340. Bevor wir zum allgemeinen Falle, zu einer Differenzialfunction zweier Variabeln vom nten Grade übergehen, unterziehen wir die Differenzialfunction:

$$M\,dx^3 + N\,dx^2\,dy + P\,dx\,dy^2 + Q\,dy^3\,, \qquad (1')$$

einer noch etwas ausführlichen Erörterung, in der M, N, P, Q beliebige Functionen von x und y sind, und welche, weil die Differenzialien von x und y in derselben in den dritten Dimensionen vorkommen, eine Differenzialfunction des dritten Grades genannt werden kann.

Soll diese Differenzialfunction unmittelbares Ergebniß einer einzigen Differenziation sein; dann ist die Function, die differenzirt, diese hervorgerufen, der Form (Differenzialrechnung III, Nr. 252):

$$M'\,dx^2 + N'\,dx\,dy + P'\,dy^2\,, \qquad (2')$$

d. h. dieselbe ist eine Differenzialfunction des zweiten Grades derselben Variabeln x und y, wie wir solche in Nr. 337 in Bezug auf Integrabilität untersucht haben, in der also $M'$, $N'$ und $P'$ Functionen von x und y vorstellen werden. Beim Statthaben dieser Voraussetzung, d. h., in dem Falle wenn die Differenzialfunction in (1′) in der That Ergebniß der Differenziation des eben aufgestellten

Differenzialausdruckes in (2′) ist; alsdann werden M′, N′, P′ solche Functionen von x und y vorstellen, daß die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dM'}{dx} = M\,,\quad \frac{dM'}{dy} + \frac{dN'}{dx} = N\,,\\ \frac{dN'}{dy} + \frac{dP'}{dx} = P\,,\quad \frac{dP'}{dy} = Q\,, \end{aligned}\right\} \qquad (3')$$

als Gleichheiten bestehen, wodurch dann jede derselben nach jeder einzelnen Variable, x oder y, partiell differenzirt werden darf.

Gehen wir weiter von der Annahme aus, diese Gleichungen bestehen in der That als Gleichheiten; so gelangen wir auf folgendem Wege zu einer von M′, N′, P′ befreiten Gleichheit, die uns die unerläßliche Bedingungsgleichung für die Integrabilität der vorgelegten Differenzialfunction abgeben wird.

Die erste dieser Gleichheiten in (3′) differenzire man dreimal hintereinander partiell nach y, die zweite derselben differenzire man hintereinander zweimal partiell nach y und einmal nach x, die dritte werde einmal nach y und zweimal nach x hintereinander partiell differenzirt, die vierte dieser Gleichheiten endlich werde dreimal hintereinander partiell nach x differenzirt: die auf diese Weise nun erhaltenen vier Gleichheiten multiplicire man in der eben aufgeführten Ordnungsfolge nach der Reihe mit $+1, -1, +1, -1$; wird dann endlich die Summe der so gewonnenen vier Gleichheiten genommen: so stellt sich folgende von M′, N′ und P′ freie Gleichheit heraus:

$$\frac{d^3M}{dy^3} - \frac{d^3N}{dy^2dx} + \frac{d^3P}{dydx^2} - \frac{d^3Q}{dx^3} = 0\,, \qquad (4')$$

die in verlangter Weise die angekündigte Bedingungsgleichung für die Integrabilität der vorgelegten Differenzialfunction in (1′) repräsentirt.

341. Beim Eintreffen der Ausgangs vorangehender Nr. aufgestellten Bedingungsgleichung (4′) wollen wir nun darthun, daß die Differenzialfunction (1′) daselbst nicht nur eine Integralfunction gestattet, sondern daß dieselbe alsdann auch, wie aus dem Verfolge dieser Nr. hervorgehen soll, der Annahme in (2′) gemäß jedesmal bestimmt werden kann.

Wir erreichen dieses Endziel, wenn wir bei einziger Zugrundelegung der Bedingungsgleichung (4′) darthun, daß dann die Gleichungen (3′) vorangehender Nr. die Bestimmung der noch unbekannten Functionen $M'$, $N'$ und $P'$ herbeiführen; wozu wir auch sofort übergehen.

Zuerst bietet die erste der Gleichungen (3′) für $M'$ folgende Bestimmungsgleichung dar:

$$M' = \int M\,dx + Y\,, \qquad (5')$$

wo die angezeigte Integration lediglich auf $x$ Bezug hat, und wo $Y$, als Constante dieser Integration, eine Function von $y$ sein kann, die folgendermaßen bestimmt wird.

Vermöge dieser Bestimmung von $M'$ geht nämlich die zweite der Gleichungen (3′) über in:

$$\frac{dN'}{dx} = N - \int \frac{dM}{dy}\,dx - \frac{dY}{dy}\,, \qquad (6')$$

die, in folgender Weise, mit der dritten und vierten der Gleichungen (3′) verbunden eine von $N'$ und $P'$ befreite Gleichung darbietet, welche dann die Bestimmung von $Y$ als Function von $y$ herbeiführt.

Diese eben aufgestellte Gleichung (6′) differenzire man nämlich zweimal nach einander partiell in Bezug auf $y$, die dritte der Gleichungen (3′) werde einmal nach $y$ und einmal nach $x$ partiell differenzirt, dann differenzire man die vierte der Gleichungen in (3′) zweimal nach einander partiell in Bezug auf $x$; diese in eben beschriebener Weise erhaltenen Gleichungen multiplicire man nach der Ordnung ihrer Folge mit $+1$, $-1$, $+1$; und wenn endlich die Summe derselben genommen wird: so stellt sich die angekündigte Bestimmungsgleichung von $Y$, wie folgt dar:

$$\frac{d^3Y}{dy^3} = \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^2P}{dx\,dy} + \frac{d^2N}{dy^2} - \int \frac{d^3M}{dy^3}\,dx\,. \qquad (7')$$

Nun ist der Ausdruck zur Rechten dieser Gleichung unabhängig von $x$, denn der Differenzialquotient desselben nach $x$ bietet beim Statthaben der Bedingungsgleichung (4′) die Nulle als Ergebniß dar; daher ist besagter Ausdruck entweder eine Constante oder eine Function von $y$, und man zieht aus dieser Gleichung (7′) mit Zugrundelegung der Gleichung (II) Nr. 302 für $Y$ eine Function von $y$, die drei willkührliche Constanten mitführt.

Nunmehr Y als eine bekannte Function von y und, nach Gleichung (5′), auch M′ als bekannte Function von x und y erklärt werden kann, nunmehr ist auch der Ausdruck rechterhand in Gleichung (6′) eine bekannte Function von x und y, welche Gleichung die Bestimmung von N′ in ähnlicher Weise herbeiführt, als die erste der Gleichungen (3′) bei der Bestimmung von M′ mitgewirkt.

Wird zur Vereinfachung der Darstellung die Gleichung festgestellt:

$$N - \frac{dY}{dy} - \int \frac{dM}{dy}\, dx = N_1 , \qquad (\alpha)$$

dann zieht man aus besagter Gleichung (6′), wenn beide Theile derselben nach x integrirt werden, folgende:

$$N' = \int N_1\, dx + Y_1 , \qquad (5'')$$

wo, da die angezeigte Integration zur Rechten bloß auf x bezogen ist, die Constante dieser Integration, nämlich $Y_1$, eine Function von y sein kann, zu deren Bestimmung wir sofort übergehen.

Stellt man aus dieser Gleichung (5″) den partiellen Differenzialquotienten $\frac{dN'}{dy}$ her und setzt solchen in die dritte der Gleichungen (3′) ein, dann hat man in Vereinigung mit der vierten der Gleichungen (3′) folgende zwei Gleichungen, die die partiellen Differenzialquotienten von P′ nach x und nach y darstellen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP'}{dx} &= P - \int \frac{dN_1}{dy}\, dx - \frac{dY_1}{dy} , \\ \frac{dP'}{dy} &= Q ; \end{aligned}\right\} \qquad (6'')$$

differenzirt man die erste dieser Gleichungen partiell nach y, die zweite in gleicher Weise nach x, so führt der Unterschied derselben auf folgende von P′ befreite Gleichung:

$$\frac{d^2Y_1}{dy^2} = \frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} - \int \frac{d^2N_1}{dy^2}\, dx ; \qquad (7'')$$

der Ausdruck zur Rechten in dieser Gleichung ist aber von x unabhängig, denn der Differenzialquotient desselben nach x geht mit Zuziehung der Bedeutung von $N_1$ aus Gleichung ($\alpha$) und mit Zuziehung der Gleichung (7′) in Null über: sonach kann aus dieser Gleichung (7″), gleichfalls mit Hülfe der Gleichung (II) Nr. 302.,

$Y_1$ als Function von y bestimmt werden, welche Bestimmung abermals zwei willkührliche Constanten einführen wird.

Nachdem auch $Y_1$ als bekannte Function von y anzusehen ist, bietet die Gleichung (5″) für $N'$ eine bekannte Function von x und y dar; so daß uns nur noch die Bestimmung von $P'$ erübriget.

Zur Kenntniß derselben gelangen wir mittelst der Gleichungen in (6″). Denn da die Ausdrücke zu Rechten besagter Gleichungen nunmehr bekannte Functionen von x und y sind, und zwar solche, daß wenn dieselben in folgende Gleichung:

$$dP' = \frac{dP'}{dx}\,dx + \frac{dP'}{dy}\,dy\,, \qquad (8')$$

statt $\frac{dP'}{dx}$ und $\frac{dP'}{dy}$ eingeführt werden, der Ausdruck zur Rechten, der eine lineare Differenzialfunction nach x und y vorstellt, vermöge der Gleichung (7″) der Bedingung der Integrabilität nachkömmt; so bietet die Integralfunction dieser linearen Differenzialfunction, die nach Nr. 282 darstellbar ist und abermals eine willkührliche Constante einführt, die angekündigte Bestimmung von $P'$ dar.

Werden die nunmehr als Functionen von x und y darstellbar erkannten Ausdrücke für $M'$, $N'$ und $P'$ in (2′) vorangehender Nr. eingesetzt; so stellt die so erhaltene Differenzialfunction zweiten Grades die nächstvorhergehende Integralfunction zur vorgelegten Differenzialfunction des dritten Grades (1′) derselben Nr. vor. Diese Integralfunction wird, wie aus dem Vorangeschickten hervorgeht, sechs willkührliche Constanten mitführen, die beim Uebergange von (2′) auf (1′), durch ein totales Differenziren der erstern, sämmtlich verschwinden oder ausfallen.

Nach dem in dieser Nr. mitgetheilten allgemeinen Verfahren haben wir die Differenzialfunction des dritten Grades:

$$2\,x\,dx^2\,dy + 2\,y\,dx\,dy^2\,,$$

die der Bedingungsgleichung in (4′) ein Genüge thut, integrirt, und folgende Integralfunction derselben gefunden:

$$(a+by+cy^2)\,dx^2+(f-ey-bx+y^2-2\,cxy+x^2)\,dx\,dy+(g+ex+cx^2)\,dy^2\,,$$

wo a, b, c, e, f, g die sechs willkührlichen Integrationsconstanten vorstellen.

**342.** Stellt man durch:

$$H_0\,,\quad H_1\,,\quad H_2\,,\quad H_3\,,\ldots.\quad H_n$$

Functionen von x und y vor, so ist die allgemeinste Form einer mehrgliedrigen nichtlinearen Differenzialfunction dieser beiden Variabeln x und y folgende:

$$H_0\,dx^n + H_1\,dx^{n-1}\,dy + H_2\,dx^{n-2}\,dy^2 + \ldots + H_{n-1}\,dx\,dy^{n-1} + H_n dy^n\,, \quad \text{(I)}$$

welche, wegen der Dimensionen der Differenzialien der Variabeln, vom nten Grade genannt werden kann. Die Angabe der Bedingungsgleichung unter den Coefficienten, damit diese als Ergebniß einer einmaligen Differenziation einer analogen Differenzialfunction von (n—1)ten Grade erkannt werde, wird den Inhalt vorliegender Nr. ausmachen.

Stellt man letztere folgendermaßen dar:

$$H'_0\,dx^{n-1} + H'_1\,dx^{n-2}\,dy + H'_2\,dx^{n-3}\,dy^2 + \ldots + H'_{n-2}\,dx\,dy^{n-2} + H'_{n-1}\,dy^{n-1}, \quad \text{(II)}$$

wo:

$$H'_0\,,\quad H'_1\,,\quad H'_2\,,\quad H'_3\,,\ldots.\quad H'_{n-1}$$

unbekannte Functionen von x und y vorstellen; so muß diese, unter der Annahme dx und dy bleiben unveränderlich differenzirt, genau die vorgelegte Differenzialfunction in (I) darbieten. Dieses vorausgesetzt, bestehen folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dH'_0}{dx} &= H_0\,,\quad \frac{dH'_0}{dy} + \frac{dH'_1}{dx} = H_1\,,\\
\frac{dH'_1}{dy} &+ \frac{dH'_2}{dx} = H_2\,,\\
\frac{dH'_2}{dy} &+ \frac{dH'_3}{dx} = H_3\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dH'_{n-3}}{dy} &+ \frac{dH'_{n-2}}{dx} = H_{n-2}\,,\\
\frac{dH'_{n-2}}{dy} &+ \frac{dH'_{n-1}}{dx} = H_{n-1}\,,\quad \frac{dH'_{n-1}}{dy} = H_n\,,
\end{aligned}\right\} \quad \text{(III)}$$

die, wenn die so eben getroffene Annahme über das gegenseitige Verhalten der beiden Differenzialfunctionen begründet wäre, in welchem Falle die Coefficienten in (II) gleichwie die in (I) als bekannte

Functionen von x und y anzusehen wären, Gleichheiten vorstellen würden; so daß alsdann jede derselben nach jeder einzelnen der Variabeln x und y differenzirt werden dürfte.

Gehen wir vom Statthaben dieser Voraussetzung aus, und differenziren diese Gleichheiten in eben erwähnter Weise und zwar: die erste n mal hinter einander partiell nach y, die zweite eben so (n—1) mal nach y und 1 mal nach x, die dritte (n—2) mal nach y und 2 mal nach x, die vierte (n—3) mal nach y und 3 mal nach x u. s. f., die vorletzte 1 mal nach y und (n—1) mal nach x und endlich die letzte obiger Gleichheiten n mal hinter einander nach x; multipliciren wir nunmehr die so erhaltenen Gleichheiten nach der Ordnung ihrer Aufeinanderfolge mit:

$$+1, -1, +1, -1, +1, -1, \ldots\ldots (-1)^n;$$

so bietet deren Summe die verlangte Bedingungsgleichung in folgender Form dar:

$$\frac{d^nH_0}{dy^n} - \frac{d^nH_1}{dy^{n-1}dx} + \frac{d^nH_2}{dy^{n-2}dx^2} - \ldots (-1)^{n-1}\frac{d^nH_{n-1}}{dydx^{n-1}} + (-1)^n\frac{d^nH_n}{dx^n} = 0, \quad \text{(IV)}$$

die identisch realisirt werden muß, damit die oben getroffene Annahme, die Differenzialfunction in (I) sei unmittelbares Ergebniß der Differenziation der Differenzialfunction in (II), nicht zu den Unmöglichkeiten gehöre.

Beim Statthaben dieser Bedingungsgleichung werden wir in der folgenden Nr. nicht allein die Realität eben erwähnter Annahme darthun, sondern wir werden zugleich, wie solches in den vorangeschickten Nrn. 338 und 341 geschah, die Integralfunction von (I), nämlich die Differenzialfunction in (II), herstellen lehren.

343. Zur Herstellung der Differenzialfunction in (II), als der nächstvorangehenden Integralfunction zur Differenzialfunction (I) vorhergehender Nr., bei Zugrundelegung nämlich der Bedingungsgleichung (IV) daselbst, wenden wir uns den dort aufgestellten Gleichungen (III) zu, aus denen wir der Reihe nach die bis jetzt noch unbekannten Functionen von x und y, nämlich die Coefficienten:

$$H'_0, H'_1, H'_2, H'_3, \ldots\ldots H'_{n-1},$$

ziehen werden.

Die erste der Gleichungen in (III) bietet zuerst:

$$H'_0 = \int H_0\,dx + Y_0, \qquad (V)$$

dar, wo, da die angezeigte Integration lediglich auf x Bezug hat, die durch $Y_0$ dargestellte willkührliche Constante der Integration eine Function von y sein wird, mit deren Bestimmung wir uns zunächst zu befassen haben.

Differenzirt man zu diesem Ende die Gleichungen (III) partiell, die zweite derselben (n—1) mal nach einander in Bezug auf y, die dritte (n—2) mal nach y und 1 mal nach x, die vierte (n—3) mal nach y und 2 mal nach x, die vorletzte 1 mal nach y und (n—2) mal nach x, endlich die letzte (n—1) mal nach x; multiplicirt man hierauf die so erhaltenen Gleichungen in der gleichen Ordnung mit + 1, — 1, + 1, — 1, u. s. w.: so bietet die Summe derselben folgende Gleichung dar:

$$\frac{d^nH'_0}{dy^n} =$$

$$= \frac{d^{n-1}H_1}{dy^{n-1}} - \frac{d^{n-1}H_2}{dy^{n-2}dx} + \frac{d^{n-1}H_3}{dy^{n-3}dx^2} - \ldots (-1)^{n-2}\,\frac{d^{n-1}H_{n-1}}{dy\,dx^{n-2}} + (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}H_n}{dx^{n-1}};$$

es giebt aber die Gleichung (V), wenn solche n mal nacheinander in Bezug auf y differenzirt wird, folgende:

$$\frac{d^nH'_0}{dy^n} = \int \frac{d^nH_0}{dy^n}\,dx + \frac{d^nY_0}{dy^n},$$

daher erhält man zur Bestimmung von $Y_0$ die Gleichung:

$$\frac{d^nY_0}{dy^n} = \frac{d^{n-1}H_1}{dy^{n-1}} - \frac{d^{n-1}H_2}{dy^{n-2}dx} + \frac{d^{n-1}H_3}{dy^{n-3}dx^2} - \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^{n-2}\,\frac{d^{n-1}H_{n-1}}{dy\,dx^{n-2}} + (-1)^{n-1}\,\frac{d^{n-1}H_n}{dx^{n-1}} - \int \frac{d^nH_0}{dy^n}\,dx. \qquad (VI)$$

Der Ausdruck zur Rechten in dieser Gleichung ist von x unabhängig, denn differenzirt man solchen nach x, so stellt sich Null zum Differenzialquotienten heraus, wenn die Bedingungsgleichung (IV) zugezogen wird; sonach gewinnt man aus derselben $Y_0$ als Function von y, wenn derselbe Ausdruck zur Rechten n mal nach einander in Bezug auf y integrirt wird. Man wird hiezu entweder die Gleichung (I) Nr. 299 oder die Gleichung (II) Nr. 302 unterlegen; die eine wie die andere dieser Gleichungen wird dann $Y_0$

als Function von y, die n willkührliche Constanten mitführen wird, darstellen.

Ist nun $Y_0$ bestimmt, so bietet die obige Gleichung (V) für $H'_0$ eine bekannte Function von x und y dar.

In ähnlicher Weise, wie sämmtliche (n+1) Gleichungen in (III) zur Bestimmung von $H'_0$ mitgewirkt, treten dieselben Gleichungen, die erste ausgenommen, bei der Bestimmung von $H'_1$ auf.

Berücksichtiget man nämlich die gewonnene Bestimmung für $H'_0$ aus Gleichung (V), so bietet die zweite der Gleichungen (III) folgende dar:

$$\frac{dH'_1}{dx} = H_1 - \frac{dY_0}{dy} - \int \frac{dH_0}{dy}\, dx\,,$$

und wenn der Kürze wegen:

$$H_1 - \frac{dY_0}{dy} - \int \frac{dH_0}{dy}\, dx = K_1 \qquad (\alpha_1)$$

gesetzt wird, zieht man aus derselben folgende:

$$H'_1 = \int K_1\, dx + Y_1\,, \qquad (V_1)$$

wo, gleichwie in der Gleichung (V), die angezeigte Integration auf x Bezug hat, und wo sonach die willkührliche Constante der Integration, $Y_1$ nämlich, als eine noch zu bestimmende Function von y auftritt.

Zur Bestimmung dieser Function differenzire man von den Gleichungen (III) die dritte (n—2) mal nach einander partiell in Bezug auf y, die vierte (n—3) mal nach y und 1 mal nach x, die fünfte (n—4) mal nach y und 2 mal nach x u. s. f., die vorletzte 1 mal nach y und (n—3) mal nach x, die letzte endlich (n—2) mal nach x; diese Gleichungen multiplicire man in der eben angeführten Ordnung mit + 1, — 1, + 1, — 1, u. s. f.; nimmt man hierauf die Summe derselben: so ergiebt sich die Gleichung:

$$\frac{d^{n-1}H'_1}{dy^{n-1}} =$$

$$= \frac{d^{n-2}H_2}{dy^{n-2}} - \frac{d^{n-2}H_3}{dy^{n-3}dx} + \frac{d^{n-2}H_4}{dy^{n-4}dx^2} - \ldots (-1)^{n-3} \frac{d^{n-2}H_{n-1}}{dy\, dx^{n-3}} + (-1)^{n-2} \frac{d^{n-2}H_n}{dx^{n-2}}\,.$$

Wird nun die Gleichung ($V_1$), in Bezug auf y, (n—1) mal nach

einander partiell differenzirt; so ergiebt sich durch Verbindung des Ergebnisses mit der eben aufgestellten Gleichung, folgende Bestimmungsgleichung für $Y_1$:

$$\frac{d^{n-1}Y_1}{dy^{n-1}} = \frac{d^{n-2}H_2}{dy^{n-2}} - \frac{d^{n-2}H_3}{dy^{n-3}dx} + \frac{d^{n-2}H_4}{dy^{n-4}dx^2} - \ldots$$

$$+ (-1)^{n-3}\frac{d^{n-2}H_{n-1}}{dy\,dx^{n-3}} + (-1)^{n-2}\frac{d^{n-2}H_n}{dx^{n-2}} - \int \frac{d^{n-1}K_1}{dy^{n-1}}\,dx\,. \quad (VI_1)$$

Differenzirt man den Ausdruck zur Rechten dieser Gleichung nach x, so ergiebt sich mit Zuziehung der Gleichungen (VI) und ($\alpha_1$) Null zum Differenzialquotienten; demnach ist derselbe independent von x, und diese eben gewonnene Gleichung bietet, gleichwie die Gleichung (VI) entweder nach Gleichung (I) Nr. 299 oder auch nach Gleichung (II) Nr. 302 behandelt, $Y_1$ als Function von y mit (n—1) willkührlichen Constanten dar.

Nunmehr $Y_1$ eine bekannte Function von y vorstellt, bietet die Gleichung ($V_1$) den Coefficienten $H'_1$ als bekannte Function von x und y dar.

Zur Bestimmung von $H'_2$ übergehend, ziehen wir zuvörderst aus ($V_1$), wenn wir dieselbe partiell nach y differenziren, folgende:

$$\frac{dH'_1}{dy} = \int \frac{dK_1}{dy}\,dx + \frac{dY_1}{dy}\,,$$

welche, mit der dritten der Gleichungen in (III) verbunden, folgende giebt:

$$\frac{dH'_2}{dx} = H_2 - \frac{dY_1}{dy} - \int \frac{dK_1}{dy}\,dx\,;$$

setzt man nun der Kürze wegen:

$$H_2 - \frac{dY_1}{dy} - \int \frac{dK_1}{dy}\,dx = K_2\,, \quad (\alpha_2)$$

so erhält man:

$$H'_2 = \int K_2\,dx + Y_2\,, \quad (V_2)$$

in der, da die angezeigte Integration nur auf x Bezug hat, die Constante der Integration $Y_2$, als Function von y erklärt werden muß, deren Bestimmung ähnlich wie die von $Y_1$ und Y in folgender Weise erzielt wird.

Von den Gleichungen (III) differenzire man partiell die vierte (n—3) mal nach einander in Bezug auf y, die fünfte (n—4) mal nach y und 1 mal nach x, die sechste (n—5) mal nach y und 2 mal nach x u. s. f., die vorletzte 1 mal nach y und (n—4) mal nach x, die letzte (n—4) mal nach x; in gleicher Folge multiplicire man diese Gleichungen mit + 1, — 1, + 1, — 1, u. s. w.: so giebt ihre Summe folgende Gleichung:

$$\frac{d^{n-2}H'_2}{dy^{n-2}} =$$

$$= \frac{d^{n-3}H_3}{dy^{n-3}} - \frac{d^{n-3}H_4}{dy^{n-4}dx} + \frac{d^{n-3}H_5}{dy^{n-5}dx^2} - \ldots (-1)^{n-4}\frac{d^{n-3}H_{n-1}}{dydx^{n-4}} + (-1)^{n-3}\frac{d^{n-3}H_n}{dx^{n-3}}.$$

Differenzirt man auch noch (n—2) mal nach einander die Gleichung ($V_2$) partiell nach y, und verbindet das Ergebniß mit der eben aufgestellten Gleichung; so ergiebt sich folgende Bestimmungsgleichung für $Y_2$:

$$\frac{d^{n-2}Y_2}{dy^{n-2}} = \frac{d^{n-3}H_3}{dy^{n-3}} - \frac{d^{n-3}H_4}{dy^{n-4}dx} + \frac{d^{n-3}H_5}{dy^{n-5}dx^2} - \ldots$$

$$+ (-1)^{n-4}\frac{d^{n-3}H_{n-1}}{dy\,dx^{n-4}} + (-1)^{n-3}\frac{d^{n-3}H_n}{dx^{n-3}} - \int \frac{d^{n-2}K_2}{dy^{n-2}}dx. \quad (VI_2)$$

Der Differenzialquotient des Ausdruckes zur Rechten dieser Gleichung nach x ist der Nulle gleich, wenn man die Gleichungen ($VI_1$) und ($\alpha_2$) zuzieht; woraus die Unabhängigkeit desselben von x hervorgeht. Integrirt man daher denselben (n—2) mal nacheinander in Bezug auf y, entweder nach Gleichung (I) Nr. 299 oder nach Gleichung (II) Nr. 302; so erhält man für $Y_2$ eine Function von y mit (n—2) willkührlichen Constanten, welche, zur Aufrechthaltung der Allgemeinheit, verschieden von den n willkührlichen Constanten der Function Y und von den (n—1) der Function $Y_1$ gedacht sein müssen.

Wird diese für $Y_2$ gewonnene Bestimmung in Gleichung ($V_2$) eingesetzt, so steht auch $H'_2$ als bekannte Function von x und y da.

Wenn in dieser Weise, die Coefficienten in (II) vorangehender Nr. zu bestimmen, fortgefahren wird, so ergiebt sich, wenn der Kürze wegen:

$$H_3 - \frac{dY_2}{dy} - \int \frac{dK_2}{dy}\, dx = K_3 \qquad (\alpha_3)$$

gesetzt wird, für $H'_3$ die Gleichung:

$$H'_3 = \int K_3\, dx + Y_3 \,. \qquad (V_3)$$

Die willkührliche Constante dieser Gleichung oder $Y_3$, wird aus folgender Gleichung:

$$\frac{d^{n-3}Y_3}{dy^{n-3}} = \frac{d^{n-4}H_4}{dy^{n-4}} - \frac{d^{n-4}H_5}{dy^{n-5}dx} + \frac{d^{n-4}H_6}{dy^{n-6}dx^2} - \ldots$$

$$+ (-1)^{n-5} \frac{d^{n-4}H_{n-1}}{dy\, dx^{n-5}} + (-1)^{n-4} \frac{d^{n-4}H_n}{dx^{n-4}} - \int \frac{d^{n-3}K_3}{dy^{n-3}}\, dx \,, \qquad (VI_3)$$

nach der einen oder andern der bereits mehrmals citirten Gleichungen, als Function von y sammt (n—3) willkührlichen Constanten zu ziehen sein.

Stellt r eine der Zahlen:

$$1 \,,\ 2 \,,\ 3 \,,\ 4 \,,\ 5 \,,\ \ldots\ n-2 \,,\ n-1$$

vor, so gelangt man zur Kenntniß von $H'_r$, nämlich zum Coefficienten von

$$dx^{n-r-1}\, dy^r$$

im Differenzialausdrucke (II) vorangehender Nr., auf folgendem Wege.

Man setze:

$$H_r - \frac{dY_{r-1}}{dy} - \int \frac{dK_{r-1}}{dy}\, dx = K_r \,, \qquad (\alpha_r)$$

so ist:

$$H'_r = \int K_r\, dx + Y_r \,, \qquad (V_r)$$

wo man zur Bestimmung von $Y_r$ die Gleichung hat:

$$\frac{d^{n-r}Y_r}{dy^{n-r}} = \frac{d^{n-r-1}H_{r+1}}{dy^{n-r-1}} - \frac{d^{n-r-1}H_{r+2}}{dy^{n-r-2}dx} + \frac{d^{n-r-1}H_{r+3}}{dy^{n-r-3}dx^2} - \ldots$$

$$+ (-1)^{n-r-2} \frac{d^{n-r-1}H_{n-1}}{dy\, dx^{n-r-2}} + (-1)^{n-r-1} \frac{d^{n-r-1}H_n}{dx^{n-r-1}} - \int \frac{d^{n-r}K_r}{dy^{n-r}}\, dx \,. \qquad (VI_r)$$

Der Ausdruck zur Rechten in dieser Gleichung ist von x unabhängig, welches in gleicher Weise, wie bei den Gleichungen $(VI_2)$, $(VI_1)$ gerechtfertiget wird; integrirt man daher solchen (n—r) mal in Bezug

auf y, entweder nach Gleichung (I) Nr. 299 oder nach Gleichung (II) Nr. 302: so stellt sich $Y_r$ als Function von y mit $(n-r)$ willkührlichen Constanten dar.

Wird diese gewonnene Bestimmung für $Y_r$ in die Gleichung $(V_r)$ gesetzt, so steht auch $H'_r$ als bekannte Function von x und y da.

Aus diesen allgemeinen Gleichungen wollen wir noch die besondern Fälle:

$$r = n-2 \text{ und } r = n-1$$

folgern, d. h. die Bestimmungsgleichungen der Coefficienten $H'_{n-2}$ und $H'_{n-1}$ zusammenstellen.

Für die Annahme $r = n-2$ gehen folgende Gleichungen hervor:

$$H_{n-2} - \frac{dY_{n-3}}{dy} - \int \frac{dK_{n-3}}{dy}\,dx = K_{n-2}\,, \qquad (\alpha_{n-2})$$

$$H'_{n-2} = \int K_{n-2}\,dx + Y_{n-2}\,, \qquad (V_{n-2})$$

$$\frac{d^2Y_{n-2}}{dy^2} = \frac{dH_{n-1}}{dy} - \frac{dH_n}{dx} - \int \frac{d^2K_{n-2}}{dy^2}\,dx\,. \qquad (VI_{n-2})$$

Die letztere dieser Gleichungen wird $Y_{n-2}$, als Function von y mit zwei willkührlichen Constanten darbieten, welche in Gleichung $(V_{n-2})$ gesetzt, auch $H'_{n-2}$ als bekannte Function von x und y darstellen wird.

Endlich gibt die Annahme $r = n-1$ folgende Gleichungen:

$$H_{n-1} - \frac{dY_{n-2}}{dy} - \int \frac{dK_{n-2}}{dy}\,dx = K_{n-1}\,, \qquad (\alpha_{n-1})$$

$$H'_{n-1} = \int K_{n-1}\,dx + Y_{n-1}\,, \qquad (V_{n-1})$$

$$\frac{dY_{n-1}}{dy} = H_n - \int \frac{dK_{n-1}}{dy}\,dx\,. \qquad (VI_{n-1})$$

Aus der letztern dieser Gleichungen wird man $Y_{n-1}$ als Function von y mit einer willkührlichen Constante ziehen, welche in $(V_{n-1})$ gesetzt, eine bekannte Function von x und y für $H'_{n-1}$, oder für den letzten der Coefficienten in dem Differenzialausdrucke (II) darbieten wird.

Werden diese Coefficienten:

$$H'_0,\ H'_1,\ H'_2,\ H'_3,\ \ldots\ H'_{n-1}$$

in den Differenzialausdruck (II) vorangehender Nr. eingesetzt; dann

stellt solcher die unmittelbar vorangehende Integralfunction der daselbst vorgelegten Differenzialfunction vom nten Grade unter den Variabeln x und y vor. Betreffend die Anzahl der willkührlichen Constanten der eben erwähnten Integralfunction, bedenke man, daß n solcher Constanten bei der Bestimmung von $H'_0$, n—1 bei $H'_1$, n—2 bei $H'_2$ u. s. w., 2 bei $H'_{n-2}$, 1 bei $H'_{n-1}$ erhalten worden; folglich ist die Gesammtzahl derselben gleich:

$$\tfrac{1}{2}\, n\,(n+1)\,,$$

die insgesammt durch eine einzige Differenziation wegfallen.

---

## §. II.

## Mehrgliedrige nichtlineare Differenzialfunctionen dreier Variabeln.

**344.** Auch im vorliegenden Paragraphen eröffnen wir die Untersuchungen über Integrabilität mit dem einfachsten Falle der in der Ueberschrift angedeuteten Differenzialfunctionen. Mit Berufung nun auf die am Eingange zum vorausgeschickten Paragraphen in Nr. 337 gemachten Mittheilungen wird daher folgende Differenzialfunction der Variabeln x, y und z, die des zweiten Grades in Bezug auf die Differenzialien derselben ist, nämlich:

$$A\,dx^2 + B\,dy^2 + C\,dz^2 + D\,dx\,dy + E\,dz\,dx + F\,dy\,dz\,, \qquad (1)$$

in der die Coefficienten:

$$A\,,\ B\,,\ C\,,\ D\,,\ E\,,\ F$$

Functionen von x, y und z vorstellen, Gegenstand unserer ersten Betrachtnahme sein. Zuerst werden wir uns mit der Ableitung der Bedingungsgleichungen der Integrabilität derselben befassen, worauf wir dann zur Herstellung der unmittelbar vorhergehenden Integralfunction derselben schreiten werden, falls nämlich besagte Bedingungsgleichungen eintreffen.

Soll diese Differenzialfunction durch einmaliges totales Differenziren einer Function von x, y und z entstanden sein, so muß letztere eine lineare Differenzialfunction derselben Variabeln vorstellen, die nach Nr. 278 der Form:

$$A'\,dx + B'\,dy + C'\,dz \qquad (2)$$

sein wird, wo $A'$, $B'$, $C'$ vor der Hand unbekannte Functionen der Variabeln $x$, $y$ und $z$ bedeuten. Mit der Untersuchung der Beschaffenheit der Coefficienten in (1), damit diese Annahme, die nach den in oben citirter Nr. 337 gemachten Prämissen die einzig denkbare ist, als möglich erkannt werde, werden wir uns in dieser und in den nächstfolgenden drei Nrn. befassen.

Wir leiten diese Untersuchung ein, indem wir den Differenzialausdruck in (2) nach den Variabeln $x$, $y$, $z$ differenziren, dabei die Differenzialien dieser als Constante behandeln, und das Ergebniß mit dem Differenzialausdrucke in (1) vergleichen. Das Ergebniß der Annahme, letzterer sei in der That durch eine der Differenziation der erstern entstanden, stellen folgende Gleichungen dar:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dA'}{dx} = A\,,\ \frac{dB'}{dx} + \frac{dA'}{dy} = D\,,\ \frac{dB'}{dy} = B\,,\\ \frac{dA'}{dz} + \frac{dC'}{dx} = E\,,\\ \frac{dC'}{dy} + \frac{dB'}{dz} = F\,,\ \frac{dC'}{dz} = C\,, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

die als Gleichheiten erkannt werden müssen, damit die eben erwähnte Annahme haltbar sei.

Diese Eigenthümlichkeit der Gleichungen in (3) zu erfahren, bleibt uns der einzige Weg offen, die uns unbekannten Functionen $A'$, $B'$ und $C'$ aus denselben zu eliminiren; d. h., wir haben uns mit der Herstellung der Bedingungsgleichungen unter den bekannten Functionen:

$$A\,,\ B\,,\ C\,,\ D\,,\ E\,,\ F\,,$$

der vorgelegten Differenzialfunction (1) zu befassen, die in Folge der vorigen Annahme hervorgehen können.

Vergleicht man, zur Erzielung dieser Elimination, die drei auf der ersten Zeile in (3) befindlichen Gleichungen mit den ganz analogen zu denselben, nämlich, mit den Gleichungen (3) in Nr. 337; so bieten solche, durch eine ähnliche Behandlung wie diese angeführten, folgendes Eliminationsergebniß dar:

$$\frac{d^2A}{dy^2} - \frac{d^2D}{dydx} + \frac{d^2B}{dx^2} = 0\,.$$

Auf eine ähnliche Bedingungsgleichung zu der eben aufgestellten

führen die erste, die vierte und die sechste der Gleichungen in (3); abermals eine ähnliche rufen die dritte, die fünfte und die sechste derselben Gleichungen (3) hervor: so daß wir in Folge der Elimination der Functionen $A'$, $B'$ und $C'$, in oben erwähnter Weise, folgende drei Bedingungsgleichungen aus den Gleichungen in (3) ziehen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2A}{dy^2} - \frac{d^2D}{dydx} + \frac{d^2B}{dx^2} &= 0\,, \\ \frac{d^2C}{dx^2} - \frac{d^2E}{dxdz} + \frac{d^2A}{dz^2} &= 0\,, \\ \frac{d^2B}{dz^2} - \frac{d^2F}{dzdy} + \frac{d^2C}{dy^2} &= 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Daß beim Nichtstatthaben dieser Bedingungsgleichungen auf die Unzuläßigkeit der obigen Annahme, die Integrabilität der vorgelegten Differenzialfunction (1) betreffend, geschlossen werden darf, ist an und für sich einleuchtend; ob aber umgekehrt, vom Statthaben dieser drei Bedingungsgleichungen ausgehend, ein Schluß auf das Vorhandensein einer der Differenzialfunction (1) entsprechenden Integralfunction, wie (2), gemacht werden darf, dieses scheint aus Gründen, die wir gleich am Eingange der nächstfolgenden Nr. vorführen werden, eine Entscheidung in bejahendem Sinne zuzulassen: nur erst nach einer nähern Erwägung dieser Gründe, woraus deren Unzulänglichkeit hervorgehen soll, werden wir zur Angabe der noch übrigen, von (4) durchaus verschiedenen Bedingungsgleichungen übergehen, die zugleich mit (4) realisirt werden müssen, damit die Differenzialfunction in (1), als unmittelbares Ergebniß der Differenziation einer linearen Differenzialfunction wie (2) erkannt werde.

345. Wenn mehrere, etwa $m$, allgemeine Größen durch ein System von $n$ Gleichungen, wo $n > m$ ist, verbunden sind, wobei jede der $n$ Gleichungen mindestens eine dieser $m$ Größen und überdieß noch andere Größen, gleichfalls allgemeiner Art, enthält; dann ist jedesmal durch Elimination der zuerst erwähnten $m$ Größen ein System von $n-m$ Gleichungen abzuleiten wenigstens denkbar, in denen diese $m$ Größen insgesammt fehlen. Dieses System von $n-m$ Gleichungen wird, wie allgemein bekannt, je dieselbe Anzahl von Gleichungen des vorgelegten Systems in der Weise immer ersetzen, daß je $m$ Gleichungen des vorgelegten Systems in Vereinigung mit diesen $n-m$ ein System von $n$ Gleichungen darbieten, das in aller und jeder Beziehung dem ur-

sprünglichen Systeme von n Gleichungen, bevor noch irgend welche Umformung mit demselben vorgenommen ward, substituirt werden darf. Es ist ferner gar wohl möglich, daß die durch besagte Elimination gewonnenen n — m Gleichungen, je nach der Anordnung dieser Elimination bald so und bald anders ausfallen; d. h., unter diesen n — m Gleichungen dürften der Form nach einige oder auch alle insgesammt bei einer gewissen Anordnung des Eliminationsgeschäftes verschieden, als bei einer andern Anordnung desselben sich herausstellen: dem Wesen nach aber müssen dieselben, je ein durch Elimination gewonnenes System von n — m Gleichungen, unter einander gleichbedeutend sein; nämlich, aus je irgend einem solchen Systeme muß ohne Zuziehung anderer Hülfsgleichungen (etwa aus dem anfänglich vorgelegten Systeme von n Gleichungen) jedes der übrigen entweder gefolgert, oder als Folge erkannt werden: daß demnach nur n — m wesentlich verschiedene Gleichungen aus den vorgelegten gezogen werden können, die von den zuerst erwähnten m allgemeinen Größen befreiet sind.

Dieses vorausgesetzt, wenden wir uns den Gleichungen (3) vorangehender Nr. und den aus denselben durch Elimination von A′, B′, C′ gezogenen Bedingungsgleichungen in (4) zu.

Es enthalten die sechs Gleichungen in (3) die neun Größen:

$$A, B, C, D, E, F, A', B', C',$$

von denen die sechs ersten bekannte und die drei letzten unbekannte Functionen von x, y und z sind; die drei Gleichungen in (4) sind Ergebnisse der Elimination dieser drei unbekannten Functionengrößen aus den erstgenannten sechs Gleichungen: demnach sollen, dem Vorausgeschickten zufolge, diese durch Elimination gewonnenen drei Gleichungen (4) auch die einzig denkbaren in Wesenheit sein, die eine Elimination von A′, B′, C′ aus (3) je darbieten kann; so daß eine Differenzialfunction dreier Variabeln des zweiten Grades, die denselben entspräche, als durch unmittelbare Differenziation einer linearen Differenzialfunction entsprungen, erklärt werden dürfte. — Nun ist aber dem nicht so, wie wir am Schlusse der vorhergehenden Nr. angedeutet haben, und wie aus dem Verfolge dieses Gegenstandes noch hervorgehen wird. Die ganze Stütze dieser Folgerung beruhet nämlich einzig und allein auf dem mit dem Worte „Elimination“

allgemein verknüpften Begriffe; dabei sieht man aber sowohl von der Art und Weise, wie diese Elimination vorgenommen, als auch davon ab, wie und in welcher analytischen Verbindung die eliminirten Größen in dem ursprünglichen Systeme von Gleichungen enthalten sind. Wenn z. B. die Gleichungen (3) die zu eliminirenden Functionen $A'$, $B'$ und $C'$ selbst, nicht aber deren Differenzialquotienten enthielten, alsdann könnte man dieselben, wie solches in der Analysis des Endlichen üblich ist, mittelst algebraischer Operationen (Einleitung Nr. 1 und 2) eliminiren: die drei Gleichungen ohne $A'$, $B'$, $C'$, die auf diesem Wege hervorgingen, wären dann auch die einzig nothwendigen, jedes andere System, das auf andere Weise noch erhältlich wäre, müßte nothwendig eine Folgerung des zuerst gewonnenen sein. Die aufgestellten Gleichungen (4) aber sind allerdings Eliminationsergebnisse der Functionen $A'$, $B'$, $C'$ aus den sechs Gleichungen (3); allein da einerseits letztere nicht die zu eliminirenden Functionen selbst, sondern die partiellen Differenzialquotienten derselben umfassen, diese aber anderseits nur mit Zuziehung von Sätzen, die in der Differenzialrechnung ihre Begründung erst gefunden, eliminirt werden können: so treten hier zwei Momente hinzu, die, da solche der Elimination, von der am Eingange dieser Nr. die Rede war, fremd sind, auch Ergebnisse anderer Art gewärtigen lassen, und in der That auch herbeiführen.

Daß dem so sei, daß nämlich durch den Hinzutritt dieser beiden Momente das Ergebniß der Elimination in der Weise modificirt wird, wie wir am Schlusse vorangehender Nr. angedeutet haben, werden wir dadurch darthun, daß wir außer den Gleichungen (4) noch drei neue Bedingungsgleichungen aus den Gleichungen (3) ableiten werden. Beachtend jedoch, daß der vorliegende Fall nicht mehr zu den einfachen gehört, hingegen ein sehr leicht zu übersehender Fall ähnlicher Art, zur Beleuchtung und Erhärtung der vorigen Aussage, uns bekannt ist; so unterbrechen wir in folgender Nr. den Verfolg unserer vorliegenden Untersuchung mit der Mittheilung dieses einfachern Falles, worauf wir dann in den darauffolgenden Nrn. den gegenwärtig in Rede stehenden Gegenstand wieder aufnehmen und seinem Endziele zuführen werden.

346. In der Integralrechnung V Nr. 280 befaßten wir uns

mit der Auffindung der Bedingungsgleichungen, damit eine lineare Differenzialfunction der Form:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz\,, \qquad (\alpha)$$

in der P, Q, R bekannte Functionen von x, y und z vorstellen, als unmittelbares Ergebniß der Differenziation einer Function dieser Variabeln erkannt werde. Daselbst sind wir auf die drei Gleichungen:

$$\frac{du}{dx} = P\,,\quad \frac{du}{dy} = Q\,,\quad \frac{du}{dz} = R$$

geführt worden; und da die Function u, deren partielle Differenzialquotienten diese Gleichungen darstellen, unbekannt angenommen werden mußte, eliminirten wir solche und gelangten dadurch auf folgende drei Bedingungsgleichungen:

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}\,,\quad \frac{dR}{dx} = \frac{dP}{dz}\,,\quad \frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}\,. \qquad (\beta)$$

Anderseits wissen wir aber, wenn aus drei Gleichungen, ohne Zuziehung der Differenzialrechnung, eine Größe eliminirt wird, daß das Ergebniß der Elimination nur zwei wesentlich verschiedene Gleichungen darbietet. Wenn demnach von dem eben aufgestellten Eliminationsergebnisse ein Gleiches gelten soll; dann muß eine dieser drei Bedingungsgleichungen in $(\beta)$, als Folge der beiden andern erkannt werden, d. h. eine Differenzialfunction wie $(\alpha)$ würde eine von x, y und z abhängende Integralfunction darbieten, wenn gleich nur zwei der Bedingungsgleichungen in $(\beta)$ realisirt werden, die dritte derselben wäre ja alsdann eine Folgerung der beiden andern. Dem ist aber nicht so, wie schon aus folgendem besondern Falle hervorgeht.

In der linearen Differenzialfunction:

$$x\,y\,z\,dx + (\tfrac{1}{2}\,z\,x^2 + z\,y^2)\,dy + (\tfrac{1}{2}\,y\,x^2 + y\,z^2)\,dz\,,$$

wo man also:

$$P = x\,y\,z\,,\quad Q = \tfrac{1}{2}\,z\,x^2 + z\,y^2\,,\quad R = \tfrac{1}{2}\,y\,x^2 + y\,z^2$$

hat, findet man allerdings zwei der Bedingungsgleichungen in $(\beta)$ realisirt, nämlich:

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} \text{ und } \frac{dR}{dx} = \frac{dP}{dz}\,,$$

aber die dritte Bedingungsgleichung, die, als Corollarium dieser

beiden, nothwendig realisirt werden sollte, findet dennoch nicht Statt; denn man hat:

$$\frac{dQ}{dz} = \tfrac{1}{2}x^2 + y^2 \text{ und } \frac{dR}{dy} = \tfrac{1}{2}x^2 + z^2,$$

folglich:

$$\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} = y^2 - z^2.$$

Ja, es läßt sich ganz allgemein darthun, daß keine der drei Bedingungsgleichungen ($\beta$) eine nothwendige Folge der beiden übrigen sei; so daß, wenn zwei der Bedingungsgleichungen ($\beta$) auch realisirt würden, die dritte deswegen noch nicht nothwendig ein Statt haben müßte.

In der That nehmen wir an, die Functionen P, Q, R von x, y und z stellen folgende zwei Gleichungen:

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}, \quad \frac{dR}{dx} = \frac{dP}{dz},$$

als Gleichheiten dar; so differenziren wir, um aus denselben eine Folgerung zu gewinnen, erstere partiell nach z, letztere partiell nach y und nehmen hierauf deren Summe. Dadurch erhalten wir:

$$\frac{d^2R}{dxdy} = \frac{d^2Q}{dxdz},$$

oder auch die Gleichheit:

$$\frac{d.\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right)}{dx} = 0;$$

aus der nun entnommen wird, daß der Ausdruck:

$$\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}$$

allerdings eine von x unabhängige Function vorstellt, daß derselbe aber noch eine Function von y und z sein kann, d. h., aus den hier vorgelegten zwei Bedingungsgleichungen kann lediglich:

$$\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} = f(y, z)$$

gefolgert werden, wo $f(y, z)$ irgend eine Function von y und z bedeutet. Dieses Ergebniß ist in völliger Uebereinstimmung mit dem in dem oben betrachteten besondern Falle, für welchen:

$$f(y, z) = y^2 - z^2$$

sich herausgestellt. Da nun aus den hier vorgelegten zwei Bedingungsgleichungen die dritte in ($\beta$) keine nothwendige Folge ist; und da von je zwei dieser Gleichungen ($\beta$) ein Gleiches in Bezug auf die dritte derselben nachgewiesen werden kann: so sind diese drei Gleichungen sämmtlich unter einander verschieden, und das Ergebniß der Elimination von u aus den dreien, die partiellen Differenzialquotienten von u nach x, nach y und nach z darstellenden Gleichungen ($\alpha$) besteht in drei von einander wesentlich verschiedenen Gleichungen; welches Resultat verschieden von dem des Eliminationsverfahrens in der Analysis des Endlichen ist, das wir am Eingange der vorangehenden Nr. vor Augen gehabt.

347. Nachdem wir dieses vorausgeschickt, wenden wir uns abermals den Gleichungen (3) zu, aus denen wir, außer den dreien in (4) zusammengestellten Bedingungsgleichungen, noch drei andere ableiten werden, die mit jenen vereint, nicht nur die Integrabilität der vorgelegten Differenzialfunction in (1) bedingen, sondern, wie wir in der folgenden Nr. eigens nachweisen werden, dieselbe auch zur Folge haben.

Differenzirt man behufs Erlangung dieser Bedingungsgleichungen die zweite der Gleichungen (3) partiell nach z, die vierte nach y und die fünfte nach x, so erhält man, wenn die letztere von der Summe der beiden ersteren subtrahirt wird, folgende Gleichung:

$$\frac{dD}{dz} + \frac{dE}{dy} - \frac{dF}{dx} - 2\frac{d^2A'}{dydz} = 0;$$

differenzirt man ferner von denselben Gleichungen (3), die fünfte nach x, die zweite nach z und die vierte nach y, subtrahirt dann die letzte von der Summe der beiden ersten, so ergiebt sich die Gleichung:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dD}{dz} - \frac{dE}{dy} - 2\frac{d^2B'}{dzdx} = 0;$$

differenzirt man endlich dieselben Gleichungen (3), die vierte nach y, die fünfte nach x und die zweite nach z, subtrahirt von der Summe der zwei ersten die letzte, so ergiebt sich:

$$\frac{dE}{dy} + \frac{dF}{dx} - \frac{dD}{dz} - 2\frac{d^2C'}{dxdy} = 0.$$

Diese drei Gleichungen differenziren wir in der Ordnung ihrer Folge partiell nach x, nach y und nach z; von den Gleichungen (3) werde die erste einmal nach y und einmal nach z, die dritte einmal nach z und einmal nach x, die sechste endlich einmal nach x und einmal nach y partiell differenzirt; multiplicirt man dann jede der zuletzt erhaltenen drei Gleichungen mit 2 und addirt die erste zu der ersten der drei zuerst angedeuteten Gleichungen, die zweite zu der zweiten und die dritte zu der dritten: so stellen sich die drei in Rede stehenden Bedingungsgleichungen, wie folgt dar:

$$\left.\begin{aligned} 2\,\frac{d^2A}{dydz} &= \frac{d^2D}{dzdx} + \frac{d^2E}{dydx} - \frac{d^2F}{dx^2}\,, \\ 2\,\frac{d^2B}{dzdx} &= \frac{d^2F}{dxdy} + \frac{d^2D}{dzdy} - \frac{d^2E}{dy^2}\,, \\ 2\,\frac{d^2C}{dxdy} &= \frac{d^2E}{dydz} + \frac{d^2F}{dxdz} - \frac{d^2D}{dz^2}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Diese drei Bedingungsgleichungen sind es nun, die mit denen in (4) Nr. 344 aufgestellten realisirt werden müssen, damit die daselbst vorgelegte Differenzialfunction zweiten Grades dreier Variabeln, als Folge der Differenziation einer linearen Differenzialfunction derselben Variabeln x, y und z erkannt werde, wie solches in der folgenden Nr. auf ganz unzweideutige Weise dargethan werden soll.

348. Bei Zugrundelegung der sechs Bedingungsgleichungen in (4) und (5) werden wir in vorliegender Nr. zeigen, wie aus den Gleichungen (3) die bisher noch immer unbekannt vorausgesetzten Coefficienten $A'$, $B'$, $C'$ der linearen Differenzialfunction (2), als Functionen von x, y und z darzustellen seien.

I. Aus der ersten der Gleichungen (3) wird zunächst:

$$A' = \int A\,dx + q(y,z) \qquad (6)$$

gezogen, wo, da die angezeigte Integration zur Rechten nur auf x Bezug hat, die willkührliche Constante dieser Integration unabhängig von x, und lediglich als Function von y und z auftreten kann, welche Function wir durch $\varphi(y,z)$ vorgestellt, und sofort auch bestimmen werden.

Die zweite und vierte dieser Gleichungen (3) bieten nämlich,

vermöge des eben für A′ aufgestellten Ausdruckes, folgende Bestimmungen dar:

$$\frac{dB'}{dx} = D - \int \frac{dA}{dy}\, dx - \frac{d.\varphi(y.z)}{dy},$$

$$\frac{dC'}{dx} = E - \int \frac{dA}{dz}\, dx - \frac{d.\varphi(y,z)}{dz};$$

unter den Gleichungen (3) kommen ferner auch folgende vor:

$$\frac{dB'}{dy} = B, \qquad \frac{dC'}{dz} = C,$$

$$\frac{dB'}{dz} + \frac{dC'}{dy} = F;$$

wenn nun aus diesen fünf Gleichungen, durch partielles Differenziren derselben, die Größen B′ und C′ eliminirt werden: so ergeben sich folgende drei Gleichungen:

$$\frac{d^2\varphi(y,z)}{dy^2} = \frac{dD}{dy} - \frac{dB}{dx} - \int \frac{d^2A}{dy^2}\, dx, \qquad (7)$$

$$\frac{d^2\varphi(y,z)}{dz^2} = \frac{dE}{dz} - \frac{dC}{dx} - \int \frac{d^2A}{dz^2}\, dx, \qquad (8)$$

$$2\,\frac{d^2\varphi(y,z)}{dydz} = \frac{dD}{dz} + \frac{dE}{dy} - \frac{dF}{dx} - 2\int \frac{d^2A}{dydz}\, dx, \qquad (9)$$

die wir bei der Bestimmung von $\varphi(y,z)$ zu Grunde legen. Wenn nämlich die Constante der Integration bei der Bestimmung von A′ in Gleichung (6), d. h. wenn $\varphi(y,z)$ in der That von x unabhängig ist, dann muß jeder der Ausdrücke zur Rechten in diesen so eben aufgestellten drei Gleichungen, nach x differenzirt, den Nullwerth darbieten; und da solches in der That eintrifft, wenn man die zwei ersteren der Bedingungsgleichungen (4) und die erste der Bedingungsgleichungen in (5), als bestehend voraussetzt: so eignen sich dieselben, wie behauptet wurde, zur Bestimmung von $\varphi(y,z)$, wie wir solches sofort auch zeigen werden, wenn die Annahme des Bestandhabens der eben angeführten drei Bedingungsgleichungen beibehalten wird.

Gehen wir bei der Bestimmung von $\varphi(y,z)$ von der Gleichung (9) aus, und setzen der Kürze der Darstellung wegen:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{dD}{dz} + \frac{dE}{dy} - \frac{dF}{dx}\right) - \int \frac{d^2A}{dydz}\, dx = f(y,z), \qquad (10)$$

wo also $f(y,z)$ eine bekannte Function von y und z vorstellt; so erhalten wir nach Gleichung (III) Nr. 306 folgende Bestimmungsgleichung:

$$q(y,z) = \int\int f(y,z)\,dy\,dz + Y + Z\,, \qquad (11)$$

wo das zweifache Integrale rechterhand in der Weise zu vollziehen ist, wie Eingangs der Nr. 309 mit genügender Ausführlichkeit mitgetheilt ward. Ferner stellen die zur Rechten dieser Gleichung beigesetzten Größen Y und Z, falls blos die Gleichung (9) in Betracht gezogen wird, erstere eine willkührliche Function von y und letztere eine solche von z vor; dieselben werden aber bestimmt, wenn den oben aufgestellten Gleichungen (7) und (8) gleichfalls Rechnung getragen wird.

In der That bietet diese Gleichung (11) durch Differenziation die folgenden dar:

$$\frac{d.q(y,z)}{dy} = \int f(y,z)\,dz + \frac{dY}{dy}\,,$$

$$\frac{d.q(y,z)}{dz} = \int f(y,z)\,dy + \frac{dZ}{dz}\,,$$

differenzirt man erstere noch einmal nach y und letztere noch einmal nach z, vergleicht dann die Ergebnisse mit den Gleichungen (7) und (8); so erhält man zur Bestimmung der Functionen Y und Z folgende zwei Gleichungen:

$$\frac{d^2Y}{dy^2} = \frac{dD}{dy} - \frac{dB}{dx} - \int\frac{d^2A}{dy^2}\,dx - \int\frac{d.f(y,z)}{dy}\,dz\,,$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} = \frac{dE}{dz} - \frac{dC}{dx} - \int\frac{d^2A}{dz^2}\,dx - \int\frac{d.f(y,z)}{dz}\,dy\,,$$

aus welchen Y als bekannte Function von y und Z als bekannte Function von z wird ermittelt werden, wenn dargethan werden kann, daß der Ausdruck zur Rechten in der ersten dieser Gleichungen nicht nur, was bereits geschah, von x, sondern auch von z unabhängig ist, und daß es mit dem analogen Ausdrucke in der zweiten dieser Gleichungen ein gleiches Bewenden in Bezug auf y habe. Dieser doppelten Anforderung wird aber in der That beim Statthaben der zweiten und dritten der Bedingungsgleichungen in (5) vollständig entsprochen; sonach werden dieselben auch, jede nach einer

zweimaligen Integration, Y als Function von y und Z als Function von z darbieten.

Werden nämlich folgende Gleichungen der Kürze der Darstellung wegen festgestellt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dD}{dy} - \frac{dB}{dx} - \int \frac{d^2A}{dy^2}\,dx - \int \frac{d.f(y,z)}{dy}\,dz &= Y_1\,, \\ \frac{dE}{dz} - \frac{dC}{dx} - \int \frac{d^2A}{dz^2}\,dx - \int \frac{d.f(y,z)}{dz}\,dy &= Z_1\,, \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

wo also $Y_1$ und $Z_1$ respective bekannte Functionen von y und z sind; so erhält man nach Gleichung (I) Nr. 299:

$$\left.\begin{aligned} Y &= y\int Y_1\,dy - \int Y_1\,y\,dy + a + by\,, \\ Z &= z\int Z_1\,dz - \int Z_1\,z\,dz + a' + cz\,, \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

wo a, b, a′, c willkührliche Constanten sind, die von keiner der Variabeln x, y und z dependiren.

Die Gleichung (11) geht sonach, wenn man bedenkt, daß $a + a'$ nur eine willkührliche Constante vorstellt, also auch durch a ersetzt werden kann, in folgende über:

$$\begin{aligned} \varphi(y,z) &= \int\int f(y,z)\,dy\,dz \\ &\quad + y\int Y_1\,dy - \int Y_1\,y\,dy + z\int Z_1\,dz - \int Z_1\,z\,dz \\ &\quad + a + by + cz\,; \end{aligned} \quad (14)$$

und wenn diese gewonnene Bestimmung in Gleichung (6) für $\varphi(y,z)$ gesetzt wird, erhält man A′ als bekannte Function von x, y und z, welche die drei willkührlichen Constanten a, b und c mitführen wird.

II. Nunmehr A′ und $\varphi(y,z)$, als bekannte Functionen auftreten, legen wir uns die zweite und dritte der Gleichungen (3), nämlich die beiden Gleichungen:

$$\frac{dB'}{dx} + \frac{dA'}{dy} = D\,, \quad \frac{dB'}{dy} = B\,,$$

zur Bestimmung von B′ vor, und zwar, da diese Gleichungen die partiellen Differenzialquotienten von B′ bloß nach x und nach y angeben, werden wir vorläufig auch z, als Constante behandeln; erst im Verfolge dieser Bestimmung von B′ werden wir die Variabilität von z mit in Betracht ziehen.

Wird diesem nach z als Constante behandelt, so hat man:

$$dB' = \frac{dB'}{dx}\,dx + \frac{dB'}{dy}\,dy\,,$$

oder auch, vermöge der beiden vorangehenden Gleichungen, die folgende:

$$dB' = \left(D - \frac{dA'}{dy}\right) dx + B\,dy\,; \qquad (15)$$

und damit der Ausdruck zur Rechten dieser Gleichung unter der Annahme des Constantseins von z, als vollständiges Differenziale von x und y auftrete, so daß, nach Integration desselben, die Bestimmung von B′ unter der eben getroffenen Verfügung über z auch möglich werde, ist das Eintreffen der Bedingungsgleichung:

$$\frac{dD}{dy} - \frac{dB}{dx} - \frac{d^2A'}{dy^2} = 0$$

unerläßlich (Integralrechnung V Nr. 282). Nun hat man aus Gleichung (6):

$$\frac{d^2A'}{dy^2} = \int \frac{d^2A}{dy^2}\,dx + \frac{d^2q(y,z)}{dy^2}\,,$$

welche Gleichung mit Zuziehung von (7) die Realität der eben aufgestellten Bedingungsgleichung darthut; folglich ist der Ausdruck zur Rechten in Gleichung (15), wenn in demselben z als Constante behandelt wird, ein vollständiges Differenziale einer Function von x und y, daher wird auch diese Gleichung (15) eine erste und vorläufige Bestimmung von B′ darbieten.

Werden also folgende Gleichungen festgestellt:

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= D - \frac{dA'}{dy}\,, \\ B_1 &= B - \int \frac{dD_1}{dy}\,dx\,; \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

so bietet die Gleichung (c) des in oben citirter Nr. 282 aufgestellten Theorems folgende Bestimmungsgleichung für B′ dar:

$$B' = \int D_1\,dx + \int B_1\,dy + Z'\,, \qquad (17)$$

in welcher die erste angezeigte Integration nur auf x, die zweite nur auf y Bezug hat; $B_1$ stellt nach derselben citirten Nr. eine von x unabhängige Größe vor; Z′ endlich ist die willkührliche Constante der Integration, die unter vorliegenden Umständen eine

Function von z sein kann, welche wir zur vollständigen Kenntniß von B′ noch zu bestimmen haben.

Zur Bestimmung von Z′ in der eben aufgestellten Gleichung (17) nehmen wir die beiden letzten der Gleichungen (3), nämlich, die folgenden zwei Gleichungen vor:

$$\frac{dC'}{dy} + \frac{dB'}{dz} = F\,, \quad \frac{dC'}{dz} = C\,.$$

Differenzirt man die erste partiell nach z und die zweite in gleicher Weise nach y, so bietet deren Unterschied folgende Gleichung dar:

$$\frac{d^2B'}{dz^2} = \frac{dF}{dz} - \frac{dC}{dy}\,, \tag{18}$$

die Gleichung (17) zweimal hintereinander partiell nach z differenzirt giebt auch:

$$\frac{d^2B'}{dz^2} = \int \frac{d^2D_1}{dz^2}\,dx + \int \frac{d^2B_1}{dz^2}\,dy + \frac{d^2Z'}{dz^2}\,;$$

sonach hat man zur Bestimmung von Z′ die Gleichung:

$$\frac{d^2Z'}{dz^2} = \frac{dF}{dz} - \frac{dC}{dy} - \int \frac{d^2D_1}{dz^2}\,dx - \int \frac{d^2B_1}{dz^2}\,dy\,, \tag{19}$$

von der, oder richtiger, vom Ausdrucke zur Rechten derselben, noch darzuthun erübriget, daß solcher von x sowohl als von y unabhängig ist.

Wird dieser Ausdruck, die Unabhängigkeit desselben von x darthun, nach dieser Variabeln partiell differenzirt, so stellt, da $B_1$ von x unabhängig ist, folgendes Ergebniß:

$$\frac{d^2F}{dxdz} - \frac{d^2C}{dxdy} - \frac{d^2D_1}{dz^2}\,,$$

den Differenzialquotienten dar; wird hier der Werth für $D_1$ aus der ersten der Gleichungen (16) eingeführt, so geht dieser Differenzialquotient über in:

$$\frac{d^2F}{dxdz} - \frac{d^2C}{dxdy} - \frac{d^2D}{dz^2} + \frac{d^3A'}{dydz^2}\,;$$

nach Gleichung (6) hat man aber:

$$\frac{d^3A'}{dydz^2} = \int \frac{d^3A}{dydz^2}\,dx + \frac{d^3q(y,z)}{dydz^2}\,,$$

oder auch mit Zuziehung der Gleichung (8):

$$\frac{d^3A'}{dydz^2} = \frac{d^2E}{dydz} - \frac{d^2C}{dxdy},$$

sonach stellt sich der besagte Differenzialquotient nach x auch folgendermaßen dar:

$$\frac{d^2E}{dydz} + \frac{d^2F}{dxdz} - \frac{d^2D}{dz^2} - 2\frac{d^2C}{dxdy};$$

und da dieser Ausdruck vermöge der dritten unter den in (5) zusammengestellten Bedingungsgleichungen gleich Null ist: so ist der Ausdruck zur Rechten in Gleichung (19) unabhängig von x. — Derselbe Ausdruck ist auch von y unabhängig. Differenziren wir, dieses darzuthun, denselben partiell nach y, so stellt sich der Differenzialquotient, wie folgt dar:

$$\frac{d^2F}{dydz} - \frac{d^2C}{dy^2} - \frac{d^2B_1}{dz^2} - \int \frac{d^3D_1}{dydz^2}\,dx,$$

oder auch, beachtend den Werth von $B_1$ aus der zweiten der Gleichungen (16), wie folgt:

$$\frac{d^2F}{dydz} - \frac{d^2C}{dy^2} - \frac{d^2B}{dz^2};$$

dieser Ausdruck geht aber vermöge der dritten unter den in (4) zusammengestellten Bedingungsgleichungen in Null über: so ist auch die Richtigkeit unsrer letztern Behauptung dargethan, und der Ausdruck rechterhand in Gleichung (19) implicirt weder die Variable x noch die Variable y. Es eignet sich sonach diese Gleichung (19) vollkommen, die Größe Z' als Function von z darzustellen.

Wird nämlich der Kürze wegen:

$$\frac{dF}{dz} - \frac{dC}{dy} - \int \frac{d^2D_1}{dz^2}\,dx - \int \frac{d^2B_1}{dz^2}\,dy = Z_2 \qquad (20)$$

gesetzt, so bietet die Gleichung (19) mit Zuziehung des in Nr. 299 Vorgetragenen folgende Bestimmungsgleichung für Z' dar:

$$Z' = z\int Z_2\,dz - \int Z_2\,z\,dz + e + fz, \qquad (21)$$

wo e und f willkührliche Constanten sind.

Denken wir uns nun diese Bestimmung von Z' in (17) eingesetzt, so stellt sich B' als bekannte Function von x, y und z heraus, die

außer den von A′ herrührenden willkührlichen Constanten noch die zwei soeben eingeführten e und f enthalten wird.

III. Nunmehr A′ sowohl als B′, bei Zugrundelegung der in (4) und (5) zusammengestellten sechs Bedingungsgleichungen, durch bekannte Functionen von x, y und z darstellbar anzusehen sind, erübriget uns noch die Bestimmung von C′. Dieses zu erzielen, gehen wir von den drei letzten der in (3) zusammengestellten Gleichungen aus.

Diese Gleichungen stellen sich auch folgendermaßen dar:

$$\frac{dC'}{dx} = E - \frac{dA'}{dz}, \quad \frac{dC'}{dy} = F - \frac{dB'}{dz}, \quad \frac{dC'}{dz} = C,$$

und da man:

$$dC' = \frac{dC'}{dx}\,dx + \frac{dC'}{dy}\,dy + \frac{dC'}{dz}\,dz$$

hat; so erhält man zur Bestimmung von C′ die Gleichung:

$$dC' = \left(E - \frac{dA'}{dz}\right)dx + \left(F - \frac{dB'}{dz}\right)dy + C\,dz, \qquad (22)$$

die, wenn der Ausdruck zur Rechten als vollständiges Differenziale einer Function von x, y, z erkannt wird, für C′ diese Function selbst darbieten wird. Da nun zum Eintreffen dieser Anforderung folgende drei Gleichungen:

$$\frac{dE}{dy} - \frac{dF}{dx} = \frac{d^2A'}{dzdy} - \frac{d^2B'}{dzdx},$$

$$\frac{dE}{dz} - \frac{dC}{dx} = \frac{d^2A'}{dz^2},$$

$$\frac{dF}{dz} - \frac{dC}{dy} = \frac{d^2B'}{dz^2},$$

als Gleichheiten zu bestehen haben; so wenden wir uns der Begründung dieser Eigenthümlichkeit zu, indem wir einzig die bei der Bestimmung von A′ und B′ gefolgerten Ergebnisse in Anspruch nehmen.

Zuerst hat man aus der Gleichung (17), da $B_1$ und Z′ daselbst von x unabhängig sind, folgende Gleichung:

$$\frac{dB'}{dx} = D_1,$$

oder auch, vermöge der ersten unter den Gleichungen (16):

$$\frac{dB'}{dx} = D - \frac{dA'}{dy};$$

differenzirt man diese nach z, so hat man:

$$\frac{d^2B'}{dzdx} = \frac{dD}{dz} - \frac{d^2A'}{dzdy};$$

die Gleichungen (6) und (9) geben ferner gehörig verbunden folgende:

$$\frac{dE}{dy} - \frac{dF}{dx} = 2\frac{d^2A'}{dzdy} - \frac{dD}{dz};$$

addirt man diese zur unmittelbar vorhergehenden Gleichung: so fließt die erste der drei zur Bestimmung von C′ unerläßlichen Bedingungsgleichungen.

Zweitens bietet die Gleichung (6), zweimal hintereinander partiell nach z differenzirt, folgendes Ergebniß dar:

$$\frac{d^2A'}{dz^2} = \int \frac{d^2A}{dz^2}\,dx + \frac{d^2\varphi(y,z)}{dz^2};$$

durch Addition dieser Gleichung zu der in (8) fließt sofort die zweite der oben aufgestellten drei Bedingungsgleichungen.

Was endlich die dritte dieser Bedingungsgleichungen betrifft, ist solche durchaus mit der Gleichung (18) einerlei; diese haben wir in II. bei der Bestimmung von Z′ benutzt: sonach sind wir auch diese als Bestehend anzunehmen berechtiget.

Es erscheint diesem nach, wenn in Gleichung (22) für A′ und B′ die in I. und II. gewonnenen Bestimmungen derselben eingesetzt werden, der Ausdruck zur Rechten daselbst, als vollständiges Differenziale einer Function von x, y und z; integrirt man dasselbe nach dem in Nr. 283 aufgestellten Theoreme: so stellt das Ergebniß der Integration, das eine neue willkührliche Constante herbeiführt, die Bestimmung von C′ als Function von x, y und z dar.

Werden nun die für A′, B′, C′ ermittelten Functionen von x, y und z in den Differenzialausdruck (2) der Nr. 344 eingesetzt; so stellt das Ergebniß, das sechs willkührliche Constanten enthalten wird, die unmittelbar vorausgehende Integralfunction der am Eingange derselben Nr. vorgelegten Differenzialfunction (1) vor.

349. Das in vorangehender Nr. entwickelte allgemeine Verfahren,

zu einer vorgelegten integrabeln Differenzialfunction des zweiten Grades dreier Variabeln die nächstvorhergehende Integralfunction herzustellen, bringen wir hier auf folgenden besondern Fall:

$$x\,dx^2 + y\,dy^2 + z\,dz^2 + (x+y)z^2\,dx\,dy + (z+x)y^2\,dz\,dx + (y+z)x^2\,dy\,dz,$$

zur Anwendung.

Bei einer Vergleichung dieser mit der allgemeinen Differenzialfunction (1) in Nr. 344 hat man:

$$A = x\,,\quad B = y\,,\quad C = z\,,$$
$$D = (x+y)z^2\,,\quad E = (z+x)y^2\,,\quad F = (y+z)x^2\,;$$

und da diese Functionen für A, B, C, D, E, F sowohl den Bedingungsgleichungen in (4), als auch denen in (5) entsprechen: so schreiten wir, ganz dieselbe Ordnung der vorangehenden Nr. beobachtend und den daselbst mitgetheilten Vorschriften folgend, zur Herstellung der Functionen $A'$, $B'$, $C'$ der in (2) Nr. 344 angenommenen Integralfunction.

I. Die Gleichung (6) vorangehender Nr. auf den vorliegenden Fall angewandt, geht in folgende über;

$$A' = \tfrac{1}{2}x^2 + q(y,z)\,,$$

wo die Function $q(y,z)$ von y und z aus der Gleichung (14) daselbst zu bestimmen ist. Es setzt aber diese Gleichung (14) die Kenntniß der Functionen:

$$f(y,z)\,,\quad Y_1 \text{ und } Z_1$$

voraus, sonach haben wir uns, diese letzteren zu bestimmen, den in (10) und (12) aufgestellten Gleichungen vorerst zuzuwenden.

Aus diesen Gleichungen findet man, für den vorgelegten Fall:

$$f(y,z) = 2yz\,,$$
$$Y_1 = z^2 - z^2 = 0 \text{ und } Z_1 = y^2 - y^2 = 0\,;$$

daher geht die Gleichung (14) über in:

$$q(y,z) = 2\int\int yz\,dy\,dz + a + by + cz\,,$$

oder auch, wenn die zweifache Integration zur Rechten vollzogen wird, in:

$$q(y,z) = \tfrac{1}{2}y^2z^2 + a + by + cz\,.$$

Diese Gleichung mit der oben für $A'$ aufgestellten Bestimmungsgleichung vereint, erhält man:

$$A' = \tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{2} y^2 z^2 + a + by + cz ,$$

wo a, b, c willkührliche Constanten sind.

II. Behufs der Bestimmung von B′, dem Coefficienten von dy in der zu ermittelnden Integralfunction, wenden wir uns den Ergebnissen in II. vorangehender Nr. zu.

Die Gleichung (15) daselbst geht, beachtend die für A′ bereits gewonnene Bestimmung, in folgende über:

$$dB' = (xz^2 - b)\,dx + y\,dy .$$

Integrirt man den Ausdruck rechterhand unter der einstweiligen Voraussetzung, daß z eine Constante verbleibt; so erhält man beachtend die Gleichungen (16), die gegenwärtig in:

$$D_1 = xz^2 - b \text{ und } B_1 = y$$

übergehen, aus Gleichung (17) folgende Bestimmungsgleichung für B′:

$$B' = \int (xz^2 - b)\,dx + \int y\,dy + Z' ,$$

oder auch, nach vollzogenen Integrationen, die folgende:

$$B' = \tfrac{1}{2} x^2 z^2 - bx + \tfrac{1}{2} y^2 + Z' ,$$

wo die unbekannte Function von z, nämlich Z′, nach Gleichung (19), welche folgendermaßen aussieht:

$$\frac{d^2Z'}{dz^2} = x^2 - 2\int x\,dx = x^2 - x^2 = 0 ,$$

zu bestimmen ist. Vollzieht man diese Bestimmung nach den Gleichungen (20) und (21), so erhält man:

$$Z' = e + fz ;$$

und wenn dieses Ergebniß in die vorige B′ darstellende Gleichung eingeführt wird, erhält man:

$$B' = \tfrac{1}{2} x^2 z^2 - bx + \tfrac{1}{2} y^2 + e + fz ,$$

wo e und f zwei neue willkührliche Constanten sind.

III. Uebergehend endlich zur Bestimmung von C′, dem Coefficienten von dz in der Integralfunction, legen wir die Gleichung (22) vorangehender Nr. zu Grunde.

Zieht man nämlich die für A′ und B′ bereits gewonnenen Ergebnisse zu, so geht diese Gleichung (22) in folgende über:

$$dC' = (xy^2 - c)\,dx + yx^2 - f)\,dy + z\,dz ;$$

vergleicht man den Ausdruck zur Rechten mit der Differenzialfunction (a) Nr. 283 und integrirt solchen nach den Gleichungen (c) und (d) daselbst, so erhält man:

$$C' = \int (xy^2 - c)\,dx - f\int dy + \int z\,dz + g,$$

und nach vollzogenen Integrationen, die folgende:

$$C' = \tfrac{1}{2}x^2y^2 - cx - fy + \tfrac{1}{2}z^2 + g,$$

wo g die willkührliche Constante dieser Integration vorstellt.

Alle hier gewonnenen Resultate zusammengefaßt, bietet die am Eingange vorgelegte Differenzialfunction zweiten Grades der drei Variabeln x, y, z folgende unmittelbar vorhergehende Integralfunction dar:

$$(\tfrac{1}{2}y^2z^2 + \tfrac{1}{2}x^2 + by + cz + a)\,dx + (\tfrac{1}{2}z^2x^2 + \tfrac{1}{2}y^2 + fz - bx + e)\,dy + (\tfrac{1}{2}x^2y^2 + \tfrac{1}{2}z^2 - cx - fy + g)\,dz,$$

wo a, b, c, e, f, g die sechs willkührlichen Integrationsconstanten vorstellen.

350. Wir legen uns nunmehr eine Differenzialfunction dritten Grades dreier Variabeln, der Form:

$$\begin{aligned} &A\,dx^3 + B\,dy^3 + C\,dz^3 + D\,dx^2dy + E\,dxdy^2 \\ &\quad + F\,dz^2dx + G\,dzdx^2 \\ &\quad + H\,dy^2dz + K\,dydz^2 + L\,dxdydz, \quad (1') \end{aligned}$$

zur Untersuchung in Rücksicht auf Integrabilität vor, wo A, B, C, D, E, . . . . . bekannte Functionen der drei Variabeln x, y und z vorstellen.

Die unmittelbar vorhergehende Integralfunction dieser vorgelegten Differenzialfunction kann nur von folgender Form sein:

$$A'\,dx^2 + B'\,dy^2 + C'\,dz^2 + D'\,dxdy + E'\,dzdx + F'\,dydz, \quad (2')$$

wo A', B', C', D', E', F' gleichfalls Functionen von x, y, z vorstellen, die wir aber, da uns noch unbekannt ist, ob die vorgelegte Differenzialfunction unmittelbares Ergebniß einer Differenziation sei oder nicht, als unbekannte Functionen dieser drei Variabeln vorläufig erklären.

Gesetzt nun die Differenzialfunction in (2') stellt eine Integralfunction zur vorgelegten in (1') vor; dann muß diese das Ergebniß einer vollständigen oder totalen Differenziation jener nach den Va-

riabeln x, y und z sein, wodurch folgende zehn Gleichungen sich herausstellen:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dA'}{dx} = A\,,\quad \frac{dA'}{dy} + \frac{dD'}{dx} = D\,,\\
&\qquad\qquad \frac{dD'}{dy} + \frac{dB'}{dx} = E\,,\quad \frac{dB'}{dy} = B\,,\\
&\frac{dC'}{dz} = C\,,\quad \frac{dC'}{dx} + \frac{dE'}{dz} = F\,,\\
&\qquad\qquad \frac{dE'}{dx} + \frac{dA'}{dz} = G\,,\\
&\qquad\qquad \frac{dB'}{dz} + \frac{dF'}{dy} = H\,,\\
&\qquad\qquad \frac{dF'}{dz} + \frac{dC'}{dy} = K\,,\\
&\frac{dD'}{dz} + \frac{dE'}{dy} + \frac{dF'}{dx} = L\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (3')$$

Da, wie bereits erwähnt wurde, die Functionen $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$, $F$ aus (2′), wie deren partielle Differenzialquotienten nach den Variabeln x, y, z, uns unbekannt sind; so bleibt uns, zur Erlangung der Einsicht eines gleichzeitigen Bestandhabens dieser Gleichungen (3′) kein anderer Weg offen, als diese unbekannten Functionen zu eliminiren, um dann das Ergebniß dieser Elimination, das nur noch die bekannten Functionen A, B, C, D, . . . . aus (1′) umfassen wird, in dieser Beziehung untersuchen zu können.

351. Die in frühern Nrn. behandelten, denen in (3′) vorangehender Nr. zusammengestellten analogen Gleichungen, die Gleichungen (3) in Nr. 344 etwa ausgenommen, waren sämmtlich so einfacher Beschaffenheit, daß die Ausgangs vorhergehender Nr. angedeutete vorzunehmende Elimination mit denselben, als leicht vollziehbar nicht allein erkannt ward, sondern, dieselbe ist in jener Vollständigkeit zugleich und auf einmal jedesmal in einer Weise vollzogen worden, daß man auf deren Ergebniß gestützt, unmittelbar zur Integration der betreffenden Differenzialfunctionen übergehen und dieselbe zu Ende führen konnte. Viel verwickelter aber stellte sich dieses Eliminationsgeschäft schon bei den vorhin citirten Gleichungen in Nr. 344 dar. Da ersah man nicht sobald, daß die Gleichungen (4) daselbst noch nicht das vollständige Eliminationsergebniß repräsentiren, selbst

dann noch nicht, als bereits die Gleichungen (5) Nr. 347 hergestellt waren; noch immer gebrach es eines genügenden Grundes diese Gleichungen (5) in Vereinigung mit den vorhin genannten Gleichungen (4), als das vollständige Eliminationsergebniß anzusehen. Erst in der darauf folgenden Nr. 348, wo wir bei Zugrundelegung der oben genannten sechs Bedingungsgleichungen in (4) und (5) die verlangte Integration wirklich hergestellt hatten, erst dann erkannten wir in diesen sechs Bedingungsgleichungen das Gesammtergebniß der Elimination der unbekannten Functionen $A'$, $B'$, $C'$ aus den Gleichungen (3) Nr. 344. — Daß nun die zehn Gleichungen (3′) vorangehender Nr., mit denen wir uns gegenwärtig zu befassen haben, viel complicirter, als die eben besprochenen sind, leuchtet schon bei einem bloßen Hinblick auf dieselben ein; und da ferner aus dem von uns bis jetzt jedesmal befolgten Gang, die Integralfunction einer mehrgliedrigen nichtlinearen, den Bedingungen der Integrabilität entsprechenden Differenzialfunction herzustellen, nicht so leicht eine allgemeine Regel zu ziehen sein dürfte: so erachten wir es als eine nicht unwesentliche Zugabe, wenn wir noch ein Verfahren mittheilen, das die Vorzüge vereint, das Eliminationsergebniß, von dem bis jetzt beständig die Rede war, in seiner Gesammtheit auf einmal darzubieten und dieses zugleich dadurch anzudeuten, daß beim Bestandhaben desselben, die Möglichkeit und Vollziehbarkeit der Integration auf eine ganz unzweideutige Weise mit erkannt werde. Ueber den wesentlichen Inhalt dieses Verfahrens werden, da wir solches unmittelbar auf den vorliegenden Fall zur Anwendung bringen, die folgenden Nrn. genügenden Aufschluß geben.

**352.** Die Gleichungen in (3′), von denen gegenwärtig die Rede ist, enthalten sämmtliche ersten partiellen Differenzialquotienten der sechs Functionen:

$$A',\ B',\ C',\ D',\ E',\ F', \qquad (\alpha)$$

nach den drei Variabeln $x$, $y$ und $z$. Wären dieser Gleichungen achtzehn, und wären solche auch brauchbar sämmtliche so eben genannten partiellen Differenzialquotienten, deren Anzahl gleichfalls achtzehn ist, durch bekannte Functionen von $x$, $y$ und $z$ darzustellen; dann würde je ein System von drei zusammengehörenden partiellen Differenzialquotienten, die nämlich je einer der Functionen in ($\alpha$)

entsprechen, nach den Nrn. 280 und 346, ein System von drei Bedingungsgleichungen darbieten: so daß alsdann das Gesammtergebniß der in Rede stehenden Elimination ein System von achtzehn leicht herzustellender Bedingungsgleichungen vorstellen würde. Da wir aber gegenwärtig nur zehn Gleichungen, die Gleichungen in (3′) Nr. 350, unter besagten partiellen Differenzialquotienten haben; so können wir durch Einführung von acht neuen Gleichungen, die außer diesen partiellen Differenzialquotienten noch acht neue und unbekannte Functionen enthalten, den vorhin besprochenen Zustand vorläufig herstellen. Die nunmehr durch Elimination der Functionen in (α) sich darbietenden achtzehn Gleichungen werden allerdings die neueingeführten acht Functionen mitführen; allein diese werden wir, nachdem wir erst besagte achtzehn Gleichungen hergestellt haben werden, in ähnlicher Weise wegschaffen, wie wir solches sofort bei den Functionen in (α) mittelst der Gleichungen (3′) zeigen werden.

Stellen nämlich die acht Größen:

$$\mathrm{M}\,,\ \mathrm{N}\,,\ \mathrm{P}\,,\ \mathrm{Q}\,,\ \mathrm{R}\,,\ \mathrm{S}\,,\ \mathrm{T}\,,\ \mathrm{U}\,, \qquad (\alpha')$$

und zwar jede derselben, unbekannte Functionen der drei Variabeln x, y und z vor, und stellt man folgende achtzehn Gleichungen auf:

$$\left.\begin{array}{lll}
\frac{\mathrm{dA'}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{A}\,, & \frac{\mathrm{dA'}}{\mathrm{dy}} = \mathrm{M}\,, & \frac{\mathrm{dA'}}{\mathrm{dz}} = \mathrm{N}\,, \\
\frac{\mathrm{dB'}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{P}\,, & \frac{\mathrm{dB'}}{\mathrm{dy}} = \mathrm{B}\,, & \frac{\mathrm{dB'}}{\mathrm{dz}} = \mathrm{Q}\,, \\
\frac{\mathrm{dC'}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{R}\,, & \frac{\mathrm{dC'}}{\mathrm{dy}} = \mathrm{S}\,, & \frac{\mathrm{dC'}}{\mathrm{dz}} = \mathrm{C}\,, \\
\frac{\mathrm{dD'}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{D} - \mathrm{M}\,, & \frac{\mathrm{dD'}}{\mathrm{dy}} = \mathrm{E} - \mathrm{P}\,, & \frac{\mathrm{dD'}}{\mathrm{dz}} = \mathrm{T}\,, \\
\frac{\mathrm{dE'}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{G} - \mathrm{N}\,, & \frac{\mathrm{dE'}}{\mathrm{dy}} = \mathrm{U}\,, & \frac{\mathrm{dE'}}{\mathrm{dz}} = \mathrm{F} - \mathrm{R}\,, \\
\frac{\mathrm{dF'}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{L} - \mathrm{T} - \mathrm{U}\,, & \frac{\mathrm{dF'}}{\mathrm{dy}} = \mathrm{H} - \mathrm{Q}\,, & \frac{\mathrm{dF'}}{\mathrm{dz}} = \mathrm{K} - \mathrm{S}\,;
\end{array}\right\} \qquad (4')$$

so umfassen solche nicht nur die zehn Gleichungen in (3′), sondern auch jene acht Gleichungen, die dieselbe Anzahl von Functionen, nämlich die in (α′) zusammengestellten, einführen. Es ersetzen sonach diese achtzehn Gleichungen in (4′) vollständig die zehn Gleichungen in (3′); so daß, wenn aus denselben auf dem in der Analysis des Endlichen

üblichen Wege die neueingeführten Functionen in ($\alpha'$) eliminirt werden, letztere, die Gleichungen in (3′), wieder zum Vorschein kommen.

Behandelt man nun je drei zusammengehörende dieser Gleichungen (4′), die nämlich auf einer Zeile jedesmal zusammengestellt sind, in derselben Weise, wie die analogen, die partiellen Differenzialquotienten von u umfassenden drei Gleichungen in Nr. 280, so stellt sich jedesmal ein System von drei Gleichungen heraus; diese zusammengestellt, geben folgende achtzehn Gleichungen:

$$\frac{dM}{dx} = \frac{dA}{dy}, \quad \frac{dN}{dx} = \frac{dA}{dz}, \quad \frac{dN}{dy} = \frac{dM}{dz},$$

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dB}{dx}, \quad \frac{dQ}{dy} = \frac{dB}{dz}, \quad \frac{dP}{dz} = \frac{dQ}{dx},$$

$$\frac{dR}{dz} = \frac{dC}{dx}, \quad \frac{dS}{dz} = \frac{dC}{dy}, \quad \frac{dS}{dx} = \frac{dR}{dy},$$

$$\frac{dM}{dy} - \frac{dP}{dx} = \frac{dD}{dy} - \frac{dE}{dx},$$

$$\frac{dM}{dz} + \frac{dT}{dx} = \frac{dD}{dz},$$

$$\frac{dT}{dy} + \frac{dP}{dz} = \frac{dE}{dz},$$

$$\frac{dR}{dx} - \frac{dN}{dz} = \frac{dF}{dx} - \frac{dG}{dz},$$

$$\frac{dR}{dy} + \frac{dU}{dz} = \frac{dF}{dy},$$

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dN}{dy} = \frac{dG}{dy},$$

$$\frac{dQ}{dz} - \frac{dS}{dy} = \frac{dH}{dz} - \frac{dK}{dy},$$

$$\frac{dQ}{dx} - \frac{dT}{dy} - \frac{dU}{dy} = \frac{dH}{dx} - \frac{dL}{dy},$$

$$\frac{dS}{dx} - \frac{dT}{dz} - \frac{dU}{dz} = \frac{dK}{dx} - \frac{dL}{dz},$$

welche von den in vorliegender Nr., in ($\alpha$), zusammengestellten Functionen unabhängig sind, dafür aber die partiellen Differenzialquotienten der neueingeführten unbekannten Functionen in ($\alpha'$) enthalten, mit deren Elimination wir uns in der folgenden Nr. befassen werden.

**353.** Die achtzehn Gleichungen Ausgangs vorangehender Nr.

enthalten die 24 ersten partiellen Differenzialquotienten der daselbst eingeführten 8 Functionen in $(\alpha')$ nach den Variabeln x, y und z. Um aus diesen Gleichungen die so eben erwähnten partiellen Differenzialquotienten zu eliminiren, haben wir vorerst, wie bei ähnlichem Anlasse in vorangehender Nr., sechs neue Gleichungen einzuführen, die eben so viel neue Functionen von x, y und z impliciren. Aus den nunmehr sich ergebenden 24 Gleichungen werden wir dann sämmtliche 24 partiellen Differenzialquotienten der Functionen in $(\alpha')$ ausdrücken und solche hierauf, wie verlangt, nach Nr. 280 eliminiren.

Stellt man nun durch:

$$M',\ N',\ P',\ Q',\ R',\ S' \qquad (\alpha'')$$

die zuletzt besprochenen, neu einzuführenden sechs Functionen von x, y und z vor, so umfassen folgende 24 Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{lll}
\frac{dM}{dx}=\frac{dA}{dy}, & \frac{dM}{dy}=M'+\frac{dD}{dy}-\frac{dE}{dx}, & \frac{dM}{dz}=-N'+\frac{dD}{dz},\\
\frac{dN}{dx}=\frac{dA}{dz}, & \frac{dN}{dy}=-N'+\frac{dD}{dz}, & \frac{dN}{dz}=P'-\frac{dF}{dx}+\frac{dG}{dz},\\
\frac{dP}{dx}=M', & \frac{dP}{dy}=\frac{dB}{dx}, & \frac{dP}{dz}=-Q'+\frac{dE}{dz},\\
\frac{dQ}{dx}=-Q'+\frac{dE}{dz}, & \frac{dQ}{dy}=\frac{dB}{dz}, & \frac{dQ}{dz}=R'+\frac{dH}{dz}-\frac{dK}{dy},\\
\frac{dR}{dx}=P', & \frac{dR}{dy}=-S'+\frac{dF}{dy}, & \frac{dR}{dz}=\frac{dC}{dx},\\
\frac{dS}{dx}=-S'+\frac{dF}{dy}, & \frac{dS}{dy}=R', & \frac{dS}{dz}=\frac{dC}{dy},\\
\frac{dT}{dx}=N', & \frac{dT}{dy}=Q', & \frac{dT}{dz}=-2S'+\frac{dL}{dz}+\frac{dF}{dy}-\frac{dK}{dx},\\
\frac{dU}{dx}=N'+\frac{dG}{dy}-\frac{dD}{dz}, & \frac{dU}{dy}=-2Q'+\frac{dE}{dz}+\frac{dL}{dy}-\frac{dH}{dx}, & \frac{dU}{dz}=S',
\end{array}\right\}\ (5')$$

die 18 Gleichungen Ausgangs vorhergehender Nr. und die neueingeführten sechs Gleichungen; so daß, wenn aus diesen 24 Gleichungen die unbekannten Functionen in $(\alpha'')$ eliminirt werden, die erstgenannten 18 Gleichungen wieder zum Vorschein kommen.

Werden nun je drei zusammengehörende dieser Gleichungen, behufs der Elimination der Functionen in $(\alpha')$, nach Nr. 280 behandelt; so bietet je ein solches Eliminationsergebniß ein System von

drei Gleichungen dar, die wir auch nach der Ordnung der Entstehung hier folgen lassen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dM'}{dx} &= \frac{d^2A}{dy^2} - \frac{d^2D}{dxdy} + \frac{d^2E}{dx^2}, \quad \frac{dN'}{dx} = \frac{d^2D}{dxdz} - \frac{d^2A}{dydz}, \\ \frac{dM'}{dz} &+ \frac{dN'}{dy} = \frac{d^2E}{dxdz}, \end{aligned}\right\} \text{(a)}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dN'}{dx} &= \frac{d^2D}{dxdz} - \frac{d^2A}{dydz}, \quad \frac{dP'}{dx} = \frac{d^2A}{dz^2} - \frac{d^2G}{dxdz} + \frac{d^2F}{dx^2}, \\ \frac{dN'}{dz} &+ \frac{dP'}{dy} = \frac{d^2D}{dz^2} - \frac{d^2G}{dydz} + \frac{d^2F}{dxdy}, \end{aligned}\right\} \text{(b)}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dM'}{dy} &= \frac{d^2B}{dx^2}, \quad \frac{dQ'}{dy} = \frac{d^2E}{dydz} - \frac{d^2B}{dxdz}, \\ \frac{dM'}{dz} &+ \frac{dQ'}{dx} = \frac{d^2E}{dxdz}, \end{aligned}\right\} \text{(c)}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dQ'}{dy} &= \frac{d^2E}{dydz} - \frac{d^2B}{dxdz}, \quad \frac{dR'}{dy} = \frac{d^2B}{dz^2} - \frac{d^2H}{dzdy} + \frac{d^2K}{dy^2}, \\ \frac{dQ'}{dz} &+ \frac{dR'}{dx} = \frac{d^2E}{dz^2} - \frac{d^2H}{dzdx} + \frac{d^2K}{dxdy}, \end{aligned}\right\} \text{(d)}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP'}{dz} &= \frac{d^2C}{dx^2}, \quad \frac{dS'}{dz} = \frac{d^2F}{dydz} - \frac{d^2C}{dxdy}, \\ \frac{dP'}{dy} &+ \frac{dS'}{dx} = \frac{d^2F}{dxdy}, \end{aligned}\right\} \text{(e)}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dR'}{dz} &= \frac{d^2C}{dy^2}, \quad \frac{dS'}{dz} = \frac{d^2F}{dydz} - \frac{d^2C}{dxdy}, \\ \frac{dR'}{dx} &+ \frac{dS'}{dy} = \frac{d^2F}{dy^2}, \end{aligned}\right\} \text{(f)}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dQ'}{dx} &- \frac{dN'}{dy} = 0, \\ \frac{dN'}{dz} &+ 2\frac{dS'}{dx} = \frac{d^2L}{dxdz} + \frac{d^2F}{dxdy} - \frac{d^2K}{dx^2}, \\ 2\frac{dS'}{dy} &+ \frac{dQ'}{dz} = \frac{d^2L}{dydz} + \frac{d^2F}{dy^2} - \frac{d^2K}{dxdy}, \end{aligned}\right\} \text{(g)}$$

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{dQ'}{dx} &+ \frac{dN'}{dy} = \frac{d^2E}{dxdz} + \frac{d^2L}{dxdy} - \frac{d^2H}{dx^2} - \frac{d^2G}{dy^2} + \frac{d^2D}{dydz}, \\ \frac{dN'}{dz} &- \frac{dS'}{dx} = \frac{d^2D}{dz^2} - \frac{d^2G}{dydz}, \\ \frac{dS'}{dy} &+ 2\frac{dQ'}{dz} = \frac{d^2E}{dz^2} - \frac{d^2H}{dxdz} + \frac{d^2L}{dydz}. \end{aligned}\right\} \text{(h)}$$

Von diesen 24 Gleichungen gehen einige, und zwar sechs als Folgerungen der übrigen hervor. So ist die zweite der Gleichungen (a) mit der ersten der Gleichungen (b) identisch, eben so die zweite der Gleichungen (c) mit der ersten der Gleichungen (d) und die zweite der Gleichungen (e) mit der zweiten der Gleichungen (f); ferner erhält man durch Subtraktion der dritten unter den Gleichungen (c) von der dritten in (a) die erste der Gleichungen (g), eben so ergiebt sich durch Subtraktion der dritten unter den Gleichungen (e) von der dritten in (b) genau die zweite der Gleichungen in (h); addirt man endlich je die dritte der Gleichungen in (d) und (g) und subtrahirt von der Summe die dritte in (f), so erhält man auch die dritte der Gleichungen in (h). Diesem nach stellen sich die sechs Gleichungen, die erste der Gleichungen (b), die erste der Gleichungen (d), die zweite in (f), die erste in (g), dann die zweite und dritte der Gleichungen in (h), als Folgen der übrigen dieser acht Systeme von Gleichungen heraus; daher fallen dieselben außer Betrachtung und es erübrigen uns, zur Bestimmung der ersten partiellen Differenzialquotienten der sechs Functionen in ($\alpha''$), gerade so viel Gleichungen, als dieser Differenzialquotienten da sind, die wir auch mittelst dieser Gleichungen wie folgt bestimmt haben:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dM'}{dx} &= \frac{d^2A}{dy^2} - \frac{d^2D}{dxdy} + \frac{d^2E}{dx^2}, \\
\frac{dM'}{dy} &= \frac{d^2B}{dx^2}, \\
\frac{dM'}{dz} &= \tfrac{1}{3}\left(-\frac{d^2D}{dydz} + 2\,\frac{d^2E}{dxdz} + \frac{d^2G}{dy^2} + \frac{d^2H}{dx^2} - \frac{d^2L}{dxdy}\right),
\end{aligned}\right\} (6')$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dN'}{dx} &= -\frac{d^2A}{dydz} + \frac{d^2D}{dxdz}, \\
\frac{dN'}{dy} &= \tfrac{1}{3}\left(\frac{d^2D}{dydz} + \frac{d^2E}{dxdz} - \frac{d^2G}{dy^2} - \frac{d^2H}{dx^2} + \frac{d^2L}{dxdy}\right), \\
\frac{dN'}{dz} &= \tfrac{1}{3}\left(2\,\frac{d^2D}{dz^2} + \frac{d^2F}{dxdy} - 2\,\frac{d^2G}{dydz} - \frac{d^2K}{dx^2} + \frac{d^2L}{dxdz}\right),
\end{aligned}\right\} (7')$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dP'}{dx} &= \frac{d^2A}{dz^2} - \frac{d^2G}{dzdx} + \frac{d^2F}{dx^2}, \\
\frac{dP'}{dy} &= \tfrac{1}{3}\left(\frac{d^2D}{dz^2} + 2\,\frac{d^2F}{dxdy} - \frac{d^2G}{dydz} + \frac{d^2K}{dx^2} - \frac{d^2L}{dxdz}\right), \\
\frac{dP'}{dz} &= \frac{d^2C}{dx^2},
\end{aligned}\right\} (8')$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dQ'}{dx} &= \tfrac{1}{3}\left(\frac{d^2D}{dydz} + \frac{d^2E}{dxdz} - \frac{d^2G}{dy^2} - \frac{d^2H}{dx^2} + \frac{d^2L}{dxdy}\right),\\
\frac{dQ'}{dy} &= -\frac{d^2B}{dxdz} + \frac{d^2E}{dydz},\\
\frac{dQ'}{dz} &= \tfrac{1}{3}\left(2\frac{d^2E}{dz^2} - \frac{d^2F}{dy^2} - 2\frac{d^2H}{dxdz} + \frac{d^2K}{dxdy} + \frac{d^2L}{dydz}\right),
\end{aligned}\right\} \quad (9')$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dR'}{dx} &= \tfrac{1}{3}\left(\frac{d^2E}{dz^2} + \frac{d^2F}{dy^2} - \frac{d^2H}{dzdx} + 2\frac{d^2K}{dxdy} - \frac{d^2L}{dydz}\right),\\
\frac{dR'}{dy} &= \frac{d^2B}{dz^2} - \frac{d^2H}{dydz} + \frac{d^2K}{dy^2},\\
\frac{dR'}{dz} &= \frac{d^2C}{dy^2},
\end{aligned}\right\} \quad (10')$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dS'}{dx} &= \tfrac{1}{3}\left(-\frac{d^2D}{dz^2} + \frac{d^2F}{dxdy} + \frac{d^2G}{dydz} - \frac{d^2K}{dx^2} + \frac{d^2L}{dxdz}\right),\\
\frac{dS'}{dy} &= \tfrac{1}{3}\left(-\frac{d^2E}{dz^2} + 2\frac{d^2F}{dy^2} + \frac{d^2H}{dzdx} - 2\frac{d^2K}{dxdy} + \frac{d^2L}{dydz}\right),\\
\frac{dS'}{dz} &= \frac{d^2F}{dydz} - \frac{d^2C}{dxdy}.
\end{aligned}\right\} \quad (11')$$

354. Werden nun je drei zusammengehörende dieser Gleichungen (6′) bis (11′) nach Nr. 280 behandelt, so ergeben sich im Ganzen 18 Gleichungen, die von den Coefficienten der in Nr. 350 vorgelegten Differenzialfunction (1′) abhängen, und demnach leicht zu verificiren sein werden. Unter diesen 18 Gleichungen kommen sechs in zweimaliger und eine sogar in dreimaliger Wiederholung vor; so daß nur 10 wesentlich verschiedene Bedingungsgleichungen unter den Functionen A, B, C, D, . . . oder unter den Coefficienten der eben erwähnten Differenzialfunction sich herausstellen, die wir hier folgen lassen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^3B}{dx^3} - \frac{d^3E}{dx^2dy} + \frac{d^3D}{dxdy^2} - \frac{d^3A}{dy^3} &= 0,\\
\frac{d^3A}{dz^3} - \frac{d^3G}{dz^2dx} + \frac{d^3F}{dzdx^2} - \frac{d^3C}{dx^3} &= 0,\\
\frac{d^3C}{dy^3} - \frac{d^3K}{dy^2dz} + \frac{d^3H}{dydz^2} - \frac{d^3B}{dz^3} &= 0,
\end{aligned}\right\} \quad (12')$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^3H}{dx^3} - \frac{d^3L}{dx^2dy} - \frac{d^3E}{dx^2dz} + \frac{d^3G}{dxdy^2} + 2\frac{d^3D}{dxdydz} - 3\frac{d^3A}{dy^2dz} = 0,\\
&\frac{d^3K}{dx^3} - \frac{d^3L}{dx^2dz} - \frac{d^3F}{dx^2dy} + \frac{d^3D}{dxdz^2} + 2\frac{d^3G}{dxdydz} - 3\frac{d^3A}{dz^2dy} = 0,\\
&\frac{d^3G}{dy^3} - \frac{d^3L}{dy^2dx} - \frac{d^3D}{dy^2dz} + \frac{d^3H}{dydx^2} + 2\frac{d^3E}{dxdydz} - 3\frac{d^3B}{dx^2dz} = 0,\\
&\frac{d^3F}{dy^3} - \frac{d^3L}{dy^2dz} - \frac{d^3K}{dy^2dx} + \frac{d^3E}{dydz^2} + 2\frac{d^3H}{dxdydz} - 3\frac{d^3B}{dz^2dx} = 0,\\
&\frac{d^3E}{dz^3} - \frac{d^3L}{dz^2dy} - \frac{d^3H}{dz^2dx} + \frac{d^3F}{dzdy^2} + 2\frac{d^3K}{dxdydz} - 3\frac{d^3C}{dy^2dx} = 0,\\
&\frac{d^3D}{dz^3} - \frac{d^3L}{dz^2dx} - \frac{d^3G}{dz^2dy} + \frac{d^3K}{dzdx^2} + 2\frac{d^3F}{dxdydz} - 3\frac{d^3C}{dx^2dy} = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (13')$$

$$\frac{d^3K}{dx^2dy} - \frac{d^3F}{dxdy^2} + \frac{d^3E}{dz^2dx} - \frac{d^3H}{dzdx^2} + \frac{d^3G}{dy^2dz} - \frac{d^3D}{dydz^2} = 0. \quad (14')$$

Die acht Gleichungen, die als Wiederholungen eines Theiles der hier aufgestellten zehn Gleichungen weggelassen worden sind, vertheilen sich unter den letztern in der Weise, daß zwei derselben mit der Gleichung (14′) und die sechs übrigen beziehungsweise mit den sechs Gleichungen in (13′) identisch sind.

Diese zehn Bedingungsgleichungen werden nun zu realisiren sein, damit die Annahme in Nr. 350, die Differenzialfunction (1′) daselbst sei Ergebniß der Differenziation einer Differenzialfunction wie (2′), nicht zu den Unmöglichkeiten gehöre. Umgekehrt nimmt man, im Falle des Statthabens dieser Bedingungsgleichungen, beachtend die Deduction derselben, nicht allein die Zulässigkeit der eben erwähnten Annahme, sondern auch, wie in der folgenden Nr. eigens wird gezeigt werden, den Weg ab, besagte Integralfunction herbei zu führen.

355. Durch ein successives Zurückgehen von den Bedingungsgleichungen (12′) bis (14′) auf die Gleichungen (6′) bis (11′) vorangehender Nr., hierauf von diesen auf die Gleichungen (5′) Nr. 353, dann endlich von diesen auf die Gleichungen (4′); durch ein solches successives Zurückgehen gelingt es zuletzt die unbekannten Functionen in ($\alpha$) Nr. 352 oder die Coefficienten der Differenzialfunction (2′) Nr. 350 herzustellen, wie solches sofort dargethan werden soll.

I. Beim Statthaben der Bedingungsgleichungen (12′) bis (14′)

stellen in den Gleichungen (6′) bis (11′) die partiellen Differenzialquotienten:

$$\frac{dM'}{dx}, \frac{dM'}{dy}, \frac{dM'}{dz}, \quad \frac{dN'}{dx}, \frac{dN'}{dy}, \frac{dN'}{dz}, \quad \frac{dP'}{dx}, \ldots$$

Functionen von x, y und z vor, die in die linearen Differenzialfunctionen:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dM'}{dx}\,dx + \frac{dM'}{dy}\,dy + \frac{dM'}{dz}\,dz, \\ \frac{dN'}{dx}\,dx + \frac{dN'}{dy}\,dy + \frac{dN'}{dz}\,dz, \\ \frac{dP'}{dx}\,dx + \frac{dP'}{dy}\,dy + \frac{dP'}{dz}\,dz, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (15')$$

gesetzt, letztere in vollständige oder integrable Differenzialfunctionen umsetzen; werden diese nach Nr. 283 integrirt, so bieten solche in derselben Ordnungsfolge die in Nr. 353 eingeführten und in ($\alpha''$) zusammengestellten Functionen:

$$M', N', P', Q', R', S',$$

jede mit einer von der Integration herrührenden willkührlichen Constante versehen, dar.

II. Denken wir uns diese eben genannten sechs Functionen ermittelt, und setzen die für dieselben gewonnenen Bestimmungen in die Gleichungen (5′) Nr. 353 ein; so stellen sich die partiellen Differenzialquotienten:

$$\frac{dM}{dx}, \frac{dM}{dy}, \frac{dM}{dz}, \quad \frac{dN}{dx}, \frac{dN}{dy}, \frac{dN}{dz}, \quad \frac{dP}{dx}, \ldots$$

die diese Gleichungen (5′) darbieten, dergestalt heraus, daß wenn solche in die Differenzialfunctionen:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dM}{dx}\,dx + \frac{dM}{dy}\,dy + \frac{dM}{dz}\,dz, \\ \frac{dN}{dx}\,dx + \frac{dN}{dy}\,dy + \frac{dN}{dz}\,dz, \\ \frac{dP}{dx}\,dx + \frac{dP}{dy}\,dy + \frac{dP}{dz}\,dz, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (16')$$

eingesetzt werden, diese in vollständige integrable Differenzialfunctionen

übergehen. Denn die Gleichungen (a) bis (h) stellen die zu erfüllenden Bedingungsgleichungen dieser Aussage dar; diese Gleichungen sind aber mit denen von (6′) bis (11′) gleichbedeutend oder vielmehr einerlei; und da letztere beim Statthaben der Bedingungsgleichungen (12′), (13′) und (14′), wie bereits in I. festgestellt worden, zugleich Bestand haben: so sind auch die 8 linearen Differenzialfunctionen in (16′), wie behauptet wurde, Ergebnisse unmittelbarer Differenziationen, deren Integralfunctionen die in Nr. 352 unter ($\alpha'$) zusammengestellten acht Functionen:

$$M, N, P, Q, R, S, T, U,$$

jede mit einer willkührlichen Integrationsconstante versehen, darstellen werden.

III. Denken wir uns ferner auch diese acht Functionen hergestellt; dann bieten, nach Einführung derselben in die Gleichungen (4′), diese die partiellen Differenzialquotienten:

$$\frac{dA'}{dx}, \frac{dA'}{dy}, \frac{dA'}{dz}, \quad \frac{dB'}{dx}, \frac{dB'}{dy}, \frac{dB'}{dz}, \quad \frac{dC'}{dx}, \ldots,$$

als bekannte Functionen von x, y und z dar, welche in die linearen Differenzialfunctionen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dA'}{dx}\,dx + \frac{dA'}{dy}\,dy + \frac{dA'}{dz}\,dz, \\ &\frac{dB'}{dx}\,dx + \frac{dB'}{dy}\,dy + \frac{dB'}{dz}\,dz, \\ &\frac{dC'}{dx}\,dx + \frac{dC'}{dy}\,dy + \frac{dC'}{dz}\,dz, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (17')$$

gesetzt, solche aus ähnlichen Gründen, die wir vorhin in II. bei ähnlichem Anlasse geltend gemacht, als vollständige oder integrable Differenzialfunctionen herausstellen. Integrirt man diese sechs linearen Differenzialfunctionen nach Nr. 283, so werden abermals 6 willkührliche Constanten eingeführt, und die sechs Ergebnisse dieser Integrationen stellen dann die in Nr. 352 unter ($\alpha$) zusammengestellten Functionen:

$$A', B', C', D', E', F'$$

dar, welche das Endziel unserer vorliegenden Untersuchung abgegeben.

Setzt man diese für A′, B′, C′, D′, E′, F′ gefundenen Functionen von x, y und z in (2′) Nr. 350; dann stellt die so gewonnene Differenzialfunction zweiten Grades, die 20 willkührliche Constanten enthalten wird, das unmittelbar vorhergehende Integrale der vorgelegten Differenzialfunction dritten Grades in (1′) derselben Nr. dar.

356. Die allgemeinen Ergebnisse der letzten sechs Nrn. wollen wir auf einen besondern Fall, nämlich auf die Differenzialfunction dritten Grades:

$$4x^3(y^2+z^2)\,dx^3 + 4y^3(z^2+x^2)\,dy^3 + 4z^3(x^2+y^2)\,dz^3$$
$$+ y(z^2+2x^4)\,dx^2\,dy + x(z^2+2y^4)\,dx\,dy^2$$
$$+ x(y^2+2z^4)\,dz^2\,dx + z(y^2+2x^4)\,dz\,dx^2$$
$$+ 2zy^4\,dy^2\,dz + 2yz^4\,dy\,dz^2$$
$$+ 4xyz\,dx\,dy\,dz,$$

zur Anwendung bringen.

Vergleicht man diese mit der allgemeinen Differenzialfunction in Nr. 350, (1′), so hat man:

$$A = 4x^3(y^2+z^2), \quad B = 4y^3(z^2+x^2), \quad C = 4z^3(x^2+y^2),$$
$$D = y(z^2+2x^4), \quad E = x(z^2+2y^4),$$
$$F = x(y^2+2z^4), \quad G = z(y^2+2x^4),$$
$$H = 2zy^4, \quad K = 2yz^4,$$
$$L = 4xyz;$$

und da sämmtliche 10 Bedingungsgleichungen (12′), (13′) und (14′) realisirt werden, so übergehen wir auch zur Herstellung der Integralfunction.

I. Die Gleichungen (6′) bis (11′) auf den vorliegenden Fall angewandt, geben folgende Bestimmungen:

$$\frac{dM'}{dx} = 0, \quad \frac{dM'}{dy} = 8y^3, \quad \frac{dM'}{dz} = 0,$$
$$\frac{dN'}{dx} = 0, \quad \frac{dN'}{dy} = 2z, \quad \frac{dN'}{dz} = 2y,$$
$$\frac{dP'}{dx} = 0, \quad \frac{dP'}{dy} = 0, \quad \frac{dP'}{dz} = 8z^3,$$
$$\frac{dQ'}{dx} = 2z, \quad \frac{dQ'}{dy} = 0, \quad \frac{dQ'}{dz} = 2x,$$

$$\frac{dR'}{dx} = 0\,,\quad \frac{dR'}{dy} = 0\,,\quad \frac{dR'}{dz} = 8\,z^3\,,$$
$$\frac{dS'}{dx} = 2\,y\,,\ \frac{dS'}{dy} = 2\,x\,,\quad \frac{dS'}{dz} = 0\,;$$

daher bieten die Differenzialausdrücke in (15′) folgende Gleichungen zur Bestimmung der Functionen M′, N′, P′, Q′, R′, S′ dar:

$$dM' = 8\,y^3\,dy\,,\quad dN' = 2\,z\,dy + 2\,y\,dz\,,$$
$$dP' = 8\,z^3\,dz\,,\quad dQ' = 2\,x\,dz + 2\,z\,dx\,,$$
$$dR' = 8\,z^3\,dz\,,\quad dS' = 2\,y\,dx + 2\,x\,dy\,;$$

aus welchen, durch Integration, die folgenden gezogen werden:

$$M' = 2\,y^4 + a_1\,,\quad N' = 2\,y\,z + a_2\,,$$
$$P' = 2\,z^4 + a_3\,,\quad Q' = 2\,z\,x + a_4\,,$$
$$R' = 2\,z^4 + a_5\,,\quad S' = 2\,x\,y + a_6\,,$$

wo $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$, $a_6$ die sechs Integrationsconstanten sind.

II. Diese für M′, N′, P′, . . . gewonnenen, wie die am Eingange für A, B, C, D, . . . festgestellten Functionen von x, y und z, in die Gleichungen (5′) gesetzt, erhält man folgende Bestimmungen:

$$\frac{dM}{dx} = 8\,x^3\,y\,,\quad \frac{dM}{dy} = a_1 + 2\,x^4\,,\quad \frac{dM}{dz} = -\,a_2\,,$$
$$\frac{dN}{dx} = 8\,x^3\,z\,,\quad \frac{dN}{dy} = -\,a_2\,,\quad \frac{dN}{dz} = a_3 + 2\,x^4\,,$$
$$\frac{dP}{dx} = a_1 + 2\,y^4\,,\quad \frac{dP}{dy} = 8\,y^3\,x\,,\quad \frac{dP}{dz} = -\,a_4\,,$$
$$\frac{dQ}{dx} = -\,a_4\,,\quad \frac{dQ}{dy} = 8\,y^3\,z\,,\quad \frac{dQ}{dz} = a_5 + 2\,y^4\,,$$
$$\frac{dR}{dx} = a_3 + 2\,z^4\,,\quad \frac{dR}{dy} = -\,a_6\,,\quad \frac{dR}{dz} = 8\,z^3\,x\,,$$
$$\frac{dS}{dx} = -\,a_6\,,\quad \frac{dS}{dy} = a_5 + 2\,z^4\,,\quad \frac{dS}{dz} = 8\,z^3\,y\,,$$
$$\frac{dT}{dx} = a_2 + 2\,y\,z\,,\quad \frac{dT}{dy} = a_4 + 2\,z\,x\,,\quad \frac{dT}{dz} = -2\,a_6 + 2\,x\,y\,,$$
$$\frac{dU}{dx} = a_2 + 2\,y\,z\,,\quad \frac{dU}{dy} = -\,2\,a_4 + 2\,z\,x\,,\quad \frac{dU}{dz} = a_6 + 2\,x\,y\,,$$

welche in die Differenzialfunctionen (16′) gesetzt, und dieselben hierauf integrirt, folgende Bestimmungen für M, N, P, Q, . . . darbieten:

$$M = 2x^4y + a_1y - a_2z + a_7, \quad N = 2x^4z - a_2y + a_3z + a_8,$$
$$P = 2y^4x + a_1x - a_4z + a_9, \quad Q = 2y^4z - a_4x + a_5z + a_{10},$$
$$R = 2z^4x + a_3x - a_6y + a_{11}, \quad S = 2z^4y - a_6x + a_5y + a_{12},$$
$$T = 2xyz + a_2x + a_4y - 2a_6z + a_{13},$$
$$U = 2xyz + a_2x - 2a_4y + a_6z + a_{14},$$

wo $a_7, a_8, \ldots a_{14}$ die acht willkührlichen Constanten der eben erwähnten Integrationen sind.

III. Werden endlich die eben bestimmten, wie die die am Eingange für A, B, C, . . . festgestellten Functionen von x, y, und z in die Gleichungen (4′), dann die so sich ergebenden Bestimmungen der partiellen Differenzialquotienten:

$$\frac{dA'}{dx}, \quad \frac{dA'}{dy}, \quad \frac{dA'}{dz}, \quad \frac{dB'}{dx}, \quad \frac{dB'}{dy}, \quad \frac{dB'}{dz}, \quad \frac{dC'}{dx}, \ldots$$

in die linearen Differenzialfunctionen (17′) eingesetzt; so erhält man zur Bestimmung von A′, B′, C′, . . . folgende Gleichungen:

$$dA' = 4x(y^2 + z^2)dx + (2x^4y + a_1y - a_2z + a_7)dy + (2x^4z - a_2y + a_3z + a_8)dz,$$
$$dB' = (2y^4x - a_4z + a_1x + a_9)dx + 4y^3(z^2 + x^2)dy + (2y^4z + a_5z - a_4x + a_{10})dz,$$
$$dC' = (2z^4x + a_3x - a_6y + a_{11})dx + (2z^4y - a_6x + a_5y + a_{12})dy + 4z^3(x^2 + y^2)dz,$$
$$dD' = (z^2y - a_1y + a_2z - a_7)dx + (z^2x + a_4z - a_1x - a_9)dy + (2xyz + a_2x + a_4y - 2a_6z + a_{13})dz,$$
$$dE' = (y^2z + a_2y - a_3z - a_8)dx + (2xyz + a_2x - 2a_4y + a_6z + a_{14})dy + (y^2x - a_3x + a_6y - a_{11})dz,$$
$$dF' = (-2a_2x + a_4y + a_6z - a_{13} - a_{14})dx + (-a_5z + a_4x - a_{10})dy + (a_6x - a_5y - a_{12})dz;$$

integrirt man endlich die Differenzialfunctionen zur Rechten der Gleichheitszeichen nach Nr. 283, so erhält man:

$$A' = x^4(y^2 + z^2) + \tfrac{1}{2}a_1y^2 - a_2yz + \tfrac{1}{2}a_3z^2 + a_7y + a_8z + a_{15},$$
$$B' = y^4(z^2 + x^2) + \tfrac{1}{2}a_5z^2 - a_4zx + \tfrac{1}{2}a_1x^2 + a_{10}z + a_9x + a_{16},$$
$$C' = z^4(x^2 + y^2) + \tfrac{1}{2}a_3x^2 - a_6xy + \tfrac{1}{2}a_5y^2 + a_{11}x + a_{12}y + a_{17},$$
$$D' = xyz^2 - a_1xy + a_2zx + a_4yz - a_6z^2 - a_7x - a_9y + a_{13}z + a_{18},$$
$$E' = zxy^2 + a_2xy - a_3zx + a_6yz - a_4y^2 - a_8x + a_{14}y - a_{11}z + a_{19},$$
$$F' = a_4xy + a_6zx - a_5yz - a_2x^2 - (a_{13} + a_{14})x - a_{10}y - a_{12}z + a_{20},$$

wo $a_{15}$, $a_{16}$, . . . $a_{20}$ die sechs willkührlichen Constanten der letztern sechs Integrationen sind.

Setzt man diese für A′, B′, C′, D′, E′, F′ gefundenen Functionen von x, y, z in die Differenzialfunction (2′) Nr. 350, dann stellt das Ergebniß, das die 20 willkührlichen Constanten:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots a_{20}$$

enthalten wird, das unmittelbar vorhergehende Integrale der am Eingange vorliegender Nr. aufgestellten Differenzialfunction dritten Grades der drei Variabeln x, y und z vor.

357. Die in den vorangeschickten sieben Nrn. behandelte Differenzialfunction dritten Grades dreier Variabeln haben wir in einer Weise mitgetheilt, daß mit Zuversicht angenommen werden kann, es finde nunmehr, vom theoretischen Gesichtspunkte betrachtet, keinerlei Schwierigkeit Statt, ähnliche Differenzialfunctionen in Beziehung auf Integrabilität einer Untersuchung zu unterlegen. Wir unterlassen daher Differenzialfunctionen dreier Variabeln vom vierten, fünften und noch höherem Grade besonders in Untersuchung zu ziehen, zumal wir noch in folgendem Paragraphen, der ausschließlich der Untersuchung einer Differenzialfunction zweiten Grades mit n Variabeln bestimmt ist, die Untersuchungen in Bezug auf Integrabilität ganz in derselben Weise, wie den zuletzt behandelten Fall leiten werden; woraus noch Mancherlei zur Aufhellung des in den letztern Nrn. zur Anwendung gebrachten Verfahrens hervorgehen dürfte.

## §. III.

## Mehrgliedrige Differenzialfunction zweiten Grades von n Variabeln.

358. Eine Differenzialfunction des zweiten Grades der n Variabeln:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots\ldots x_n$$

ist von folgender Form:

$$X_{1,1}\,dx_1^2 + X_{2,2}\,dx_2^2 + X_{3,3}\,dx_3^2 + X_{4,4}\,dx_4^2 + \ldots + X_{n,n}\,dx_n^2$$
$$+ X_{1,2}\,dx_1\,dx_2 + X_{1,3}\,dx_1\,dx_3 + X_{1,4}\,dx_1\,dx_4 + \ldots + X_{1,n}\,dx_1\,dx_n$$
$$+ X_{2,3}\,dx_2\,dx_3 + X_{2,4}\,dx_2\,dx_4 + \ldots + X_{2,n}\,dx_2\,dx_n$$
$$+ X_{3,4}\,dx_3\,dx_4 + \ldots + X_{3,n}\,dx_3\,dx_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ X_{n-2,n-1}\,dx_{n-2}\,dx_{n-1} + X_{n-2,n}\,dx_{n-2}\,dx_n$$
$$+ X_{n-1,n}\,dx_{n-1}\,dx_n, \quad \text{(A)}$$

wo die Coefficienten:

$$\left.\begin{array}{l} X_{1,1},\ X_{2,2},\ X_{3,3},\ X_{4,4},\ \ldots\ldots\ X_{n,n}, \\ X_{1,2},\ X_{1,3},\ X_{1,4},\ \ldots\ldots\ldots\ X_{1,n}, \\ X_{2,3},\ X_{2,4},\ \ldots\ldots\ldots\ X_{2,n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{n-2,n-1},\ X_{n-2,n}, \\ X_{n-1,n}, \end{array}\right\} \quad \text{(B)}$$

deren Anzahl gleich:

$$n + \tfrac{1}{2}\,n\,(n-1) \text{ oder } \tfrac{1}{2}\,n\,(n+1)$$

ist, Functionen der n Variabeln $x, x_2, x_3, \ldots x_n$ vorstellen.

Diese Functionen werden gewissen Bedingungsgleichungen nachzukommen haben, damit die vorgelegte Differenzialfunction, als unmittelbares Ergebniß der Differenziation einer linearen Differenzialfunction derselben n Variabeln, jedoch mit Constantsetzung der Differenzialien derselben, erkannt werde. Die Herstellung dieser Bedingungsgleichungen nun, und zwar deren Gesammtheit, d. h., ohne Uebergehung einer oder mehrerer derselben, dann, unter Voraussetzung ihres Bestandhabens, die Möglichkeit einer einmaligen Integration der vorgelegten Differenzialfunction anschaulich zu machen; diesen doppelten Endzweck wird die Art, wie wir die Untersuchungen leiten werden, vereinen, die wir mit der folgenden Nr. eröffnen.

359. Wird die unmittelbar vorhergehende Integralfunction der vorgelegten Differenzialfunction zweiten Grades (A), falls eine solche nämlich existirt, durch:

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + X_3\,dx_3 + X_4\,dx_4 + \ldots + X_n\,dx_n \quad \text{(C)}$$

dargestellt, wo:

$$X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots X_n, \qquad (D)$$

unbekannte Functionen der n Variabeln $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ sind; dann bietet auch das Ergebniß der Differenziation dieser linearen Differenzialfunction nach sämmtlichen n Variabeln die vorgelegte des zweiten Grades in (A) dar.

Vollzieht man diese Differenziation unter der Annahme, daß nur die n Variabeln und nicht deren Differenzialien unendlich kleinwerdende Variationen erleiden; so ist der eben gemachten Aussage, falls unter den Variabeln $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ keinerlei Zusammenhang festgestellt wird, nur insofern zu entsprechen möglich, als folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dX_1}{dx_1} &= X_{1,1}, & \frac{dX_1}{dx_2} + \frac{dX_2}{dx_1} &= X_{1,2}, \\ & & \frac{dX_1}{dx_3} + \frac{dX_3}{dx_1} &= X_{1,3}, \\ & & \frac{dX_1}{dx_4} + \frac{dX_4}{dx_1} &= X_{1,4}, \\ & & \cdots\cdots\cdots & \\ & & \frac{dX_1}{dx_n} + \frac{dX_n}{dx_1} &= X_{1,n}, \end{aligned}\right\} \qquad (a_1)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dX_2}{dx_2} &= X_{2,2}, & \frac{dX_2}{dx_3} + \frac{dX_3}{dx_2} &= X_{2,3}, \\ & & \frac{dX_2}{dx_4} + \frac{dX_4}{dx_2} &= X_{2,4}, \\ & & \cdots\cdots\cdots & \\ & & \frac{dX_2}{dx_n} + \frac{dX_n}{dx_2} &= X_{2,n}, \end{aligned}\right\} \qquad (a_2)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dX_3}{dx_3} &= X_{3,3}, & \frac{dX_3}{dx_4} + \frac{dX_4}{dx_3} &= X_{3,4}, \\ & & \cdots\cdots\cdots & \\ & & \frac{dX_3}{dx_n} + \frac{dX_n}{dx_3} &= X_{3,n}, \end{aligned}\right\} \qquad (a_3)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dX_{n-2}}{dx_{n-2}} &= X_{n-2,n-2}, & \frac{dX_{n-2}}{dx_{n-1}} + \frac{dX_{n-1}}{dx_{n-2}} &= X_{n-2,n-1}, \\ & & \frac{dX_{n-2}}{dx_n} + \frac{dX_n}{dx_{n-2}} &= X_{n-2,n}, \end{aligned}\right\} \qquad (a_{n-2})$$

$$\frac{dX_{n-1}}{dx_{n-1}} = X_{n-1,n-1}\,,\quad \frac{dX_{n-1}}{dx_n} + \frac{dX_n}{dx_{n-1}} = X_{n-1,n}\,, \qquad (a_{n-1})$$

$$\frac{dX_n}{dx_n} = X_{n,n} \qquad (a_n)$$

bestehend vorausgesetzt werden.

Wenn aus diesen Gleichungen die unbekannten Functionen in (D), oder vielmehr die partiellen Differenzialquotienten dieser Functionen, eliminirt werden, so erhält man die Bedingungsgleichungen der Integrabilität der Differenzialfunction (A) zum Ergebnisse. Dieses jedesmal in der Ausgangs vorangehender Nr. angedeuteten Weise zu erzielen, wird in den folgenden Nrn. mitgetheilt werden.

360. Die Anzahl der Gleichungen der n Systeme $(a_1)$, $(a_2)$, $(a_3)$, . . . $(a_n)$ vorangehender Nr. ist:

$$n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + 3 + 2 + 1\,,$$

oder auch $\frac{1}{2}n(n+1)$ gleich, die Anzahl der aus denselben zu eliminirenden partiellen Differenzialquotienten ist $n.n$, oder $n^2$; es ermangeln sonach, diese partiellen Differenzialquotienten durch bekannte Functionen der n Variabeln $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ auszudrücken, um nachher die Elimination derselben nach Nr. 281 bewerkstelligen zu können, eine Anzahl von $n^2 - \frac{1}{2}n(n+1)$, oder $\frac{1}{2}n(n-1)$ Gleichungen. Führen wir, um dennoch die eben erwähnten partiellen Differenzialquotienten ausgedrückt zu erhalten, eine der zuletzt angegebenen gleich große Anzahl von unbekannten Hülfsfunctionen ein; so gewinnt man folgende Bestimmungen:

$$\frac{dX_1}{dx_1} = X_{1,1}\,,\ \frac{dX_1}{dx_2} = U_{1,2}\,,\ \frac{dX_1}{dx_3} = U_{1,3}\,,\ \ldots\ \frac{dX_1}{dx_n} = U_{1,n}\,, \qquad (E_1)$$

$$\frac{dX_2}{dx_1} = X_{1,2} - U_{1,2}\,,\ \frac{dX_2}{dx_2} = X_{2,2}\,,\ \frac{dX_2}{dx_3} = U_{2,3}\,,\ \ldots\ \frac{dX_2}{dx_n} = U_{2,n}\,, \qquad (E_2)$$

$$\frac{dX_3}{dx_1} = X_{1,3} - U_{1,3}\,,\ \frac{dX_3}{dx_2} = X_{2,3} - U_{2,3}\,,\ \frac{dX_3}{dx_3} = X_{3,3}\,,\ \ldots\ \frac{dX_3}{dx_n} = U_{3,n}\,, \qquad (E_3)$$

. . . . . .

$$\frac{dX_n}{dx_1} = X_{1,n} - U_{1,n}\,,\ \frac{dX_n}{dx_2} = X_{2,n} - U_{2,n}\,,\ \ldots\ \frac{dX_n}{dx_{n-1}} = X_{n-1,n} - U_{n-1,n}\,,\ \frac{dX_n}{dx_n} = X_{n,n}\,, \qquad (E_n)$$

wo:

$$\left.\begin{array}{llll} U_{1,2}, & U_{1,3}, & U_{1,4}, & \ldots U_{1,n}, \\ & U_{2,3}, & U_{2,4}, & \ldots U_{2,n}, \\ & & U_{3,4}, & \ldots U_{3,n}, \\ & & & \ldots\ldots \\ & & & U_{n-1,n}, \end{array}\right\} \quad (F)$$

diese Hülfsfunctionen sind, deren Anzahl gleich $\frac{1}{2}n(n-1)$ ist und die wir uns, als unbekannte Functionen von sämmtlichen n Variabeln $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ denken. Werden aus diesen n Systemen von $n^2$ Gleichungen nach der in der Analysis des Endlichen gemein üblichen Weise die eben eingeführten Hülfsfunctionen in (F) eliminirt, so kommen wieder sämmtliche in den Systemen $(a_1), (a_2) \ldots (a_n)$ enthaltenen Gleichungen zum Vorschein.

Jedes der n Systeme:

$$(E_1), (E_2), (E_3), \ldots (E_n)$$

von je n Gleichungen bietet, nach Nr. 281 behandelt, ein System von $\frac{1}{2}n(n-1)$, daher alle zusammen ein System von $\frac{1}{2}n^2(n-1)$ Gleichungen dar, die zur Ausmittelung sämmtlicher ersten partiellen Differenzialquotienten der eben eingeführten Hülfsfunctionen in (F) führen. Denn, wie schon oben bemerkt wurde, sind dieser eingeführten Hülfsfunctionen $\frac{1}{2}n(n-1)$; daher ist die Anzahl der ersten partiellen Differenzialquotienten derselben nach sämmtlichen n Variabeln $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ gleich $\frac{1}{2}n^2(n-1)$, welche mittelst der gleichen Anzahl von Gleichungen, wie in den folgenden zwei Nrn. wird gezeigt werden, bestimmt werden können. Erst nach vollzogener Bestimmung derselben kann, und wird jedesmal auch, zur Herstellung der verlangten Bedingungsgleichungen geschritten werden.

361. Um die Bestimmungen der partiellen Differenzialquotienten der in vorangehender Nr. eingeführten Hülfsfunctionen in der ganzen Allgemeinheit zu erzielen, heben wir von den n Systemen der Gleichungen in $(E_1), (E_2), (E_3), \ldots (E_n)$ derselben Nr. die drei in:

$$(E_g), (E_h), (E_k)$$

enthaltenen besonders heraus, wo g, h, k ganze Zahlen vorstellen, die aller Werthe von 1 bis und mit n fähig sind, welche folgenden Ungleichheiten:

$$g < h < k$$

nachkommen.

Stellen wir diese eben genannten drei Systeme von Gleichungen etwas ausführlicher, als in voriger Nr. nöthig war, hier zusammen, so haben wir:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dX_g}{dx_1} = X_{1,g} - U_{1,g}\,,\quad \frac{dX_g}{dx_2} = X_{2,g} - U_{2,g}\,,\quad \ldots\ldots\ \frac{dX_g}{dx_{g-1}} = X_{g-1,g} - U_{g-1,g}\,,\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{dX_g}{dx_g} = X_{g,g}\,,\\ &\frac{dX_g}{dx_{g+1}} = U_{g,g+1}\,,\ \ldots\ \frac{dX_g}{dx_h} = U_{g,h}\ \ldots\ \frac{dX_g}{dx_k} = U_{g,k}\,,\ \ldots\ \frac{dX_g}{dx_n} = U_{g,n}\,, \end{aligned}\right\} (E_g)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dX_h}{dx_1} = X_{1,h} - U_{1,h}\,,\ \ldots\ \frac{dX_h}{dx_g} = X_{g,h} - U_{g,h}\,,\ \ldots\ \frac{dX_h}{dx_{h-1}} = X_{h-1,h} - U_{h-1,h}\,,\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{dX_h}{dx_h} = X_{h,h}\,,\\ &\frac{dX_h}{dx_{h+1}} = U_{h,h+1}\,,\ \frac{dX_h}{dx_{h+2}} = U_{h,h+2}\,,\ \ldots\ \frac{dX_h}{dx_k} = U_{h,k}\,,\ \ldots\ \frac{dX_h}{dx_n} = U_{h,n}\,, \end{aligned}\right\} (E_h)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dX_k}{dx_1} = X_{1,k} - U_{1,k}\,,\ \ldots\ \frac{dX_k}{dx_g} = X_{g,k} - U_{g,k}\,,\ \ldots\ \frac{dX_k}{dx_h} = X_{h,k} - U_{h,k}\,,\ \ldots\ \frac{dX_k}{dx_{k-1}} = X_{k-1,k} - U_{k-1,k}\,,\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{dX_k}{dx_k} = X_{k,k}\,,\\ &\frac{dX_k}{dx_{k+1}} = U_{k,k+1}\,,\ \frac{dX_k}{dx_{k+2}} = U_{k,k+2}\,,\ \ldots\ldots\ \frac{dX_k}{dx_n} = U_{k,n}\,, \end{aligned}\right\} (E_k)$$

die wir bei der Bestimmung der ersten partiellen Differenzialquotienten der Hülfsfunctionen in (F) unterlegen.

Heben wir aus dem Systeme in $(E_g)$ die zwei folgenden:

$$\frac{dX_g}{dx_h} = U_{g,h}\,,\quad \frac{dX_g}{dx_k} = U_{g,k}\,,$$

welche auf der dritten Zeile dieses citirten Systems vorkommen, heraus; so erhalten wir, wenn erstere partiell nach $x_k$, letztere partiell nach $x_h$ differenzirt und hierauf deren Unterschied genommen wird, folgende Gleichung:

$$\frac{dU_{g,h}}{dx_k} - \frac{dU_{g,k}}{dx_h} = 0\,. \qquad (1)$$

Wenn ferner aus dem Systeme $(E_h)$ die zwei folgenden, welche auf der ersten und dritten Zeile daselbst vorkommen, herausgehoben werden, nämlich:

$$\frac{dX_h}{dx_g} = X_{g,h} - U_{g,h}\,,\quad \frac{dX_h}{dx_k} = U_{h,k}\,;$$

so erhält man, wenn die erste nach $x_k$ und die zweite nach $x_g$ partiell differenzirt wird, nach vollbrachter Subtraktion derselben, folgende:

$$\frac{dU_{g,h}}{dx_k} + \frac{dU_{h,k}}{dx_g} = \frac{dX_{g,h}}{dx_k}. \qquad (2)$$

Hebt man endlich aus dem Systeme $(E_k)$ folgende zwei, auf der ersten Zeile daselbst befindlichen Gleichungen heraus:

$$\frac{dX_k}{dx_g} = X_{g,k} - U_{g,k}, \quad \frac{dX_k}{dx_h} = X_{h,k} - U_{h,k};$$

dann wird, wenn erstere nach $x_h$ und letztere nach $x_g$ partiell differenzirt, und hierauf der Unterschied derselben genommen wird, folgende Gleichung gewonnen:

$$\frac{dU_{g,k}}{dx_h} - \frac{dU_{h,k}}{dx_g} = \frac{dX_{g,k}}{dx_h} - \frac{dX_{h,k}}{dx_g}. \qquad (3)$$

Werden nun diese gewonnenen drei Gleichungen (1), (2), (3) addirt, so ergiebt sich:

$$\frac{dU_{g,h}}{dx_k} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dX_{g,h}}{dx_k} + \frac{dX_{g,k}}{dx_h} - \frac{dX_{h,k}}{dx_g}\right), \qquad (G)$$

in welcher Gleichung wir, wegen der oben unter den ganzen Zahlen g, h, k festgestellten Ungleichheiten, die Zahlenwerthe:

$$h+1,\ h+2,\ h+3,\ h+4,\ \ldots\ n-1,\ n$$

statt k setzen dürfen. Es bietet sonach diese Gleichung (G) die partiellen Differenzialquotienten:

$$\frac{dU_{g,h}}{dx_{h+1}},\ \frac{dU_{g,h}}{dx_{h+2}},\ \frac{dU_{g,h}}{dx_{h+3}},\ \ldots\ \frac{dU_{g,h}}{dx_{n-1}},\ \frac{dU_{g,h}}{dx_n},$$

als bekannte Functionen von $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ dar, und zwar für alle ganzen Zahlenwerthe von g und h, für die man $g \angle h$ hat.

Die Bestimmung des partiellen Differenzialquotienten:

$$\frac{dU_{g,h}}{dx_h},$$

nehmen wir mittelst folgender zwei Gleichungen vor:

$$\frac{dX_h}{dx_g} = X_{g,h} - U_{g,h}, \quad \frac{dX_h}{dx_h} = X_{h,h},$$

die der ersten und zweiten Zeile aus dem Systeme der Gleichungen ($E_h$) entnommen sind. — Differenzirt man diese Gleichungen partiell, erstere nach $x_h$ und letztere nach $x_g$, nimmt dann deren Unterschied; so ergiebt sich die Gleichung:

$$\frac{dU_{g,h}}{dx_h} = \frac{dX_{g,h}}{dx_h} - \frac{dX_{h,h}}{dx_g}, \qquad (H)$$

welche die verlangte Bestimmung darbietet.

Die partiellen Differenzialquotienten von $U_{g,h}$ nach den Variabeln:

$$x_{h-1}, \; x_{h-2}, \; x_{h-3}, \; \ldots \ldots \; x_{g+1}$$

darzustellen, schlagen wir folgenden Weg ein.

Wir addiren die oben aufgestellten Gleichungen (2) und (3) und ziehen von deren Summe die Gleichung (1) ab, so erhalten wir die Gleichung:

$$\frac{dU_{g,k}}{dx_h} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dX_{g,k}}{dx_h} + \frac{dX_{g,h}}{dx_k} - \frac{dX_{h,k}}{dx_g}\right).$$

Die ganzen Zahlen g, h, k unterliegen lediglich den Beschränkungen:

$$g < h < k \text{ und } k \leqq n,$$

und sind in jeder andern Beziehung willkührlich; daher sind wir auch k in h umzusetzen berechtiget, wenn wir zugleich h in h′ vertauschen, dabei aber die Beschränkungen:

$$h' < h \text{ und } h' > g$$

festsetzen. Es bietet sonach die zuletzt aufgestellte Gleichung auch folgende dar:

$$\frac{dU_{g,h}}{dx_{h'}} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dX_{g,h}}{dx_{h'}} + \frac{dX_{g,h'}}{dx_h} - \frac{dX_{h',h}}{dx_g}\right), \qquad (J)$$

in welcher für h′ jeder der folgenden Zahlenwerthe:

$$g+1, \; g+2, \; g+3, \; \ldots \; h-2, \; h-1$$

gesetzt werden darf. Diese Gleichung (J) bietet also jeden der partiellen Differenzialquotienten:

$$\frac{dU_{g,h}}{dx_{g+1}}, \; \frac{dU_{g,h}}{dx_{g+2}}, \; \frac{dU_{g,h}}{dx_{g+3}}, \; \ldots \; \frac{dU_{g,h}}{dx_{h-2}}, \; \frac{dU_{g,h}}{dx_{h-1}},$$

als bekannte Function von $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ dar.

Uebergehend ferner zur Bestimmung des partiellen Differenzialquotienten:

$$\frac{dU_{g,h}}{dx_g},$$

legen wir folgende zwei Gleichungen zu Grunde:

$$\frac{dX_g}{dx_g} = X_{g,g}\,,\quad \frac{dX_g'}{dx_h} = U_{g,h}\,,$$

die wir aus der zweiten und dritten Zeile des Systems $(E_g)$ entlehnen. Differenzirt man nämlich die erste dieser Gleichungen nach $x_h$ und die zweite nach $x_g$ partiell; so bietet deren Unterschied die Gleichung:

$$\frac{dU_{g,h}}{dx_g} = \frac{dX_{g,g}}{dx_h}, \qquad (K)$$

als die verlangte Bestimmungsgleichung dar.

Es erübriget uns nunmehr bloß noch die Ausmittelung der partiellen Differenzialquotienten von $U_{g,h}$ nach den Variabeln:

$$x_{g-1}\,,\quad x_{g-2}\,,\quad x_{g-3}\,,\quad \ldots\quad x_3\,,\quad x_2\,,\quad x_1\,;$$

zu welchem Zwecke wir uns abermals den oben aufgestellten Gleichungen (1), und (2) und (3) zuwenden.

Subtrahirt man nämlich von der Gleichung (2) das Summenergebniß der Gleichungen (1) und (3); so erhält man die Gleichung:

$$\frac{dU_{h,k}}{dx_g} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dX_{h,k}}{dx_g} + \frac{dX_{g,h}}{dx_k} - \frac{dX_{g,k}}{dx_h}\right),$$

die gleichfalls für jene ganzen Werthe von g, h und k besteht, die den Bedingungen:

$$g < h < k \text{ und } k \leqq n$$

nachkommen. Nimmt man die Umsetzungen:

$$g \text{ in } g'\,,\quad h \text{ in } g\,,\quad k \text{ in } h$$

vor, so wird den eben angeführten Bedingungen entsprochen, wenn man:

$$g' < g < h \text{ und } h \leqq n$$

feststellt, wodurch die zuletzt aufgestellte Gleichung in folgende übergeht:

$$\frac{dU_{g,h}}{dx_{g'}} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dX_{g,h}}{dx_{g'}} + \frac{dX_{g',g}}{dx_h} - \frac{dX_{g',h}}{dx_g}\right), \qquad \text{(L)}$$

in der $g < h$, und $g'$ aller ganzen Zahlenwerthe:

$$1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4\,,\ \ldots\ (g-2)\,,\ (g-1)$$

fähig ist. Es bietet sonach diese Gleichung sämmtliche partiellen Differenzialquotienten:

$$\frac{dU_{g,h}}{dx_1}\,,\ \frac{dU_{g,h}}{dx_2}\,,\ \frac{dU_{g,h}}{dx_3}\,,\ \ldots\ \frac{dU_{g,h}}{dx_{g-2}}\,,\ \frac{dU_{g,h}}{dx_{g-1}}\,,$$

als bekannte Functionen von $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ dar.

362. In Folge der in vorangehender Nr. gewonnenen Gleichungen (L), (K), (J), (H) und (G) stellen sich die ersten partiellen Differenzialquotienten der unbekannten Function $U_{g,h}$ nach jeder der Variabeln $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ folgendermaßen dar:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dU_{g,h}}{dx_1} &= \tfrac{1}{2}\left\{\frac{dX_{g,h}}{dx_1} + \frac{dX_{1,g}}{dx_h} - \frac{dX_{1,h}}{dx_g}\right\}\\
\frac{dU_{g,h}}{dx_2} &= \tfrac{1}{2}\left\{\frac{dX_{g,h}}{dx_2} + \frac{dX_{2,g}}{dx_h} - \frac{dX_{2,h}}{dx_g}\right\},\\
\frac{dU_{g,h}}{dx_3} &= \tfrac{1}{2}\left\{\frac{dX_{g,h}}{dx_3} + \frac{dX_{3,g}}{dx_h} - \frac{dX_{3,h}}{dx_g}\right\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dU_{g,h}}{dx_{g-1}} &= \tfrac{1}{2}\left\{\frac{dX_{g,h}}{dx_{g-1}} + \frac{dX_{g-1,g}}{dx_h} - \frac{dX_{g-1,h}}{dx_g}\right\},
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(M)}$$

$$\frac{dU_{g,h}}{dx_g} = \frac{dX_{g,g}}{dx_h}\,, \qquad \text{(N)}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dU_{g,h}}{dx_{g+1}} &= \tfrac{1}{2}\left\{\frac{dX_{g,h}}{dx_{g+1}} + \frac{dX_{g,g+1}}{dx_h} - \frac{dX_{g+1,h}}{dx_g}\right\},\\
\frac{dU_{g,h}}{dx_{g+2}} &= \tfrac{1}{2}\left\{\frac{dX_{g,h}}{dx_{g+2}} + \frac{dX_{g,g+2}}{dx_h} - \frac{dX_{g+2,h}}{dx_g}\right\},\\
\frac{dU_{g,h}}{dx_{g+3}} &= \tfrac{1}{2}\left\{\frac{dX_{g,h}}{dx_{g+3}} + \frac{dX_{g,g+3}}{dx_h} - \frac{dX_{g+3,h}}{dx_g}\right\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dU_{g,h}}{dx_{h-1}} &= \tfrac{1}{2}\left\{\frac{dX_{g,h}}{dx_{h-1}} + \frac{dX_{g,h-1}}{dx_h} - \frac{dX_{h-1,h}}{dx_g}\right\},
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(O)}$$

$$\frac{dU_{g,h}}{dx_h} = \frac{dX_{g,h}}{dx_h} - \frac{dX_{h,h}}{dx_g}\,, \qquad \text{(P)}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dU_{g,h}}{dx_{h+1}} &= \tfrac{1}{2}\left\{\frac{dX_{g,h}}{dx_{h+1}} + \frac{dX_{g,h+1}}{dx_h} - \frac{dX_{h,h+1}}{dx_g}\right\},\\
\frac{dU_{g,h}}{dx_{h+2}} &= \tfrac{1}{2}\left\{\frac{dX_{g,h}}{dx_{h+2}} + \frac{dX_{g,h+2}}{dx_h} - \frac{dX_{h,h+2}}{dx_g}\right\},\\
\frac{dU_{g,h}}{dx_{h+3}} &= \tfrac{1}{2}\left\{\frac{dX_{g,h}}{dx_{h+3}} + \frac{dX_{g,h+3}}{dx_h} - \frac{dX_{h,h+3}}{dx_g}\right\},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dU_{g,h}}{dx_n} &= \tfrac{1}{2}\left\{\frac{dX_{g,h}}{dx_n} + \frac{dX_{g,h}}{dx_h} - \frac{dX_{h,n}}{dx_g}\right\},
\end{aligned}\right\} \quad (Q)$$

die für alle ganzen Zahlenwerthe:

$$\text{von } g = 1 \text{ bis } g = n-1 \text{ und von } h = 2 \text{ bis } h = n,$$

die der Ungleichheit:

$$g < h$$

entsprechen, Bestand haben.

Diese hier zusammengestellten Gleichungen bestätigen unsere Behauptung Ausgangs der Nr. 360, daß die n Systeme von Gleichungen $(E_1)$, $(E_2)$, $(E_3)$ . . . $(E_n)$ derselben Nr., nach Nr. 281 behandelt, zur Bestimmung sämmtlicher ersten partiellen Differenzialquotienten der Functionen in (F) hinreichen, auf's vollständigste; dannzumal namentlich, wenn man die eben festgestellten Bedeutungen und Beschränkungen der ganzen Zahlen g und h nicht außer Acht läßt, und jene Gleichungen der drei Systeme (M), (O), (Q) jedesmal unbeachtet läßt oder übergeht, die, bei den verschiedenen möglichen Verfügungen über g und h, auf partielle Differenzialquotienten von Functionen der Form $X_{r,s}$ führen, bei denen $r \geqq s$ sich herausstellt.

363. Nun fällt es nicht mehr schwer, sowohl die Bedingungsgleichungen der Integrabilität der in Nr. 358 vorgelegten Differenzialfunction zweiten Grades (A) abzuleiten, als auch, im Falle des Statthabens derselben, die unmittelbar vorhergehende Integralfunction selbst, die nur eine lineare Differenzialfunction derselben Variabeln, als die vorgelegte (A) sein kann, d. i., die Differenzialfunction (C) der folgenden Nr. 359 herzustellen.

Was den ersten Theil dieser Aussage betrifft, behandle man die n Gleichungen (M), (N), . . (Q) vorangehender Nr. nach Nr. 281; alsdann werden jene Bedingungsgleichungen unter den Functionen in (B) Nr. 358 hervorgehen, die einem bestimmten zusammengehö-

renden Werthenpaare von g und h angehören. Wenn in diesen Bedingungsgleichungen, deren Herstellung keiner theoretischen Schwierigkeit mehr unterliegt und deren Anzahl gleich $\frac{1}{2}$ n (n — 1) ist, für g und h jene Zahlenwerthe, deren dieselbe nach den Bestimmungen und Beschränkungen vorangehender Nr. fähig sind, eingesetzt werden, erhält man sämmtliche Bedingungsgleichungen, in Anzahl $\frac{1}{4}n^2(n-1)^2$, der Integrabilität von (A), unter denen aber auch einige oder mehrere Wiederholungen oder Folgerungen der übrigen sein können.

Obgleich wir gegenwärtig nicht in der Lage sind, die Anzahl jener Bedingungsgleichungen, die untereinander wesentlich verschieden sind, auf eine unzweideutige Weise festzustellen, und obschon wir, dieselben für den allgemeinen Fall n herzustellen, unterlassen; sind wir gleichwohl der Ansicht, das uns im vorliegenden Paragraphen gesteckte Ziel erreicht zu haben, indem wir die Mittel angegeben haben, jedesmal zur Kenntniß sämmtlicher Bedingungsgleichungen der Integrabilität zu gelangen. Denn das sicherste Kennzeichen, daß auf dem von uns vorgezeichneten Wege keine der Bedingungsgleichungen der Integrabilität der vorgelegten Differenzialfunction in (A) über- oder umgangen werden kann, ersehen wir aus dem Umstande, daß lediglich mit Zugrundelegung dieser Bedingungsgleichungen der zweite Theil unserer am Eingange gemachten Aussage, wie sofort geschehen soll, erhärtet werden kann.

Gehen wir in der That von der Annahme des Bestandhabens besagter Bedingungsgleichungen aus; dann finden sämmtliche Gleichungen (M), (N) . . (Q) zugleich Statt, und die folgende lineare Differenzialfunction:

$$\frac{dU_{g,h}}{dx_1}\,dx_1 + \frac{dU_{g,h}}{dx_2}\,dx_2 + \frac{dU_{g,h}}{dx_3}\,dx_3 + \ldots + \frac{dU_{g,h}}{dx_n}\,dx_n\,,$$

ist mit Hülfe dieser zuletzt erwähnten Gleichungen nunmehr integrabel, welche, nach Nr. 285 integrirt, für $U_{g,h}$ und sonach auch für sämmtliche in (F) zusammengestellten Hülfsfunctionen bekannte Functionen von $x_1$, $x_2$, $x_3$, . . . $x_n$ darbieten wird. Ferner drücken die Gleichungen (M), (N), . . (Q), die wir nunmehr als zugleich bestehend annehmen dürfen, die Bedingungen aus, damit sämmtliche in ($E_1$), ($E_2$) . . . ($E_n$) zusammengestellten Gleichungen zugleich Be-

stand haben; wenn daher mittelst dieser Gleichungen folgende lineare Differenzialfunctionen:

$$\frac{dX_1}{dx_1}dx_1 + \frac{dX_1}{dx_2}dx_2 + \frac{dX_1}{dx_3}dx_3 + \ldots + \frac{dX_1}{dx_n}dx_n,$$

$$\frac{dX_2}{dx_1}dx_1 + \frac{dX_2}{dx_2}dx_2 + \frac{dX_2}{dx_3}dx_3 + \ldots + \frac{dX_2}{dx_n}dx_n,$$

$$\frac{dX_3}{dx_1}dx_1 + \frac{dX_3}{dx_2}dx_2 + \frac{dX_3}{dx_3}dx_3 + \ldots + \frac{dX_3}{dx_n}dx_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dX_n}{dx_1}dx_1 + \frac{dX_n}{dx_2}dx_2 + \frac{dX_n}{dx_3}dx_3 + \ldots + \frac{dX_n}{dx_n}dx_n,$$

bestimmt werden, dann ist jede derselben gleichfalls integrabel. Werden nun diese n Integrationen abermals nach Nr. 285 vollzogen, dann hat man sämmtliche Functionen in (D), Nr. 359, durch bekannte Functionen von $x_1$, $x_2$, $x_3$, ... $x_n$ ausgedrückt, die, in die lineare Differenzialfunction (C) derselben Nr. gesetzt, diese, wie wir zu zeigen uns vorgesetzt, als die unmittelbar vorgehende Integralfunction der in (A) Nr. 358 vorgelegten Differenzialfunction zweiten Grades herausstellen.

Diese Integralfunction, oder die lineare Differenzialfunction in (C), wird außer den n willkührlichen Constanten, die von der Bestimmung der zuletzt erwähnten n Functionen in (D) herrühren, auch jene enthalten, die bei der Bestimmung der Functionen in (F) gewonnen worden sind, deren Anzahl $\frac{1}{2}n(n-1)$ ist. Es bietet sonach die unmittelbar vorhergehende Integralfunction einer Differenzialfunction zweiten Grades mit n Variabeln, falls eine solche existirt, in Gesammtheit eine Anzahl von $\frac{1}{2}n(n+1)$ willkührlichen Constanten dar.

Nach diesem Ergebnisse würde die Annahme $n=2$ drei willkührliche Constanten darbieten, die wir in Nr. 338, wo dieser Fall besonders behandelt ward, gleichfalls erkannt haben; eben so deutet die Annahme $n=3$ auf sechs willkührliche Constanten hin, auf die wir auch in Nr. 348, bei der besondern Behandlung dieses Falles, geführt worden sind.

364. Obgleich die besondern Fälle $n=2$, $n=3$ bereits erörtert worden sind, wollen wir dieselben dennoch, da wir auch den

besondern Fall $n = 4$ hier mitzutheilen beabsichtigen, noch einmal aus den bis jetzt gewonnenen allgemeinen Ergebnissen folgern; um dann alle diese besondern Fälle einer Differenzialfunction zweiten Grades, nach ein und demselben Principe behandelt, beisammen zu haben.

Um die Differenzialfunction zweiten Grades zweier Variabeln $x_1$ und $x_2$, wie folgt:

$$X_{1,1}\,dx_1^2 + X_{1,2}\,dx_1\,dx_2 + X_{2,2}\,dx_2^2\,, \qquad (1)$$

in Beziehung auf Integrabilität zu untersuchen, wenden wir uns zunächst den in Nr. 362 durch die Gleichungen (M) bis (Q) dargestellten allgemeinen Ergebnissen zu. Da man gegenwärtig $n = 2$ hat, so stellt sich die Annahme:

$$g = 1 \text{ und } h = 2\,,$$

als das einzige zusammengehörende Werthenpaar für g und h in besagten Gleichungen dar.

Wird das am Schlusse derselben citirten Nr., über den Gebrauch der allgemeinen Gleichungen daselbst, Mitgetheilte berücksichtiget, so überzeugt man sich sehr bald, daß gegenwärtig aus keinem der Systeme (M), (O) und (Q) eine Gleichung gezogen werden kann; sonach verbleiben bloß die zwei Gleichungen (N) und (P), die für den vorliegenden Fall in folgende übergehen:

$$\frac{dU_{1,2}}{dx_1} = \frac{dX_{1,1}}{dx_2}\,,\quad \frac{dU_{1,2}}{dx_2} = \frac{dX_{1,2}}{dx_2} - \frac{dX_{2,2}}{dx_1}\,. \qquad (2)$$

Differenzirt man die erste dieser Gleichungen partiell nach $x_2$, die zweite partiell nach $x_1$, und nimmt hierauf deren Unterschied; so ergiebt sich die einzig nothwendige Bedingungsgleichung:

$$\frac{d^2X_{1,1}}{dx_2^2} - \frac{d^2X_{1,2}}{dx_1 dx_2} + \frac{d^2X_{2,2}}{dx_1^2} = 0\,, \qquad (3)$$

die gleichbedeutend mit der Bedingungsgleichung (4) Nr. 337, bei deren Statthaben die Differenzialfunktion in (1) ein unmittelbar vorangehendes Integrale darbieten wird. Denn beim Statthaben dieser Bedingungsgleichung (3) ist die lineare Differenzialfunction:

$$\frac{dU_{1,2}}{dx_1}\,dx_1 + \frac{dU_{1,2}}{dx_2}\,dx_2\,,$$

die wegen der Gleichungen (2) in folgende übergeht:

$$\frac{dX_{1,1}}{dx_2}\,dx_1 + \left(\frac{dX_{1,2}}{dx_2} - \frac{dX_{2,2}}{dx_1}\right) dx_2\,, \qquad (4)$$

integrirbar, und das Ergebniß dieser Integration, das als Function von $x_1$, $x_2$ sammt einer willkührlichen Constante sich herausstellt, wird die Bestimmung von $U_{1,2}$ darbieten. Wird diese für $U_{1,2}$ gewonnene Bestimmung in folgende Gleichungen eingeführt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dX_1}{dx_1} &= X_{1,1}\,, & \frac{dX_1}{dx_2} &= U_{1,2}\,, \\ \frac{dX_2}{dx_1} &= X_{1,2} - U_{1,2}\,, & \frac{dX_2}{dx_2} &= X_{2,2}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

die aus den in Nr. 360 zusammengestellten Gleichungen für die Annahme $n = 2$ fließen, so finden solche zugleich Statt; folglich sind nunmehr auch die Differenzialfunctionen:

$$\frac{dX_1}{dx_1}\,dx_1 + \frac{dX_1}{dx_2}\,dx_2\,,$$
$$\frac{dX_2}{dx_1}\,dx_1 + \frac{dX_2}{dx_2}\,dx_2\,,$$

die vermöge der Gleichungen (5) in folgende übergehen:

$$\left.\begin{aligned} &X_{1,1}\,dx_1 + U_{1,2}\,dx_2\,, \\ &(X_{1,2} - U_{1,2})\,dx_1 + X_{2,2}\,dx_2\,, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

integrabel. Die denselben entsprechenden Integralfunctionen, deren jede eine neue willkührliche Constante mitführen wird, bieten dann respective die Bestimmungen von $X_1$ und $X_2$ dar, welche, in die Differenzialfunction:

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \qquad (7)$$

gesetzt, diese, die nunmehr drei willkührliche Constanten mitführen wird, als die nächstvorhergehende Integralfunction der vorgelegten Differenzialfunction (1) herausstellen.

365. Wenn $x_1$, $x_2$, $x_3$ drei variable Größen sind, so wird durch:

$$X_{1,1}\,dx_1^2 + X_{2,2}\,dx_2^2 + X_{3,3}\,dx_3^2$$
$$+ X_{1,2}\,dx_1\,dx_2 + X_{1,3}\,dx_1\,dx_3 + X_{2,3}\,dx_2\,dx_3\,, \qquad (1')$$

eine Differenzialfunction zweiten Grades dieser Variabeln vorgestellt, falls die Coefficienten der zweiten Dimensionen der Differenzialien, als Functionen bloß von $x_1$, $x_2$ und $x_3$ auftreten.

Da hier $n = 3$ ist, so finden folgende zusammengehörende Zahlenwerthe von g und h Statt:

$$g = 1 \text{ und } h = 2, \quad g = 1 \text{ und } h = 3, \quad g = 2 \text{ und } h = 3,$$

mit welchen drei Annahmen wir uns nach Ordnung ihrer Folge den allgemeinen Gleichungen (M) bis (Q) in Nr. 362 zuwenden.

Für das erste zusammengehörende Werthenpaar, $g=1$ und $h=2$, bietet, aus den eben citirten Gleichungen, das System (M) keine einzige dar; die Gleichung (N) daselbst giebt folgende:

$$\frac{dU_{1,2}}{dx_1} = \frac{dX_{1,1}}{dx_2}; \tag{2'}$$

das System der Gleichungen (O) bietet gleichfalls keine Gleichung dar; die Gleichung (P) hingegen giebt folgende:

$$\frac{dU_{1,2}}{dx_2} = \frac{dX_{1,2}}{dx_2} - \frac{dX_{2,2}}{dx_1}; \tag{3'}$$

das System der Gleichungen (Q) endlich, bietet die folgende einzige Gleichung dar:

$$\frac{dU_{1,2}}{dx_3} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dX_{1,2}}{dx_3} + \frac{dX_{1,3}}{dx_2} - \frac{dX_{2,3}}{dx_1}\right). \tag{4'}$$

Das zweite zusammengehörende Werthenpaar, $g=1$ und $h=3$, bietet weder aus dem Systeme (M) noch aus dem Systeme (Q) irgend welche Gleichung dar; hingegen bieten die Gleichung (N), das System der Gleichungen in (O) und die Gleichung (P) in der eben angeführten Ordnung folgende drei Gleichungen dar:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dU_{1,3}}{dx_1} &= \frac{dx_{1,1}}{dx_3} \\ \frac{dU_{1,3}}{dx_2} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{dX_{1,3}}{dx_2} + \frac{dX_{1,2}}{dx_3} - \frac{dX_{2,3}}{dx_1}\right), \\ \frac{dU_{1,3}}{dx_3} &= \frac{dX_{1,3}}{dx_3} - \frac{dX_{3,3}}{dx_1}. \end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

Mit dem dritten zusammengehörenden Werthenpaare endlich, mit dem $g = 2$ und $h = 3$, zieht man aus den Systemen (O) und (Q) keine Gleichung; das System (M) hingegen, dann die Gleichungen (N) und (P) bieten respective folgende drei Gleichungen dar:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dU_{2,3}}{dx_1} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{dX_{2,3}}{dx_1} + \frac{dX_{1,2}}{dx_3} - \frac{dX_{1,3}}{dx_2}\right),\\
\frac{dU_{2,3}}{dx_2} &= \frac{dX_{2,2}}{dx_3},\\
\frac{dU_{2,3}}{dx_3} &= \frac{dX_{2,3}}{dx_3} - \frac{dX_{3,3}}{dx_2}.
\end{aligned}\right\} \quad (6')$$

Werden nun die Gleichungen in (2′), (3′), (4′) nach Nr. 280 behandelt, eben so die drei Gleichungen in (5′), wie auch die in (6′) aufgestellten drei Gleichungen; so ergeben sich jedesmal drei, in Gesammtheit also neun Gleichungen, die, da solche nur die Coefficienten der vorgelegten Differenzialfunction enthalten, auch die Bedingungsgleichungen der Integrabilität derselben darstellen werden. Von diesen neun Bedingungsgleichungen sind jedoch bloß sechs, die wir hier folgen lassen, untereinander wesentlich verschieden, nämlich:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2X_{1,1}}{dx_2^2} - \frac{d^2X_{1,2}}{dx_1dx_2} + \frac{d^2X_{2,2}}{dx_1^2} &= 0,\\
\frac{d^2X_{3,3}}{dx_1^2} - \frac{d^2X_{1,3}}{dx_3dx_1} + \frac{d^2X_{1,1}}{dx_3^2} &= 0,\\
\frac{d^2X_{2,2}}{dx_3^2} - \frac{d^2X_{2,3}}{dx_2dx_3} + \frac{d^2X_{3,3}}{dx_2^2} &= 0,\\
\frac{d^2X_{1,2}}{dx_3dx_1} + \frac{d^2X_{1,3}}{dx_1dx_2} - \frac{d^2X_{2,3}}{dx_1^2} &= 2\frac{d^2X_{1,1}}{dx_2dx_3},\\
\frac{d^2X_{1,3}}{dx_2dx_3} + \frac{d^2X_{2,3}}{dx_3dx_1} - \frac{d^2X_{1,2}}{dx_3^2} &= 2\frac{d^2X_{3,3}}{dx_1dx_2},\\
\frac{d^2X_{2,3}}{dx_1dx_2} + \frac{d^2X_{1,2}}{dx_2dx_3} - \frac{d^2X_{1,3}}{dx_2^2} &= 2\frac{d^2X_{2,2}}{dx_3dx_1}.
\end{aligned}\right\} \quad (7')$$

Jede der drei zuletzt aufgestellten Gleichungen dieses Systems ist zweimal erhalten worden; so daß, wie in Nr. 348 bereits dargethan worden, nur diese sechs Bedingungsgleichungen zu realisiren sind, damit die vorgelegte Differenzialfunction in (1′) ein unmittelbar vorangehendes Integrale zulasse.

Beim Statthaben dieser sechs Bedingungsgleichungen in (7′) bieten die folgenden drei linearen Differenzialfunctionen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dU_{1,2}}{dx_1}dx_1 + \frac{dU_{1,2}}{dx_2}dx_2 + \frac{dU_{1,2}}{dx_3}dx_3,\\
\frac{dU_{1,3}}{dx_1}dx_1 + \frac{dU_{1,3}}{dx_2}dx_2 + \frac{dU_{1,3}}{dx_3}dx_3,\\
\frac{dU_{2,3}}{dx_1}dx_1 + \frac{dU_{2,3}}{dx_2}dx_2 + \frac{dU_{2,3}}{dx_3}dx_3,
\end{aligned}\right\} \quad (8')$$

da jede derselben, falls die Differenzialcoefficienten nach den Gleichungen (2′) bis (6′) ersetzt werden, integrabel ist, die drei Größen:

$$U_{1,2}\,,\quad U_{1,3}\,,\quad U_{2,3}\,,$$

als bekannte Functionen von $x_1$, $x_2$, $x_3$ dar, wo jede eine willkührliche Constante der Integration mitführen wird.

Ferner gehen die Gleichungen $(E_1)$, $(E_2)$ . . $(E_n)$ in Nr. 360 gegenwärtig in folgende über:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{dX_1}{dx_1} = X_{1,1}\,, & \frac{dX_1}{dx_2} = U_{1,2}\,, & \frac{dX_1}{dx_3} = U_{1,3}\,, \\ \frac{dX_2}{dx_1} = X_{1,2} - U_{1,2}\,, & \frac{dX_2}{dx_2} = X_{2,2}\,, & \frac{dX_2}{dx_3} = U_{2,3}\,, \\ \frac{dX_3}{dx_1} = X_{1,3} - U_{1,3}\,, & \frac{dX_3}{dx_2} = X_{2,3} - U_{2,3}\,, & \frac{dX_3}{dx_3} = X_{3,3}\,, \end{array}\right\} \quad (9')$$

wo vermöge des Vorausgeschickten die Ausdrücke zur Rechten der Gleichheitszeichen dieser Gleichungen, als bekannte Functionen von $x_1$, $x_2$, $x_3$ auftreten, welche, statt der Differenzialcoefficienten, in die Differenzialfunctionen:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dX_1}{dx_1}\,dx_1 + \frac{dX_1}{dx_2}\,dx_2 + \frac{dX_1}{dx_3}\,dx_3\,, \\ \frac{dX_2}{dx_1}\,dx_1 + \frac{dX_2}{dx_2}\,dx_2 + \frac{dX_2}{dx_3}\,dx_3\,, \\ \frac{dX_3}{dx_1}\,dx_1 + \frac{dX_3}{dx_2}\,dx_2 + \frac{dX_3}{dx_3}\,dx_3 \end{array}\right\} \quad (10')$$

gesetzt, diese in integrable lineare Differenzialfunctionen umsetzen. Integrirt man solche, so erhält man auch die Größen:

$$X_1\,,\quad X_2\,,\quad X_3\,,$$

als bekannte Functionen von $x_1$, $x_2$, $x_3$, die außer den oben erwähnten noch drei neue willkührliche Constanten mitführen. Setzt man endlich die Ergebnisse dieser Bestimmungen in folgende lineare Differenzialfunction:

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + X_3\,dx_3\,, \quad (11')$$

die nunmehr sechs willkührliche Constanten umfassen wird; dann stellt dieselbe das nächstvorausgehende Integrale der in (1′) vorgelegten Differenzialfunction zweiten Grades dar.

366. Stellen $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ vier variable Größen vor, so ist

eine Differenzialfunction zweiten Grades derselben folgender Form:

$$\begin{aligned} &X_{1,1}\,dx_1^2 + X_{2,2}\,dx_2^2 + X_{3,3}\,dx_3^2 + X_{4,4}\,dx_4^2 \\ &+ X_{1,2}\,dx_1\,dx_2 + X_{1,3}\,dx_1\,dx_3 + X_{1,4}\,dx_1\,dx_4 \\ &\qquad + X_{2,3}\,dx_2\,dx_3 + X_{2,4}\,dx_2\,dx_4 \\ &\qquad\qquad + X_{3,4}\,dx_3\,dx_4\,, \end{aligned} \qquad (1'')$$

die wir gleichfalls noch mittelst der allgemeinen Ergebnisse in Untersuchung ziehen wollen.

Da wir hier $n=4$ haben, so stellen sich vorerst folgende zusammengehörende Werthe für g und h heraus:

$$\begin{aligned} &g=1 \text{ und } h=2\,, \quad g=1 \text{ und } h=3\,, \quad g=1 \text{ und } h=4\,, \\ &\qquad\qquad g=2 \text{ und } h=3\,, \quad g=2 \text{ und } h=4\,, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad g=3 \text{ und } h=4\,, \end{aligned}$$

so daß jedes dieser Werthenpaare dieselbe Anzahl von Gleichungen, nämlich 4, aus den Systemen (M) bis (Q) gezogen, hervorruft, die wir hier folgen lassen.

Für das erste zusammengehörende Werthenpaar, für $g=1$ und $h=2$, bietet weder das System (M) noch das System (O) irgend welche Bestimmung dar; die Gleichungen (N) und (P) hingegen bieten jede eine, und das System der Gleichungen in (Q) zwei Bestimmungen dar, welche in der eben bezeichneten Ordnung aufeinander folgen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dU_{1,2}}{dx_1} &= \frac{dX_{1,1}}{dx_2}\,, \\ \frac{dU_{1,2}}{dx_2} &= \frac{dX_{1,2}}{dx_2} - \frac{dX_{2,2}}{dx_1}\,, \\ \frac{dU_{1,2}}{dx_3} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{dX_{1,2}}{dx_3} + \frac{dX_{1,3}}{dx_2} - \frac{dX_{2,3}}{dx_1}\right), \\ \frac{dU_{1,2}}{dx_4} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{dX_{1,2}}{dx_4} + \frac{dX_{1,4}}{dx_2} - \frac{dX_{2,4}}{dx_1}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (2'')$$

Bei dem zweiten zusammengehörenden Werthenpaare, bei $g=1$ und $h=3$, bietet bloß das System (M) keinerlei Bestimmung dar; die Gleichung (N) aber giebt eine, desgleichen erhält man eine Bestimmung aus dem Systeme (O), eine aus der Gleichung (P) und eine endlich aus dem Systeme (Q). Diese vier Bestimmungen sind der Reihe nach folgende:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dU_{1,3}}{dx_1} &= \frac{dX_{1,1}}{dx_3}, \\
\frac{dU_{1,3}}{dx_2} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{dX_{1,3}}{dx_2} + \frac{dX_{1,2}}{dx_3} - \frac{dX_{2,3}}{dx_1}\right), \\
\frac{dU_{1,3}}{dx_3} &= \frac{dX_{1,3}}{dx_3} - \frac{dX_{3,3}}{dx_1}, \\
\frac{dU_{1,3}}{dx_4} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{dX_{1,3}}{dx_4} + \frac{dX_{1,4}}{dx_3} - \frac{dX_{3,4}}{dx_1}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (3'')$$

Das dritte zusammengehörende Werthenpaar, $g=1$ und $h=4$, bietet folgende vier Bestimmungen dar:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dU_{1,4}}{dx_1} &= \frac{dX_{1,1}}{dx_4}, \\
\frac{dU_{1,4}}{dx_2} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{dX_{1,4}}{dx_2} + \frac{dX_{1,2}}{dx_4} - \frac{dX_{2,4}}{dx_1}\right), \\
\frac{dU_{1,4}}{dx_3} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{dX_{1,4}}{dx_3} + \frac{dX_{1,3}}{dx_4} - \frac{dX_{3,4}}{dx_1}\right), \\
\frac{dU_{1,4}}{dx_4} &= \frac{dX_{1,4}}{dx_4} - \frac{dX_{4,4}}{dx_1}.
\end{aligned}\right\} \quad (4'')$$

Das vierte zusammengehörende Werthenpaar, $g=2$ und $h=3$ ruft folgende vier Bestimmungen hervor:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dU_{2,3}}{dx_1} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{dX_{2,3}}{dx_1} + \frac{dX_{1,2}}{dx_3} - \frac{dX_{1,3}}{dx_2}\right), \\
\frac{dU_{2,3}}{dx_2} &= \frac{dX_{2,2}}{dx_3}, \\
\frac{dU_{2,3}}{dx_3} &= \frac{dX_{2,3}}{dx_3} - \frac{dX_{3,3}}{dx_2}, \\
\frac{dU_{2,3}}{dx_4} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{dX_{2,3}}{dx_4} + \frac{dX_{2,4}}{dx_3} - \frac{dX_{3,4}}{dx_2}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (5'')$$

Das fünfte zusammengehörende Werthenpaar, $g=2$ und $h=4$, giebt folgende vier Bestimmungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dU_{2,4}}{dx_1} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{dX_{2,4}}{dx_1} + \frac{dX_{1,2}}{dx_4} - \frac{dX_{1,4}}{dx_2}\right), \\
\frac{dU_{2,4}}{dx_2} &= \frac{dX_{2,2}}{dx_4}, \\
\frac{dU_{2,4}}{dx_3} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{dX_{2,4}}{dx_3} + \frac{dX_{2,3}}{dx_4} - \frac{dX_{3,4}}{dx_2}\right), \\
\frac{dU_{2,4}}{dx_4} &= \frac{dX_{2,4}}{dx_4} - \frac{dX_{4,4}}{dx_2}.
\end{aligned}\right\} \quad (6'')$$

Endlich giebt das sechste zusammengehörende Werthenpaar, das $g=3$ und $h=4$, folgende vier Bestimmungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dU_{3,4}}{dx_1} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{dX_{3,4}}{dx_1} + \frac{dX_{1,3}}{dx_4} - \frac{dX_{1,4}}{dx_3}\right),\\
\frac{dU_{3,4}}{dx_2} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{dX_{3,4}}{dx_2} + \frac{dX_{2,3}}{dx_4} - \frac{dX_{2,4}}{dx_3}\right),\\
\frac{dU_{3,4}}{dx_3} &= \frac{dX_{3,3}}{dx_4},\\
\frac{dU_{3,4}}{dx_4} &= \frac{dX_{3,4}}{dx_4} - \frac{dX_{4,4}}{dx_3}.
\end{aligned}\right\} \qquad (7'')$$

Jedes dieser sechs Systeme von je vier Gleichungen bietet, nach Nr. 281 behandelt, ein System von sechs Gleichungen dar; alle zusammen werden demnach auf 36 Gleichungen hinführen, welche die Bedingungsgleichungen der Integrabilität der vorgelegten Differenzialfunktion (1″) abgeben. Von diesen 36 Gleichungen sind bloß sechs einzig oder ohne alle Wiederholung erhalten worden, zwölf derselben einer Art kommen doppelt und drei einer andren Art gleichfalls doppelt vor, endlich stellt sich von drei zuletzt genannten Gleichungen eine als Folge der beiden andern heraus; so daß in Gesammtheit bloß zwanzig wesentlich verschiedene Bedingungsgleichungen sich ergeben. Bevor wir jedoch zur Mittheilung dieser wesentlich verschiedenen Bedingungsgleichungen übergehen, theilen wir zuerst in Kürze das Verfahren mit, die Integralfunction von (1′), welche, wenn dieselbe nämlich existirt, nur eine lineare Differenzialfunction sein kann, herzustellen.

Zuerst wird man durch Aufstellung von linearen Differenzialfunctionen ähnlich denen in (8′) vorangehender Nr., die beim Eintreffen der eben erwähnten Bedingungsgleichungen sämmtlich integrabel sein werden, mittelst Integration derselben die Größen:

$$U_{1,2},\quad U_{1,3},\quad U_{1,4},\quad U_{2,3},\quad U_{2,4},\quad U_{3,4},$$

durch bekannte Functionen von $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ ausdrücken, wo jede dieser Functionen eine willkührliche Constante einführen wird. Hierauf wird man aus den allgemeinen Gleichungen in Nr. 360 die folgenden ziehen:

$$\left.\begin{array}{llll} \frac{dX_1}{dx_1}=X_{1,1}, & \frac{dX_1}{dx_2}=U_{1,2}, & \frac{dX_1}{dx_3}=U_{1,3}, & \frac{dX_1}{dx_4}=U_{1,4}, \\ \frac{dX_2}{dx_1}=X_{1,2}-U_{1,2}, & \frac{dX_2}{dx_2}=X_{2,2}, & \frac{dX_2}{dx_3}=U_{2,3}, & \frac{dX_2}{dx_4}=U_{2,4}, \\ \frac{dX_3}{dx_1}=X_{1,3}-U_{1,3}, & \frac{dX_3}{dx_2}=X_{2,3}-U_{2,3}, & \frac{dX_3}{dx_3}=X_{3,3}, & \frac{dX_3}{dx_4}=U_{3,4}, \\ \frac{dX_4}{dx_1}=X_{1,4}-U_{1,4}, & \frac{dX_4}{dx_2}=X_{2,4}-U_{2,4}, & \frac{dX_4}{dx_3}=X_{3,4}-U_{3,4}, & \frac{dX_4}{dx_4}=X_{4,4}, \end{array}\right\} \quad (8'')$$

in denen nunmehr die Ausdrücke zur Rechten bekannte Functionen von $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ und der sechs eingeführten willkührlichen Constanten sein werden, welche, in die linearen Differenzialfunctionen:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dX_1}{dx_1}dx_1+\frac{dX_1}{dx_2}dx_2+\frac{dX_1}{dx_3}dx_3+\frac{dX_1}{dx_4}dx_4, \\ \frac{dX_2}{dx_1}dx_1+\frac{dX_2}{dx_2}dx_2+\frac{dX_2}{dx_3}dx_3+\frac{dX_2}{dx_4}dx_4, \\ \frac{dX_3}{dx_1}dx_1+\frac{dX_3}{dx_2}dx_2+\frac{dX_3}{dx_3}dx_3+\frac{dX_3}{dx_4}dx_4, \\ \frac{dX_4}{dx_1}dx_1+\frac{dX_4}{dx_2}dx_2+\frac{dX_4}{dx_3}dx_3+\frac{dX_4}{dx_4}dx_4, \end{array}\right\} \quad (9'')$$

gesetzt, jede derselben als vollständige oder integrable Differenzialfunction herausstellen; werden auch diese Integrationen, deren jede gleichfalls noch eine willkührliche Constante einführen wird, vollzogen: so erhält man nach der Ordnung die Größen:

$$X_1, \quad X_2, \quad X_3, \quad X_4,,$$

als bekannte Functionen der Variabeln $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ sammt 10 willkührlichen Constanten bestimmt, welche in die lineare Differenzialfunction:

$$X_1\,dx_1+X_2\,dx_2+X_3\,dx_3+X_4\,dx_4 \quad (10'')$$

gesetzt, diese als die unmittelbar vorhergehende Integralfunction der vorgelegten Differenzialfunction (1″) herausstellen.

Die vorhin erwähnten Bedingungsgleichungen haben wir, wie folgt, gefunden.

Ohne Wiederholung, d. h. jede nur einmal, sind die sechs folgenden erhalten worden:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2X_{1,1}}{dx_2^2} - \frac{d^2X_{1,2}}{dx_1dx_2} + \frac{d^2X_{2,2}}{dx_1^2} &= 0,\\
\frac{d^2X_{1,1}}{dx_3^2} - \frac{d^2X_{1,3}}{dx_1dx_3} + \frac{d^2X_{3,3}}{dx_1^2} &= 0,\\
\frac{d^2X_{1,1}}{dx_4^2} - \frac{d^2X_{1,4}}{dx_1dx_4} + \frac{d^2X_{4,4}}{dx_1^2} &= 0,\\
\frac{d^2X_{2,2}}{dx_3^2} - \frac{d^2X_{2,3}}{dx_2dx_3} + \frac{d^2X_{3,3}}{dx_2^2} &= 0,\\
\frac{d^2X_{2,2}}{dx_4^2} - \frac{d^2X_{2,4}}{dx_2dx_4} + \frac{d^2X_{4,4}}{dx_2^2} &= 0,\\
\frac{d^2X_{3,3}}{dx_4^2} - \frac{d^2X_{3,4}}{dx_3dx_4} + \frac{d^2X_{4,4}}{dx_3^2} &= 0;
\end{aligned}\right\} \quad (11'')$$

von den zwölf folgenden haben wir jede zweimal gefunden:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2X_{1,2}}{dx_1dx_3} + \frac{d^2X_{1,3}}{dx_1dx_2} - \frac{d^2X_{2,3}}{dx_1^2} &= 2\,\frac{d^2X_{1,1}}{dx_2dx_3},\\
\frac{d^2X_{1,2}}{dx_1dx_4} + \frac{d^2X_{1,4}}{dx_1dx_2} - \frac{d^2X_{2,4}}{dx_1^2} &= 2\,\frac{d^2X_{1,1}}{dx_2dx_4},\\
\frac{d^2X_{1,3}}{dx_1dx_4} + \frac{d^2X_{1,4}}{dx_1dx_3} - \frac{d^2X_{3,4}}{dx_1^2} &= 2\,\frac{d^2X_{1,1}}{dx_3dx_4},
\end{aligned}\right\} \quad (12'')$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2X_{1,2}}{dx_2dx_3} + \frac{d^2X_{2,3}}{dx_1dx_2} - \frac{d^2X_{1,3}}{dx_2^2} &= 2\,\frac{d^2X_{2,2}}{dx_1dx_3},\\
\frac{d^2X_{1,2}}{dx_2dx_4} + \frac{d^2X_{2,4}}{dx_1dx_2} - \frac{d^2X_{1,4}}{dx_2^2} &= 2\,\frac{d^2X_{2,2}}{dx_1dx_4},\\
\frac{d^2X_{2,3}}{dx_2dx_4} + \frac{d^2X_{2,4}}{dx_2dx_3} - \frac{d^2X_{3,4}}{dx_2^2} &= 2\,\frac{d^2X_{2,2}}{dx_3dx_4},
\end{aligned}\right\} \quad (13'')$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2X_{1,3}}{dx_2dx_3} + \frac{d^2X_{2,3}}{dx_1dx_3} - \frac{d^2X_{1,2}}{dx_3^2} &= 2\,\frac{d^2X_{3,3}}{dx_1dx_2},\\
\frac{d^2X_{1,3}}{dx_3dx_4} + \frac{d^2X_{3,4}}{dx_1dx_3} - \frac{d^2X_{1,4}}{dx_3^2} &= 2\,\frac{d^2X_{3,3}}{dx_1dx_4},\\
\frac{d^2X_{2,3}}{dx_3dx_4} + \frac{d^2X_{3,4}}{dx_2dx_3} - \frac{d^2X_{2,4}}{dx_3^2} &= 2\,\frac{d^2X_{3,3}}{dx_2dx_4},
\end{aligned}\right\} \quad (14'')$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2X_{1,4}}{dx_3dx_4} + \frac{d^2X_{2,4}}{dx_1dx_4} - \frac{d^2X_{1,3}}{dx_4^2} &= 2\,\frac{d^2X_{4,4}}{dx_1dx_2},\\
\frac{d^2X_{1,4}}{dx_3dx_4} + \frac{d^2X_{3,4}}{dx_1dx_4} - \frac{d^2X_{1,3}}{dx_4^2} &= 2\,\frac{d^2X_{4,4}}{dx_1dx_3},\\
\frac{d^2X_{2,4}}{dx_3dx_4} + \frac{d^2X_{3,4}}{dx_2dx_4} - \frac{d^2X_{2,3}}{dx_4^2} &= 2\,\frac{d^2X_{4,4}}{dx_2dx_3};
\end{aligned}\right\} \quad (15'')$$

endlich haben wir auch die drei folgenden jede zweimal erhalten:

$$\frac{d^2X_{1,3}}{dx_2dx_4} - \frac{d^2X_{1,4}}{dx_2dx_3} - \frac{d^2X_{2,3}}{dx_1dx_4} + \frac{d^2X_{2,4}}{dx_1dx_3} = 0\,, \qquad (16'')$$

$$\frac{d^2X_{1,2}}{dx_3dx_4} - \frac{d^2X_{1,4}}{dx_2dx_3} - \frac{d^2X_{2,3}}{dx_1dx_4} + \frac{d^2X_{3,4}}{dx_1dx_2} = 0\,, \qquad (17'')$$

$$\frac{d^2X_{1,2}}{dx_3dx_4} - \frac{d^2X_{1,3}}{dx_2dx_4} - \frac{d^2X_{2,4}}{dx_1dx_3} + \frac{d^2X_{3,4}}{dx_1dx_2} = 0\,. \qquad (18'')$$

Von den zuletzt angegebenen drei Bedingungsgleichungen erkennt man aber sehr bald, daß jede derselben eine Folge der beiden andern ist; daher hat man auch, wie wir oben ausgesagt haben, bloß zwanzig wesentlich verschiedene Bedingungsgleichungen, von deren Realisirung das Vorhandensein einer unmittelbar vorhergehenden Integralfunction zur vorgelegten Differenzialfunction abhängt.

367. Daß beim Statthaben der in vorangehender Nr. untereinander wesentlich verschieden erklärten zwanzig Bedingungsgleichungen die Integration der Differenzialfunction (1″) daselbst vollständig durchgeführt werden kann, leuchtet ohneweiters aus der Deduction dieser Bedingungsgleichungen ein; daß aber dieselben auch in der That untereinander wesentlich verschieden sind, in der Weise, daß die Anzahl zwanzig derselben, die absolut kleinste, und daß folglich keine derselben eine Folge der übrigen sei: dieses dürfte nicht so leicht fallen, darzuthun. Nach einer zu diesem Zwecke mit den Gleichungen (11″) bis (18″) vorangehender Nr. sorgfältig angestellten Prüfung ist uns bloß Folgendes denselben abzusehen und zu begründen gelungen.

Die Ausdrücke zur Linken der Gleichheitszeichen in den Gleichungen (16″), (17″) und (18″) stehen, unter der Annahme des Bestandhabens der zwölf Bedingungsgleichungen (12″) bis (15″), in keinerlei Abhängigkeit von den vier in Rede stehenden Variabeln $x_1$, $x_2$, $x_3$ und $x_4$, und sind sonach constante Größen.

Differenzirt man, zur Begründung dieser Behauptung, die erste der Gleichungen (12″) partiell nach $x_4$ und die zweite desselben Systems nach $x_3$; so bietet deren Unterschied die Gleichung:

$$\frac{dU}{dx_1} = 0$$

dar, wo der Kürze wegen U den Ausdruck zur Linken in Gleichung (16″) vorstellt, d. h. wenn man folgende Gleichung feststellt:

$$U = \frac{d^2X_{1,3}}{dx_2dx_4} - \frac{d^2X_{1,4}}{dx_2dx_3} - \frac{d^2X_{2,3}}{dx_1dx_4} + \frac{d^2X_{2,4}}{dx_1dx_3}.$$

Behandelt man in derselben Weise die beiden erstern der Gleichungen (13″); so erhält man:

$$\frac{dU}{dx_2} = 0.$$

Differenzirt man ferner die zweite unter den Gleichungen (14″) partiell nach $x_2$, dann die dritte desselben Systems nach $x_1$; so bietet deren Unterschied folgende Gleichung dar:

$$\frac{dU}{dx_3} = 0.$$

Wenn endlich in derselben Weise die zweite und dritte der Gleichungen (15″) behandelt wird; so ergiebt sich auch:

$$\frac{dU}{dx_4} = 0.$$

Aus diesen vier Gleichungen, die die partiellen Differenzialquotienten von U nach den Variabeln $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ als Nullwerthe herausstellen, sind wir zur Folgerung, U sei eine von diesen vier Variabeln unabhängige Größe, berechtiget; wodurch, und vermöge der Bedeutung von U, der Theil unserer obigen Aussage gerechtfertiget erscheint, der auf die Gleichung (16″) Bezug hat. Mit Zuziehung eines Theiles derselben Gleichungen (12″) und (15″) beweist man auch, und zwar in ganz ähnlicher Weise, die Richtigkeit unserer obigen Aussage betreffend die Gleichung (17″); und mit einer andern Abtheilung derselben Gleichungen wird solches in Bezug auf die Gleichung (18″) dargethan.

In Folge der zwölf Bedingungsgleichungen (12″) bis (15″) sind wir sonach zur Aufstellung folgender drei Gleichungen berechtiget:

$$\frac{d^2X_{1,3}}{dx_2dx_4} - \frac{d^2X_{1,4}}{dx_2dx_3} - \frac{d^2X_{2,3}}{dx_1dx_4} + \frac{d^2X_{2,4}}{dx_1dx_3} = A,$$

$$\frac{d^2X_{1,2}}{dx_3dx_4} - \frac{d^2X_{1,4}}{dx_2dx_3} - \frac{d^2X_{2,3}}{dx_1dx_4} + \frac{d^2X_{3,4}}{dx_1dx_2} = B,$$

$$\frac{d^2X_{1,2}}{dx_3dx_4} - \frac{d^2X_{1,3}}{dx_2dx_4} - \frac{d^2X_{2,4}}{dx_1dx_3} + \frac{d^2X_{3,4}}{dx_1dx_2} = C,$$

wo A, B, C constante Größen sind, die folgender Gleichung genügen:

$$A + C = B .$$

Wären wir überdieß noch, und zwar nur mit Zuziehung der 18 Bedingungsgleichungen (11″) bis (15″), darzuthun in der Lage, es stellen diese drei Constanten A, B, C Nullwerthe vor; dann wären die drei Bedingungsgleichungen (16″), (17″) und (18″) nur Folgerungen der 18 zuerst erwähnten, daher wäre alsdann auch die Anzahl der untereinander wesentlich verschiedenen Bedingungsgleichungen, statt zwanzig, nur achtzehn. Da wir aber solches nicht vermögen; so sehen wir uns, vor der Hand wenigstens, darauf angewiesen, bei der Zahl zwanzig, als der Minimumzahl dieser Bedingungsgleichungen der Integrabilität, zu verharren.

368. Die in den vorangeschickten vier Nrn., aus den allgemeinen Ergebnissen gefolgerten drei Fälle bieten genügende und jede nur wünschbare Belehrung über den richtigen Gebrauch derselben bei andern Verfügungen über die allgemeine Zahl n dar. Wir schließen daher diesen Gegenstand mit Beifügung der Bemerkung, daß man nicht einmal gebunden sei, jedesmal die Bedingungsgleichungen zuerst abzuleiten, um solche zu verificiren; sondern unmittelbar aus den in Nr. 362 aufgestellten allgemeinen Gleichungen läßt sich schon hierüber genügender Aufschluß ziehen, wie wir solches an folgendem besondern Falle zeigen werden.

Es sei also die folgende Differenzialfunction zweiten Grades mit den vier Variabeln $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ zur Untersuchung in Beziehung auf Integrabilität vorgelegt:

$$3\,x_1 x_2 x_4^2\,dx_4^2 + 2\,x_2 x_4\,dx_1\,dx_2 + x_4^2\,dx_1\,dx_3 + (x_2^2 + x_2 x_4^3)\,dx_1\,dx_4 + 2\,x_3 x_4\,dx_2\,dx_3 + (x_3^2 + x_1 x_4^3)\,dx_2\,dx_4 + 2\,x_1 x_4\,dx_3 dx_4 ;$$

da hier $n=4$ ist, so haben wir diesen vorgelegten besondern Fall mit dem allgemeinen in Nr. 358 unter derselben Verfügung über n zu vergleichen. Bei Anstellung dieser Vergleichung ergiebt sich:

$$X_{1,1} = 0 , \quad X_{2,2} = 0 , \quad X_{3,3} = 0 , \quad X_{4,4} = 3\,x_1 x_2 x_4^2 ,$$
$$X_{1,2} = 2\,x_2 x_4 , \quad X_{1,3} = x_4^2 , \quad X_{1,4} = x_2^2 + x_2 x_4^3 ,$$
$$X_{2,3} = 2\,x_3 x_4 , \quad X_{2,4} = x_3^2 + x_1 x_4^3 ,$$
$$X_{3,4} = 2\,x_1 x_4 ;$$

daher gehen die allgemeinen Gleichungen (M) bis (Q) Nr. 362, oder die aus diesen für die Annahme $n=4$ in Nr. 366 gefolgerten, in folgende über:

$$\frac{dU_{1,2}}{dx_1} = 0\,,\quad \frac{dU_{1,2}}{dx_2} = 2x_4\,,\quad \frac{dU_{1,2}}{dx_3} = 0\,,\quad \frac{dU_{1,2}}{dx_4} = 2x_2\,,$$

$$\frac{dU_{1,3}}{dx_1} = 0\,,\quad \frac{dU_{1,3}}{dx_2} = 0\,,\quad \frac{dU_{1,3}}{dx_3} = 0\,,\quad \frac{dU_{1,3}}{dx_4} = 0\,,$$

$$\frac{dU_{1,4}}{dx_1} = 0\,,\quad \frac{dU_{1,4}}{dx_2} = 2x_2\,,\quad \frac{dU_{1,4}}{dx_3} = 0\,,\quad \frac{dU_{1,4}}{dx_4} = 0\,,$$

$$\frac{dU_{2,3}}{dx_1} = 0\,,\quad \frac{dU_{2,3}}{dx_2} = 0\,,\quad \frac{dU_{2,3}}{dx_3} = 2x_4,\ \frac{dU_{2,3}}{dx_4} = 2x_3\,,$$

$$\frac{dU_{2,4}}{dx_1} = 0\,,\quad \frac{dU_{2,4}}{dx_2} = 0\,,\quad \frac{dU_{2,4}}{dx_3} = 2x_3,\ \frac{dU_{2,4}}{dx_4} = 0\,,$$

$$\frac{dU_{3,4}}{dx_1} = 2x_4,\ \frac{dU_{3,4}}{dx_2} = 0\,,\quad \frac{dU_{3,4}}{dx_3} = 0\,,\quad \frac{dU_{3,4}}{dx_4} = 2x_1\,.$$

Hat man einmal diese Gleichungen gewonnen, welche, wenn zur Integration einer vorgelegten Differenzialfunction geschritten werden soll, jedesmal herzustellen sind, dann fällt es auch nicht schwer unmittelbar aus denselben abzunehmen, d. h. ohne Zuziehung der allgemeinen Bedingungsgleichungen der Integrabilität, ob je vier zusammengehörende derselben, die wir hier auf einer Zeile zusammengestellt haben, auch zugleich bestehen können. Die erste eines solchen Systems zusammengehörender Gleichungen hat, nach $x_2$ partiell differenzirt, dasselbe darzubieten, als die zweite desselben Systems nach $x_1$ partiell differenzirt; eben so soll die erste nach $x_3$ der dritten nach $x_1$ partiell differenzirt gleich werden u. s. w. Da nun im vorgelegten Falle alle diese Gleichheiten sehr bald, als bestehend erkannt werden; so gehen wir ohne weiters zur Bestimmung von $U_{1,2}$, $U_{1,3}$, $U_{1,4}$, ... über, welche, nach Nr. 284 vorgenommen, folgendermaßen erhalten worden sind:

$$U_{1,2} = a + 2x_2x_4\,,\quad U_{1,3} = b\,,\quad U_{1,4} = c + x_2^2\,,$$
$$U_{2,3} = e + 2x_3x_4\,,\quad U_{2,4} = f + x_3^2\,,$$
$$U_{3,4} = g + 2x_1x_4\,,$$

wo a, b, c, e, f, g die sechs willkührlichen Constanten der gleichen Anzahl von Integrationen sind.

Werden diese Ergebnisse in die Gleichungen (8″) Nr. 366 gesetzt, dann diese in die Differenzialfunctionen (9″) derselben Nr., wodurch solche in folgende übergehen:

$$(a + 2x_2x_4)\,dx_2 + b\,dx_3 + (c + x_2^2)\,dx_4,$$
$$-a\,dx_1 + (e + 2x_3x_4)\,dx_3 + (f + x_3^2)\,dx_4,$$
$$(x_4^2 - b)\,dx_1 - e\,dx_2 + (g + 2x_1x_4)\,dx_4,$$
$$(x_2x_4^3 - c)\,dx_1 + (x_1x_4^3 - f)\,dx_2 - g\,dx_3 + 3x_1x_2x_4^2\,dx_4;$$

so zieht man, da jede dieser Differenzialfunctionen den Bedingungen der Integrabilität entspricht, durch Integration einer jeden, nach der Ordnung ihrer Folge, die Bestimmungen von $X_1$, $X_2$, $X_3$, $X_4$, welche wir hier folgen lassen:

$$X_1 = h + ax_2 + bx_3 + cx_4 + x_2^2x_4,$$
$$X_2 = k - ax_1 + ex_3 + fx_4 + x_3^2x_4,$$
$$X_3 = l - bx_1 - ex_2 + gx_4 + x_4^2x_1,$$
$$X_4 = m - cx_1 - fx_2 - gx_3 + x_1x_2x_4^3,$$

wo h, k, l, m die vier willkührlichen Constanten dieser vier Integrationen sind.

Setzt man endlich diese Ergebnisse in die lineare Differenzialfunction:

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + X_3\,dx_3 + X_4\,dx_4,$$

so stellt solche die unmittelbar vorangehende Integralfunction der vorgelegten Differenzialfunction zweiten Grades vor.

Ganz in ähnlicher Weise ist zu verfahren, wenn eine Differenzialfunction zweiten Grades mit fünf, sechs oder noch mehr Variabeln zur Untersuchung in Bezug auf Integrabilität vorliegt. Aus den allgemeinen Gleichungen in Nr. 362 werden dann die der Annahme $n=5$, $n=6$, $n=7$ u. s. f. entsprechenden Gleichungen gebildet, und mit Uebergehung der Aufstellung der Bedingungsgleichungen untersucht man lediglich diese, unmittelbar aus der eben citirten Nr. gewonnenen Ergebnisse, wie wir solches im vorausgeschickten besondern Fall gethan: je nachdem diese Gleichungen, als zugleich bestehend erkannt werden oder nicht, schreitet man auch zur Integration oder erklärt solche für unausführbar; letzteres jedoch nur insofern, als unter den Variabeln keinerlei gegenseitige Abhängigkeit eingeführt wird.

## §. IV.

## Mehrgliedrige Differenzialfunction mehrerer Variabeln jedweden Grades und beliebiger Ordnung.

**369.** Die Untersuchungen der drei vorausgeschickten Paragraphen erstrecken sich bloß über Differenzialfunctionen, die die Differenzialien der Variabeln, nicht aber über solche, die auch höhere Differenzialien, nämlich, Differenzialien von Differenzialien umfassen. Da wir im vorliegenden Paragraphen Differenzialfunctionen dieser Art in den Kreis unserer Betrachtungen ziehen werden, so haben wir dieselben weniger nach der Verschiedenheit der Grade der Differenzialien, wie solches bis jetzt geschehen, als vielmehr nach der Verschiedenheit der Höhe der Differenzialien von Differenzialien, wodurch die Ordnung derselben bedingt wird, abzutheilen und durch gemäße Benennungen zu unterscheiden. Eine Differenzialfunction wird sonach der ersten Ordnung sein und auch so benennt werden, wenn dieselben keine höhern, als erste Differenzialien der verschiedenen Variabeln umfaßt; dieselbe wird ferner zur zweiten Ordnung gezählt und auch so benennt werden, falls solche keine höhern, als zweite Differenzialien der Variabeln enthält. Allgemein wird eine Differenzialfunction zur nten Ordnung gezählt und auch so benennt werden, wenn dieselbe keine höheren denn nte Differenzialien der Variabeln darbietet.

Was nun die Frage über Integrabilität einer Differenzialfunction zweiter oder höherer Ordnung betrifft, wird, wie in den vorausgeschickten Paragraphen, bloß die unmittelbar vorausgehende Integralfunction derselben, durch deren Differenziation erstere erzeugt werden konnte, Gegenstand unserer Betrachtungen sein. Dabei werden wir aber, gleichfalls wie in dem Vorausgeschickten, nicht unterlassen die Wege anzugeben, diese unmittelbar vorhergehende Integralfunction selbst, wenn solche nämlich zu den Möglichkeiten gehört, herzustellen; welches, wie der Verfolg lehren wird, jedesmal auf die Integration einer integrabeln linearen Differenzialfunction mehrerer Variabeln hinausläuft.

Mit Berücksichtigung der Ergebnisse in den Nrn. 252 und 253 der Differenzialrechnung und mit Zuziehung des Umstandes, daß

eine Differenzialfunction nur dann eine analytische Deutung gestattet, wenn dieselbe eine unendlich kleinwerdende Größe repräsentirt; mit Berücksichtigung dieser beiden Momente geht eine Differenzialfunction mehrerer Variabeln irgend welchen Grades und jedweder Ordnung, wenn sämmtliche Variabeln derselben durch Functionen einer einzigen Variabeln t ersetzt werden, deren Differenziale dt aber constant gedacht bleibt, in einen Differenzialausdruck folgender Form über:

$$\varphi(t)\, dt^k , \qquad (a)$$

wo $\varphi(t)$ irgend eine Function von t, und k irgend eine positive Zahl vorstellt. Allerdings wäre es mit der Eigenthümlichkeit einer Differenzialfunction, immer eine unendlich kleinwerdende Größe zu repräsentiren, noch vereinbar, oder in keinerlei Widerspruch mit dieser Eigenthümlichkeit wäre es, den Coefficienten von $dt^k$ in dem so eben aufgestellten Ergebnisse (a) folgendermaßen anzunehmen:

$$\varphi(t) + T\, dt^{\alpha} ,$$

wo $\varphi(t)$ die vorige Bedeutung hat, $\alpha$ eine positive Zahl ist und T eine von t und dt abhängige Größe vorstellt, die, wenn t den Charakter einer allgemeinen Größe beibehält, nicht ins Unendliche zunimmt. Bedenkt man aber, daß wegen des unendlichen Abnehmens von dt dieser letztere Ausdruck auf $\varphi(t)$ sich reducirt; so stellt sich die obige Aussage, bezüglich den Ausdruck in (a), von der eben gemachten Entgegnung befreiet und folglich, als in der Natur einer Differenzialfunction begründet dar. — Die positive Zahl k in (a) nun, die von dem Grade und der Ordnung der vorgelegt gedachten Differenzialfunction jedesmal bedingt wird, werden wir Klassenzahl derselben nennen. Dieser knüpfen wir noch die folgenden einleitenden Bemerkungen an.

Vergegenwärtiget man sich die Operation des Differenzirens, so kann eine zur Klassenzahl k gehörende Differenzialfunction unmittelbares Ergebniß der Differenziation nur von einer zur $(k-1)$ten Klasse gehörenden Differenzialfunction sein. Dieses zugegeben, fassen wir der Einfachheit wegen in der vorgelegt gedachten, zur Klassenzahl k gehörenden Differenzialfunction nur eine der Variabeln, etwa x, ins Auge und nehmen an, daß solche noch das mte Differenziale dieser Variable enthält, oder, daß besagte Differenzialfunction

in Bezug auf dieſe Variable x zur mten Ordnung gehört; ſo wird, beachtend den Urſprung von k, entweder $m = k$ oder $m < k$ ſein.

Im erſtern Falle, bei der Annahme $m = k$, wird die unmittelbar vorausgehende Integralfunction der vorgelegt gedachten Differenzialfunction, falls ſolche nämlich zu den Möglichkeiten gehört, in Bezug auf dieſelbe Variable x, da ſolche zur $(k-1)$ten Klaſſe gehören muß, auch zur $(m-1)$ten Ordnung gehören.

Im letztern Falle, unter der Annahme $m < k$ hingegen, kann über die Ordnungszahl in der unmittelbar vorangehörenden Integralfunction, nach derſelben Variabeln x, in gedoppelter Weiſe feſtgeſtellt werden. Erſtens iſt die Annahme gegenwärtig gedenkbar, daß, trotz der Verringerung der Klaſſenzahl um eine Einheit, gleichwohl die Ordnungszahl unverändert, d. h. gleich m verbleibt; ſo daß die vorgelegte Differenzialfunction, wie deren unmittelbar vorangehendes Integrale das mte Differenziale von x zugleich enthalten, daß ſolches aber nothwendig als conſtante oder als eine von x independente Größe auftritt. Dieſe Annahme ſchließen wir nun von den Betrachtungen des vorliegenden Paragraphen aus. Die zweite Annahme aber, mit der wir uns ausſchließlich im vorliegenden Paragraphen befaſſen werden, iſt jene, wo in dem unmittelbar vorausgehenden Integrale nicht allein die Klaſſenzahl k, ſondern auch die Ordnungszahl m um eine Einheit geringer als in der vorgelegten Differenzialfunction feſtgeſtellt wird. Dieſe Annahme, die nicht allein über die eine Variable x, ſondern über ſämmtliche in der vorgelegten Differenzialfunction enthaltenen Variabeln ſich erſtrecken ſoll, und die in völliger Uebereinſtimmung mit dem oben „im erſten Falle", bei $m = k$, gewonnenen Ergebniſſe ſteht, legen wir unſern folgenden Unterſuchungen zu Grunde, die wir nach dem von Condorcet angebahnten Wege leiten werden.

370. Wir beginnen die Unterſuchungen über Integrabilität einer Differenzialfunction der mten Ordnung mit dem einfachſten Falle, wenn dieſelbe nur eine Variable, etwa x, enthält; wobei uns, gleichwie im Verfolge dieſes Paragraphen, wo wir ſolche Differenzialfunctionen mit zweien und mehrern Variabeln in Betracht ziehen werden, nach dem Ausgangs der vorangehenden Nr. getroffenen

Uebereinkommen, von der Beschaffenheit der Klassenzahl k, ob nämlich dieselbe gleich oder größer als m ist, abzusehen gestattet ist.

Wenn V irgend eine Differenzialfunction der mten Ordnung einer Variabeln x vorstellt; so enthält solche nothwendig das mte Differenziale von x und allgemein kann angenommen werden, daß dieselbe als Function von:

$$x\,,\quad dx\,,\quad d^2x\,,\quad d^3x\,,\quad \ldots\ d^mx$$

auftreten wird. Die unmittelbar vorausgehende Integralfunction zu V, falls nämlich solche zu den Möglichkeiten gehört, wird nach dem Uebereinkommen in vorangehender Nr. eine Differenzialfunction der $(m-1)$ten Ordnung sein; daher wird solche nothwendig das $(m-1)$te Differenziale von x enthalten und allgemein, als Function von:

$$x\,,\quad dx\,,\quad d^2x\,,\quad d^3x\,,\quad \ldots\ d^{m-1}x\,,$$

anzunehmen sein. Wird nun letztere durch V′ repräsentirt, und werden zur Vereinfachung der Darstellung folgende Gleichungen festgestellt:

$$x_1 = dx\,,\quad x_2 = d^2x\,,\quad x_3 = d^3x\,,\quad \ldots\ x_m = d^mx\,,$$

oder die folgenden mit diesen gleichbedeutenden Gleichungen:

$$x_1 = dx\,,\quad x_2 = dx_1\,,\quad x_3 = dx_2\,,\quad \ldots\ x_m = dx_{m-1}\,; \qquad (1)$$

so stellt V′ eine Function von:

$$x\,,\quad x_1\,,\quad x_2\,,\quad x_3\,,\quad \ldots\ x_{m-1}$$

vor, die nach allen diesen Größen differenzirt, mit Zuziehung der eben eingeführten Gleichungen (1), die vorgelegt gedachte Differenzialfunction V hervorruft, welche letztere nunmehr, d. h. mit Zuziehung der Gleichungen (1), als Function von:

$$x\,,\quad x_1\,,\quad x_2\,,\quad x_3\,,\quad \ldots\ x_m$$

auftreten wird.

Stellen wir nun das totale Differenziale von V′ durch die Gleichung:

$$d.V' = X\,dx + X^{(1)}\,dx_1 + X^{(2)}\,dx_2 + \ldots + X^{(m-1)}\,dx_{m-1} \qquad (2)$$

dar, wo die Differenzialcoefficienten:

$$X\,,\quad X^{(1)}\,,\quad X^{(2)}\,,\quad X^{(3)}\,,\quad \ldots\ X^{(m-1)}\,, \qquad (\alpha)$$

gleich wie V', als Functionen von:

$$x\,,\; x_1\,,\; x_2\,,\; x_3\,,\; \ldots\ldots\; x_{m-1}$$

auftreten; so drückt, beachtend die Gleichungen in (1), folgende Gleichheit:

$$V = Xx_1 + X^{(1)}x_2 + X^{(2)}x_3 + X^{(3)}x_4 + \ldots\ldots + X^{(m-1)}x_m\,, \quad (3)$$

in analytischer Sprache obige Aussage, V sei Ergebniß der Differenziation von V', aus, wenn die in ($\alpha$) zusammengestellten Functionen folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{dX^{(1)}}{dx}=\dfrac{dX}{dx_1},\dfrac{dX^{(2)}}{dx}=\dfrac{dX}{dx_2},\dfrac{dX^{(3)}}{dx}=\dfrac{dX}{dx_3},\ldots\dfrac{dX^{(m-1)}}{dx}=\dfrac{dX}{dx_{m-1}},\\[2ex]
\qquad\qquad\dfrac{dX^{(2)}}{dx_1}=\dfrac{dX^{(1)}}{dx_2},\dfrac{dX^{(3)}}{dx_1}=\dfrac{dX^{(1)}}{dx_3},\ldots\dfrac{dX^{(m-1)}}{dx_1}=\dfrac{dX^{(1)}}{dx_{m-1}},\\[2ex]
\qquad\qquad\qquad\qquad\dfrac{dX^{(3)}}{dx_2}=\dfrac{dX^{(2)}}{dx_3},\ldots\dfrac{dX^{(m-1)}}{dx_2}=\dfrac{dX^{(2)}}{dx_{m-1}},\\[2ex]
\qquad\qquad\qquad\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\[2ex]
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\dfrac{dX^{(m-1)}}{dx_{m-2}}=\dfrac{dX^{(m-2)}}{dx_{m-1}},
\end{array}\right\}(4)$$

identisch realisiren, oder dieselben in Gleichheiten umsetzen.

Diesem zufolge haben wir uns nunmehr noch mit der Bestimmung der Functionen in ($\alpha$) zu befassen, daß dieselben den eben aufgestellten Gleichungen (3) und (4) identisch entsprechen. Denn werden die so gewonnenen Bestimmungen der Functionen in ($\alpha$) in den Ausdruck zur Rechten der Gleichung (2) eingeführt, so stellt sich derselbe, vermöge des Eintreffens der Gleichungen in (4), als vollständiges Differenziale der von einander unabhängig gedachten Variabeln:

$$x\,,\; x_1\,,\; x_2\,,\; x_3\,,\; \ldots\ldots\; x_{m-1}$$

heraus; wird solcher nun nach Nr. 285 integrirt, dann hat man auch V' als Function derselben Variabeln bestimmt; und da man endlich aus der Verbindung der Gleichungen (1), (2) und (3) die Gleichung:

$$V = d.V'$$

hat: so stellt dann V' die unmittelbar vorausgehende Integralfunction von V dar, deren Erlangung das uns im vorliegenden Paragraphen gesteckte Endziel ist.

371. Die Bestimmnng der Functionen in ($\alpha$) in der Ausgangs vorangehender Nr. beschriebenen Weise zu erzielen, gehen wir, wie bis jetzt schon öfters geschah, von der Annahme des identischen Statthabens der Gleichungen (3) und (4) derselben Nr. aus, und legen uns namentlich die Gleichung (3) zur weitern Analyse vor.

Differenzirt man diese Gleichung (3) partiell nach $x$, so erhält man unmittelbar die folgende:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dX}{dx} x_1 + \frac{dX^{(1)}}{dx} x_2 + \frac{dX^{(2)}}{dx} x_3 + \ldots + \frac{dX^{(m-1)}}{dx} x_m ;$$

berücksichtiget man nun die als bestehend vorausgesetzten Gleichungen (4), namentlich die auf der ersten Zeile daselbst befindlichen, so geht diese eben aufgestellte Gleichung in folgende über:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dX}{dx} x_1 + \frac{dX}{dx_1} x_2 + \frac{dX}{dx_2} x_3 + \ldots + \frac{dX}{dx_{m-1}} x_m ,$$

aus der, beachtend die Bedeutung von $x_1, x_2, x_3, \ldots$ nach den Gleichungen in (1), folgende gezogen wird:

$$\frac{dV}{dx} = d.X .$$

Wird ferner dieselbe Gleichung (3) partiell nach $x_1$ differenzirt, so ergiebt sich zunächst folgende:

$$\frac{dV}{dx_1} = X + \frac{dX}{dx_1} x_1 + \frac{dX^{(1)}}{dx_1} x_2 + \frac{dX^{(2)}}{dx_1} x_3 + \ldots + \frac{dX^{(m-1)}}{dx_1} x_m ;$$

zieht man von den Gleichungen (4) die erste auf der ersten Zeile und sämmtliche auf der zweiten Zeile befindlichen zu Hülfe, dann ist diese Gleichung mit folgender gleichbedeutend:

$$\frac{dV}{dx_1} = X + \frac{dX^{(1)}}{dx} x_1 + \frac{dX^{(1)}}{dx_1} x_2 + \frac{dX^{(1)}}{dx_2} x_3 + \ldots + \frac{dX^{(1)}}{dx_{m-1}} x_m ,$$

die, vermöge derselben Gleichungen in (1), in folgende übergeht:

$$\frac{dV}{dx_1} = X + d.X^{(1)} .$$

Durch ein abermaliges partielles Differenziren der Gleichung (3) nach $x_2$ erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{dV}{dx_2} = X^{(1)} + \frac{dX}{dx_2} x_1 + \frac{dX^{(1)}}{dx_2} x_2 + \frac{dX^{(2)}}{dx_2} x_3 + \ldots + \frac{dX^{(m-1)}}{dx_2} x_m ;$$

werden auch hier von den Gleichungen (4) die zweite auf der ersten Zeile, die erste auf der zweiten Zeile und sämmtliche auf der dritten Zeile befindlichen zugezogen, dann hat man:

$$\frac{dV}{dx_2} = X^{(1)} + \frac{dX^{(2)}}{dx} x_1 + \frac{dX^{(2)}}{dx_1} x_2 + \frac{dX^{(2)}}{dx_2} x_3 + \ldots + \frac{dX^{(2)}}{dx_{m-1}} x_m ,$$

welche vermöge der zur Vereinfachung festgestellten Gleichungen (1) in folgende übergeht:

$$\frac{dV}{dx_2} = X^{(1)} + d.X^{(2)} .$$

Fährt man in dieser Weise fort, die Gleichung in (3) successive nach $x_3, x_4, \ldots x_{m-1}$ partiell zu differenziren; so gelangt man in derselben Ordnung, mit beständiger Zuziehung je einer Abtheilung von den in (4) zusammengestellten und als bestehend vorausgesetzten, wie der zur Vereinfachung festgestellten Gleichungen in (1), auf folgende Gleichungen:

$$\frac{dV}{dx_3} = X^{(2)} + d.X^{(3)}, \quad \frac{dV}{dx_4} = X^{(3)} + d.X^{(4)}, \quad \frac{dV}{dx_5} = X^{(4)} + d.X^{(5)}, \ldots$$

$$\ldots \quad \frac{dV}{dx_{m-1}} = X^{(m-2)} + d.X^{(m-1)} .$$

Wird endlich die Gleichung (3) partiell nach $x_m$ differenzirt und berücksichtiget man den Umstand, daß die Integralfunction $V'$ und folglich auch die in ($\alpha$) zusammengestellten Functionen sämmtlich von $x_m$ unabhängig sind; so erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{dV}{dx_m} = X^{(m-1)} .$$

Werden alle diese durch partielles Differenziren der Gleichung (3) nach den Größen $x, x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$ und mit Zuziehung sämmtlicher Gleichungen in (4) gewonnenen Ergebnisse, in entgegengesetzter Anordnung ihrer Erzeugung, zusammengestellt; so ergiebt sich in Folge der Annahme des identischen Bestehens der Gleichungen (3) und (4) vorangehender Nr. folgendes System von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
X^{(m-1)} &= \frac{dV}{dx_m}, \\
X^{(m-2)} + d.X^{(m-1)} &= \frac{dV}{dx_{m-1}}, \\
X^{(m-3)} + d.X^{(m-2)} &= \frac{dV}{dx_{m-2}}, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
X^{(1)} + d.X^{(2)} &= \frac{dV}{dx_2}, \\
X + d.X^{(1)} &= \frac{dV}{dx_1}, \\
dX &= \frac{dV}{dx}.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

372. Mittelst der zusammengestellten Gleichungen in (5) sind wir nunmehr in der Lage die Functionen in ($\alpha$) durch partielle Differenzialquotienten der am Eingange der Nr. 370. vorgelegten Differenzialfunction V auszudrücken, wie auch die Bedingung der Integrabilität dieser Differenzialfunction V festzustellen, welche Bedingung, wie der Verfolg zeigen wird, in eine Gleichung zusammengefaßt werden kann.

Wird die erste der Gleichungen (5) nach sämmtlichen in derselben vorkommenden Größen:

$$x, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots \quad x_{m-1} \quad .$$

differenzirt, welche Operation in folgender Gleichung:

$$d.X^{(m-1)} = d.\frac{dV}{dx_m}$$

angedeutet sein soll; so erhält man durch Subtraktion dieser von der zweiten der Gleichungen in (5) folgende Bestimmungsgleichung für $X^{(m-2)}$:

$$X^{(m-2)} = \frac{dV}{dx_{m-1}} - d.\frac{dV}{dx_m}.$$

Wird diese Gleichung in gleicher Weise, d. h., nach allen in derselben vorkommenden Größen differenzirt, und dann das bloß angezeigte Ergebniß von der dritten in (5) zusammengestellten Gleichungen subtrahirt; so erhält man $X^{(m-3)}$ durch folgende Gleichung bestimmt:

$$X^{(m-3)} = \frac{dV}{dx_{m-2}} - d \cdot \frac{dV}{dx_{m-1}} + d^2 \cdot \frac{dV}{dx_m} .$$

Wird auch in dieser Gleichung nach allen in derselben vorkommenden Größen die Differenziationsoperation angedeutet, und wird dann dieselbe von der vierten der Gleichungen in (5) subtrahirt; so stellt sich für $X^{(m-4)}$ folgende Bestimmungsgleichung heraus:

$$X^{(m-4)} = \frac{dV}{dx_{m-3}} - d \cdot \frac{dV}{dx_{m-2}} + d^2 \cdot \frac{dV}{dx_{m-1}} - d^3 \cdot \frac{dV}{dx_m} .$$

Fährt man in dieser Weise fort, dem jedesmal gewonnenen Ergebnisse die Differenziationsoperation nach allen Größen $x$, $x_1$, $x_2$, .. $x_{m-1}$ vorzusetzen, und nachher dasselbe von der entsprechenden unter den Gleichungen in (5) abzuziehen; so gelangt man auch auf folgende allgemeine Bestimmungsgleichung:

$$X^{(m-r)} = \frac{dV}{dx_{m-r+1}} - d \cdot \frac{dV}{dx_{m-r+2}} + d^2 \cdot \frac{dV}{dx_{m-r+3}} - \ldots (-1)^{r-1} d^{r-1} \cdot \frac{dV}{dx_m} ,$$

die für alle ganzen Werthe von $r = 2$ angefangen bis und mit $r = m - 1$ ein Statt hat, und für alle diese besondern Werthe von $r$ leicht zu deuten ist.

Setzt man nun in dieser allgemeinen Gleichung $r = m - 1$, so geht solche über in:

$$X^{(1)} = \frac{dV}{dx_2} - d \cdot \frac{dV}{dx_3} + d^2 \cdot \frac{dV}{dx_4} - \ldots (-1)^{m-2} d^{m-2} \cdot \frac{dV}{dx_m} ;$$

wird von dieser Gleichung das totale Differenziale genommen, und das angezeigte Ergebniß von der vorletzten unter den Gleichungen in (5) subtrahirt, so erhält man:

$$X = \frac{dV}{dx_1} - d \cdot \frac{dV}{dx_2} + d^2 \cdot \frac{dV}{dx_3} - \ldots (-1)^{m-1} d^{m-1} \cdot \frac{dV}{dx_m} ,$$

welche Gleichung auch aus der allgemeinen, bei der Annahme $r = m$ hervorgeht, wenn man $X$ statt $X^{(0)}$ setzt. Wird endlich auch diese zuletzt aufgestellte Gleichung differenzirt, und das angezeigte Ergebniß der totalen Differenziation derselben von der letzten unter den Gleichungen in (5) subtrahirt; so stellt sich folgende, von den Functionen in ($\alpha$) durchaus unabhängige Gleichung heraus:

$$0 = \frac{dV}{dx} - d \cdot \frac{dV}{dx_1} + d^2 \cdot \frac{dV}{dx_2} - d^3 \cdot \frac{dV}{dx_3} + \ldots (-1)^m d^m \cdot \frac{dV}{dx_m} ,$$

die eine Bedingungsgleichung der Integrabilität vorstellt, und wie der Verfolg lehren wird, es einzig und allein ist, damit die vorgelegte Differenzialfunction V unmittelbares Ergebniß einer Differenziation sei.

Alle in vorliegender Nr. erhaltenen Gleichungen, die Bedingungsgleichung mitbegriffen, in umgekehrter Ordnungsfolge ihrer Ableitung zusammengestellt, und am Schlusse noch die erste der Gleichungen in (5) beigesetzt, ergiebt sich folgendes System von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= \frac{dV}{dx} - d\cdot\frac{dV}{dx_1} + d^2\cdot\frac{dV}{dx_2} - \ldots (-1)^m\ d^m\cdot\frac{dV}{dx_m},\\
X &= \frac{dV}{dx_1} - d\cdot\frac{dV}{dx_2} + d^2\cdot\frac{dV}{dx_3} - \ldots (-1)^{m-1} d^{m-1}\cdot\frac{dV}{dx_m},\\
X^{(1)} &= \frac{dV}{dx_2} - d\cdot\frac{dV}{dx_3} + d^2\cdot\frac{dV}{dx_4} - \ldots (-1)^{m-2} d^{m-2}\cdot\frac{dV}{dx_m},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
X^{(m-3)} &= \frac{dV}{dx_{m-2}} - d\cdot\frac{dV}{dx_{m-1}} + d^2\cdot\frac{dV}{dx_m},\\
X^{(m-2)} &= \frac{dV}{dx_{m-1}} - d\cdot\frac{dV}{dx_m},\\
X^{(m-1)} &= \frac{dV}{dx_m},
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

als unmittelbare Folge der Gleichungen (5) vorangehender Nr., welche letztere eine Folge der Annahme des identischen Bestehens der Gleichungen (3) und (4) der Nr. 370. sind.

Diese Gleichungen (6), die erste derselben ausgenommen, drücken die Functionen in ($\alpha$) durch partielle Differenzialquotienten der vorgelegten Differenzialfunction V, wie durch totale Differenzialien der letztern aus; sonach erscheinen besagte Functionen in ($\alpha$), wie wir uns am Eingange der Nr. 371 vorgesetzt, durch bekannte Functionen von $x, x_1, x_2, \ldots x_{m-1}$ gegeben. Die erste dieser Gleichungen in (6) aber, die gleichfalls partielle und totale Differenziationsoperationen, und zwar nur von der zur Untersuchung in Bezug auf Integrabilität vorgelegten Differenzialfunction V enthält, stellt offenbar eine Bedingungsgleichung der Integrabilität dieser Differenzialfunction vor. Nun wird es keiner besondern Erhärtung bedürfen, besagte Differenzialfunction V, im Falle des Nichteintreffens dieser

Bedingungsgleichung, als keiner unmittelbar vorhergehenden Integralfunction fähig zu erklären. Die umgekehrte Folgerung hievon aber, daß beim Statthaben dieser, und zwar einzig und allein dieser Bedingungsgleichung, daß dann auch nothwendig die Differenzialfunction mter Ordnung V Ergebniß der Differenziation einer Differenzialfunction $(m-1)$ten Ordnung, die wir durch $V'$ vorgestellt haben, sei; diese umgekehrte Folgerung nun, wie auch die Behauptung, daß dannzumal auch die Bestimmungen von $X$, $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, . . . oder der Functionen in $(\alpha)$, aus den Gleichungen (6) gezogen und in die Gleichung (2) gesetzt, den Ausdruck zur Rechten derselben als vollständiges Differenziale von $x$, $x_1$, $x_2$, . . $x_{m-1}$ herausstellen: diese Behauptung also und jene umgekehrte Folgerung bedürfen allerdings noch einer besondern Nachweisung, mit der wir uns in den nächstfolgenden vier Nrn. ausschließlich befassen werden.

373. Auf die Gleichungen (6) vorangehender Nr. sind wir von der Annahme ausgehend geführt worden, die Gleichungen (3) und (4) in Nr. 370 bestehen als Gleichheiten; welche Annahme jene, die Differenzialfunction der mten Ordnung V sei unmittelbares Ergebniß der Differenziation einer Differenzialfunction der $(m-1)$ten Ordnung $V'$, in sich schließt. Um nun das uns am Schlusse der vorangehenden Nr. gesteckte Ziel zu erreichen, haben wir genau das Umgekehrte des eben Mitgetheilten darzuthun, nämlich, wir haben, ausgehend von der Annahme des Bestandhabens der Gleichungen in (6), unter denen sonach die erste nur eine Gleichheit abgeben kann, die Gleichungen in (3) und (4) als Folgerungen dieser Annahme zu begründen. Denn ist dieser inverse Satz festgestellt, dann ersetzen die Gleichungen (6) die Gleichungen (3) und (4), bei deren Zugrundelegung, wie vorhin bemerkt wurde, die Differenzialfunction V ein Ergebniß der Differenziation von $V'$ ist.

Bei der Begründung dieses inversen Satzes werden wir zuerst, und zwar noch in vorliegender Nr., aus den Gleichungen (6) die Gleichungen in (5) folgern; aus diesen werden wir dann in den darauf folgenden Nrn. die verlangten Gleichungen in (3) und (4) herstellen, wobei wir, was offenbar gestattet, ja sogar unerläßlich ist, die zur Vereinfachung der Darstellung festgestellten Gleichungen in (1) mit benutzen werden.

Wir begründen die Gleichungen (5) als Folgen der Gleichungen in (6), wie folgt.

Die erste der Gleichungen in (5) ist mit der letzten der Gleichungen in (6) sogar der Form nach einerlei. Die zweite der Gleichungen in (5) wird gewonnen, wenn die letzte der in (6) total differenzirt und das angezeigte Ergebniß zur vorletzten desselben Systems addirt wird. Eben so wird die dritte aus dem Systeme der Gleichungen in (5) aus dem in (6) gewonnen, wenn man in diesem die vorletzte total differenzirt, und das angezeigte Ergebniß zur zweitvorletzten desselben Systems addirt. Allgemein wird die kte der Gleichungen in (5) aus der (k—1)ten und kten, von unten nach oben gezählt, aus dem Systeme der Gleichungen (6) gewonnen, wenn man letztere zum totalen Differenziale der erstern der zuletzt genannten zwei Gleichungen addirt. Differenzirt man endlich die mte der Gleichungen (von unten nach oben gezählt) in (6) total und berücksichtiget die Bedingungsgleichung, oder addirt man das angezeigte Ergebniß der eben angedeuteten Differenziation zur (m+1)ten, die eine Bedingungsgleichung ist; so stellt sich die letzte aus dem Systeme der Gleichungen in (5) heraus.

Es ersetzen sonach die Gleichungen (6) in aller und jeder Beziehung die Gleichungen in (5); so daß wenn aus diesen die Gleichungen (3) und (4) zu folgern sind, dasselbe auch von jenen ausgesagt werden kann.

374. Dem eben Mitgetheilten zufolge haben wir uns nunmehr den Gleichungen in (5) zuzuwenden; aus welchen wir zuerst die Gleichung (3), als den leichtern Theil des uns gesetzten Zieles, ziehen werden.

Multiplicirt man nämlich diese Gleichungen (5) in der Ordnung ihrer Aufeinanderfolge mit:

$$dx_m\ ,\ dx_{m-1}\ ,\ dx_{m-2}\ ,\ .\ .\ .\ .\ dx_2\ ,\ dx_1\ ,\ dx\ ,$$

so erhält man nach vollzogener Summation derselben, jedoch mit Zuziehung der zur Vereinfachung der Darstellung festgestellten Gleichungen in (1), folgendes Ergebniß:

$$\left.\begin{array}{l} X^{(m-1)}dx_m + X^{(m-2)}dx_{m-1} + X^{(m-3)}dx_{m-2} + .. + X^{(1)}dx_2 + X\,dx_1 \\ + x_m\,dX^{(m-1)} + x_{m-1}\,dX^{(m-2)} + x_{m-2}\,dX^{(m-3)} + .. + x_2\,dX^{(1)} + x_1\,dX \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{dV}{dx_m} dx_m + \frac{dV}{dx_{m-1}} dx_{m-1} + \frac{dV}{dx_{m-2}} dx_{m-2} .. + \frac{dV}{dx_2} dx_2 + \frac{dV}{dx_1} dx_1 + \frac{dV}{dx} dx ;$$

je zwei der untereinanderstehenden Glieder im Ausdrucke linkerhand vom Gleichheitszeichen, bieten ein vollständiges Differenziale eines Produktes zweier Größen dar, daher kann besagtes Ergebniß auch folgendermaßen gestellt werden:

$$d.\left(X^{(m-1)} x_m\right) + d.\left(X^{(m-2)} x_{m-1}\right) + d.\left(X^{(m-3)} x_{m-2}\right) + .. + d.\left(X^{(1)} x_2\right) + d.\left(X x_1\right) =$$

$$= \frac{dV}{dx_m} dx_m + \frac{dV}{dx_{m-1}} dx_{m-1} + \frac{dV}{dx_{m-2}} dx_{m-2} .. + \frac{dV}{dx_2} dx_2 + \frac{dV}{dx_1} dx_1 + \frac{dV}{dx} dx ;$$

der Ausdruck zur Linken vom Gleichheitszeichen dieser Gleichung ist augenfällig ein vollständiges Differenziale, der zur Rechten stellt, da V als Function von $x, x_1, x_2, \ldots x_m$ vorausgesetzt ist, das vollständige Differenziale von V vor: daher fließt aus dieser Gleichung durch Integration beider Theile derselben die folgende;

$$V = A + Xx_1 + X^{(1)} x_2 + X^{(2)} x_3 + X^{(3)} x_4 \ldots + X^{(m-1)} x_m ,$$

wo A eine von $x, x_1, x_2, \ldots x_m$ unabhängige Größe, oder die Constante der Integration ist. Nun stellt V, als Repräsentant einer Differenzialfunction, nothwendig eine unendlich kleinwerdende Größe vor; eben so sind die Größen $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$, als Differenzialien der Größen $x, x_1, x_2, \ldots x_{m-1}$, gleichfalls unendlich kleinwerdende Größen; und da, wie vorhin festgestellt worden, A von den letzt genannten Größen unabhängig sein muß: so erübriget uns zum Bestehen der letztern Gleichung nur noch die Annahme:

$$A = 0,$$

welche Annahme auf die Gleichung:

$$V = Xx_1 + X^{(1)} x_2 + X^{(2)} x_3 + X^{(3)} x_4 + \ldots + X^{(m-1)} x_m$$

führt, die identisch mit der Gleichung in (3) und, wie wir so eben gesehen haben, als Folge der Annahme des Bestandhabens der Gleichungen in (5) erhalten worden ist.

375. Die Ableitung der Gleichungen (4) aus denen in (5) wird namhaft erleichtert und vereinfacht, wenn zuerst Einiges über partielles Differenziren totaler, jedoch nur angedeuteter Differenzialien von Functionen mitgetheilt wird. Denn schon bei einer ganz flüchtigen Betrachtung der Gleichungen in (5), namentlich der Ausdrücke

zur Linken der Gleichheitszeichen derselben, entnimmt man, daß, um aus denselben die Gleichungen in (4) abzuleiten, die angezeigten Differenzialien, wie:

$$d.X\ ,\ d.X^{(1)},\ d.X^{(2)}\ ,\ \ldots$$

partiell nach den verschiedenen Größen $x$, $x_1$, $x_2$, ... zu differenziren sind. Diese partiellen Differenziationen nun werden sehr leicht vollzogen und die Ergebnisse derselben stellen sich sehr einfach heraus, wenn wir zuerst die am Schlusse vorliegender Nr. aufgestellten Gleichungen (A) begründet haben werden. — Aus dem Grunde aber, daß besagte Gleichungen in (A) allgemeiner Beschaffenheit und von den besondern Nebenumständen des vorliegenden Gegenstandes großentheils frei sind, werden wir deren Begründung auch ganz unabhängig von den bis jetzt eingeführten Bezeichnungen und bereits festgestellten Gleichungen vortragen; wozu wir ganz ausschließlich die vorliegende Nr. bestimmen.

Wenn das kte Differenziale einer Variabeln $x$ durch $x_k$, also das nullte Differenziale von $x$, oder $x$ selbst, durch $x_0$ vorgestellt wird, d. h., wenn die Gleichungen:

$$x_k = d^k x \text{ und } x_0 = x \qquad (a)$$

festgestellt werden; so wird jede Differenzialfunction nter Ordnung dieser Variabeln $x$, die wir Kürze halber durch $F$ andeuten wollen, als Function von:

$$x_0\ ,\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ \ldots\ .\ x_n$$

auftreten. Stellt man ferner das totale kte Differenziale dieser Differenzialfunction $F$ nach sämmtlichen so eben aufgeführten Größen durch $F_k$ vor, so daß analog mit den eben aufgestellten Gleichungen in (a) auch folgende bestehen:

$$F_k = d^k F \text{ und } F_0 = F\ ; \qquad (b)$$

so gelangt man sehr leicht auf folgende Recursionsgleichung:

$$F_{r+1} = \sum_{k=0}^{k=n+r} \frac{dF_r}{dx_k}\, x_{k+1}\ , \qquad (c)$$

die, jedesmal mit Zuziehung der Gleichungen in (a) und (b), für alle positiven und ganzen Zahlenwerthe von $r$, mitbegriffen den

Nullwerth, Bestand hat, und in der das Summenzeichen nur über die ganzen Zahlenwerthe von k inner den angedeuteten Summengrenzen, letztere mitbegriffen, sich erstreckt. Wir fügen noch, bevor wir zur Mittheilung der Folgerungen aus der Recursionsgleichung (c) übergehen, die Bemerkung bei, daß $F_r$ oder $d^r.F$ eine Differenzialfunction der $(n+r)$ten Ordnung von x vorstellt, oder daß $F_r$ eine Function der Größen:

$$x_0\ ,\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ x_n\ ,\ x_{n+1}\ ,\ x_{n+2}\ ,\ \ldots\ x_{n+r}$$

vorstellt, und daß diesem zufolge auch folgende Gleichung:

$$\frac{dF_r}{dx_{n+r}} = \frac{dF}{dx_n}\ , \qquad (d)$$

für jedes ganze und positive r, als Gleichheit Bestand hat.*)

Mit Berücksichtigung der eben gemachten Aussage über die Beschaffenheit der Function $F_r$ und mit Beachtung der Gleichungen in (a) wird das totale Differenziale des partiellen Differenzialquotienten:

$$\frac{dF_r}{dx_p}\ ,$$

falls p einen der Zahlenwerthe:

$$0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ \ldots\ (n+r)$$

vorstellt, durch folgende Gleichung dargestellt werden:

$$d\,.\,\frac{dF_r}{dx_p} = \frac{d^2F_r}{dx_0 dx_p}\,x_1 + \frac{d^2F_r}{dx_1 dx_p}\,x_2 + \ldots + \frac{d^2F_r}{dx_{n+r}dx_p}\,x_{n+r+1}\ ,$$

oder, einfacher dargestellt, durch folgende:

$$d\,.\,\frac{dF_r}{dx_p} = \sum_{k=0}^{k=n+r} \frac{d^2F_r}{dx_k\,dx_p}\,x_{k+1}\ . \qquad (e)$$

Wird nun die Recursionsgleichung in (c) partiell nach $x_p$ differenzirt, so erhält man, falls p einen der folgenden Zahlenwerthe:

$$1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ \ldots\ (n+r)$$

vorstellt, die Gleichung:

$$\frac{dF_{r+1}}{dx_p} = \sum_{k=0}^{k=n+r} \frac{d^2F_r}{dx_p\,dx_k}\,x_{k+1} + \frac{dF_r}{dx_{p-1}}\ ,$$

---

*) Diese Aussage ist sehr bald verificirt, wenn man für r nach und nach die Zahlenwerthe 1, 2, 3, 4, . . . r setzt.

und im Falle wenn

$$p = 0$$

ist, die folgende Gleichung:

$$\frac{dF_{r+1}}{dx_p} = \sum_{k=0}^{k=n+r} \frac{d^2F_r}{dx_0 dx_k} x_{k+1} .$$

Verbindet man nun die beiden zuletzt gewonnenen Ergebnisse mit der obigen Gleichung (e), so ergeben sich die folgenden am Eingange angekündigten zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} d . \frac{dF_r}{dx_p} &= \frac{dF_{r+1}}{dx_p} - \frac{dF_r}{dx_{p-1}} , \\ d . \frac{dF_r}{dx_0} &= \frac{dF_{r+1}}{dx_0} , \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

von denen wir unmittelbar in der nächstfolgenden Nr. Gebrauch machen werden, die Gleichungen (4) als Folgen der Gleichungen (5) darzustellen.

Betreffend die erste dieser Gleichungen (A) bemerken wir, daß dieselbe, den Nullwerth ausgenommen, für jeden ganzen und positiven Werth von p Bestand hat. Obgleich wir dieselbe nur von $p=1$ bis $p=n+r$ abgeleitet haben, besteht solche gleichwohl noch in der eben ausgesprochenen Allgemeinheit, wenn man einerseits die Gleichheit (d) und anderseits den Umstand zuzieht, daß $F_r$ eine Function von $x_p$ zu sein aufhört, wenn man $p>n+r$ annimmt; daß man sonach bei der Annahme $p>n+r$ auf durchaus, auch der Form nach, identische Gleichungen geführt wird.

376. Wird, indem wir uns unserm Hauptgegenstande zuwenden, in den allgemeinen Gleichungen (A) vorangehender Nr. $r=0$ und $n=m-1$ angenommen, dann F statt $F_0$ und x statt $x_0$ gesetzt; so stellen sich folgende zwei Gleichungen heraus:

$$\frac{dF_1}{dx} = d . \frac{dF}{dx} ,$$

$$\frac{dF_1}{dx_p} = d . \frac{dF}{dx_p} + \frac{dF}{dx_{p-1}} ,$$

oder auch, da man

$$F_1 = d . F$$

hat, die folgenden, auch von Dirksen bei einem ähnlichen Anlasse aufgestellten zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(d.F)}{dx} &= d.\frac{dF}{dx}, \\ \frac{d(d.F)}{dx_p} &= d.\frac{dF}{dx_p} + \frac{dF}{dx_{p-1}}, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

wo F irgend eine Function der Größen:

$$x, x_1, x_2, x_3, \ldots . x_{m-1},$$

deren Zusammenhang die Gleichungen in (1) Nr. 370 angeben, vorstellt, und wo die Buchstabengröße p aller positiven und ganzen Zahlenwerthe, von 1 aufwärts gezählt, fähig ist.

Bedenkt man nun, daß die Größen $X$, $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ . . . der Gleichungen (5) Functionen derselben Größen $x, x_1, x_2, \ldots x_{m-1}$ sind, so daß die in den eben aufgestellten Gleichungen (7) vorkommende Größe F jede dieser Functionen $X$, $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, . . . vorstellen kann; so dürfen, zur Umformung des Ergebnisses einer partiellen Differenziation irgend einer der Gleichungen in (5), jedesmal diese Gleichungen (7) zugezogen werden.

Differenziren wir nun, dieses vorausgesetzt, die letzte der Gleichungen (5) partiell nach $x_p$, und lassen p einen der Werthe:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots . (m-1) \qquad (\beta)$$

sein; so gelangen wir mit Zuziehung der zweiten unter den Gleichungen (7) auf folgendes Ergebniß:

$$d.\frac{dX}{dx_p} + \frac{dX}{dx_{p-1}} = \frac{d^2V}{dx\,dx_p}. \qquad (\gamma)$$

Schließt man ferner die erste und letzte der Gleichungen (5) aus, so ist jede der übrigen $m-2$ Gleichungen daselbst von folgender Form:

$$X^{(p-1)} + d.X^{(p)} = \frac{dV}{dx_p}, \qquad (\delta)$$

wenn nämlich für p alle Werthe in $(\beta)$, und $X$ für $X^{(0)}$ gesetzt wird; differenziren wir nun diese allgemeine Gleichung partiell nach x, nehmen aber hiebei auf die erste der Gleichungen (7) Rücksicht, so ergiebt sich auch folgende Gleichung:

$$\frac{dX^{(p-1)}}{dx} + d.\frac{dX^{(p)}}{dx} = \frac{d^2V}{dx_p\,dx}.$$

Verbindet man nun diese Gleichung mit der vorigen ($\gamma$) durch Subtraktion; so stellt sich folgende von V independente Gleichung heraus:

$$\mathrm{d}\cdot\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x_p}+\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x_{p-1}}=\mathrm{d}\cdot\frac{\mathrm{d}X^{(p)}}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}X^{(p-1)}}{\mathrm{d}x}, \qquad (\varepsilon)$$

in der p sämmtlicher in ($\beta$) zusammengestellten Werthe fähig ist. — Wird ferner die erste der Gleichungen (5) partiell nach x und die letzte desselben Systems in gleicher Weise nach $x_m$ differenzirt, so stellt sich, mit Rücksichtnahme auf die zweite der Gleichungen (7), als deren Unterschied folgendes Ergebniß dar:

$$\frac{\mathrm{d}X^{(m-1)}}{\mathrm{d}x}-\mathrm{d}\cdot\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x_m}-\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x_{m-1}}=0;$$

nach der Voraussetzung ist X unabhängig von $x_m$, folglich hat man:

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x_m}=0 \text{ und somit auch } \mathrm{d}\cdot\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x_m}=0;$$

sonach hat man:

$$\frac{\mathrm{d}X^{(m-1)}}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x_{m-1}}, \qquad (\xi)$$

welche eine der Gleichungen in (4) ist, die letzte nämlich auf der ersten Zeile besagten Systems. — Mit Zuziehung dieser Gleichung bietet die in ($\varepsilon$), wenn p in derselben nach und nach die Werthe:

$$m-1,\ m-2,\ m-3,\ \ldots\ 3,\ 2,\ 1$$

annimmt, in derselben Ordnungsfolge die nun folgenden Gleichungen dar:

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x_{m-2}}=\frac{\mathrm{d}X^{(m-2}}{\mathrm{d}x},\quad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x_{m-3}}=\frac{\mathrm{d}X^{(m-3)}}{\mathrm{d}x},\quad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x_{m-4}}=\frac{\mathrm{d}X^{(m-4)}}{\mathrm{d}x},\ \ldots.$$

$$\ldots\ldots\ldots\quad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x_2}=\frac{\mathrm{d}X^{(2)}}{\mathrm{d}x},\quad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x_1}=\frac{\mathrm{d}X^{(1)}}{\mathrm{d}x},\quad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}.$$

Die letzte dieser Gleichungen ist offenbar eine identische, und kann sonach unbeachtet bleiben; die übrigen aber, die in Verein mit der derselben vorausgehenden ($\xi$) durch folgende allgemeine:

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x_p}=\frac{\mathrm{d}X^{(p)}}{\mathrm{d}x}, \qquad (\eta)$$

ersetzt werden können, wenn nämlich p jeden der Zahlenwerthe in

($\beta$) vorstellt, bieten sämmtliche auf der ersten Zeile in (4) enthaltenen Gleichungen dar. Es gehen sonach die letztgenannten, eine Abtheilung der Gleichungen in (4), als Folgerung der Gleichungen in (5) heraus.

Eine zweite Abtheilung, die auf der zweiten Zeile in (4) befindlichen Gleichungen, wird in folgender Weise, als Folge der Gleichungen in (5) dargestellt.

Differenzirt man die vorletzte der Gleichungen in (5) partiell nach $x_p$, so erhält man mit Zuziehung der zweiten unter den Gleichungen (7) die folgende:

$$\frac{dX}{dx_p} + d \cdot \frac{dX^{(1)}}{dx_p} + \frac{dX^{(1)}}{dx_{p-1}} = \frac{d^2V}{dx_1 dx_p};$$

wird ferner die oben aufgestellte Gleichung ($\delta$) nach $x_1$ partiell differenzirt, so bietet dieselbe Hülfsgleichung in (7) folgendes Ergebniß dar:

$$\frac{dX^{(p-1)}}{dx_1} + d \cdot \frac{dX^{(p)}}{dx_1} + \frac{dX^{(p)}}{dx} = \frac{d^2V}{dx_p dx_1};$$

subtrahirt man diese zwei Gleichungen von einander: so erhält man mit Beachtung der bereits begründeten Gleichung ($\eta$) folgende Unterschiedsgleichung:

$$d \cdot \frac{dX^{(1)}}{dx_p} + \frac{dX^{(1)}}{dx_{p-1}} = d \cdot \frac{dX^{(p)}}{dx_1} + \frac{dX^{(p-1)}}{dx_1}, \qquad (\varepsilon')$$

die, wie die analoge zu derselben ($\varepsilon$), für sämmtliche in ($\beta$) zusammengestellten Werthe von p Bestand hat. — Wird, aus dieser Gleichung weitere Folgerungen zu ziehen, die erste der Gleichungen (5) partiell nach $x_1$, die vorletzte desselben Systems in gleicher Weise nach $x_m$ differenzirt, und unterläßt man nicht den Umstand in Betracht zu ziehen, daß X sowohl als $X^{(1)}$ von $x_m$ unabhängig sind; so bietet das Ergebniß des Unterschiedes beider so erhaltenen Gleichungen folgende dar:

$$\frac{dX^{(m-1)}}{dx_1} = \frac{dX^{(1)}}{dx_{m-1}}, \qquad (\zeta')$$

die eine analoge zu ($\zeta$) und bereits eine der Gleichungen in (4), die letzte auf der zweiten Zeile daselbst, vorstellt. — Mit Berücksichtigung dieser Gleichung bietet die derselben vorausgehende, wenn

man daselbst für p nach und nach die Zahlenwerthe:

$$m-1\ ,\ m-2\ ,\ m-3\ ,\ \ldots\ .\ 3\ ,\ 2\ ,\ 1$$

einsetzt, ein System von Gleichungen dar, deren allgemeiner Repräsentant die folgende Gleichung ist:

$$\frac{dX^{(1)}}{dx_p} = \frac{dX^{(p)}}{dx_1}\ , \qquad (\eta')$$

welche, wenn man die Gleichung $(\xi')$ mit beachtet, für alle folgenden Zahlenwerthe:

$$2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ \ldots\ .\ m-1$$

von p Bestand hat, und dadurch sämmtliche auf der zweiten Zeile in (4) befindlichen Gleichungen hervorruft. Es stellt sich diesem nach auch diese eben bezeichnete Abtheilung der Gleichungen in (4), als nothwendige Folge der Annahme eines Bestandhabens der Gleichungen in (5) heraus.

Um auch die auf der dritten Zeile in (4) vorkommenden Gleichungen, als Folgen der Gleichungen in (5) darzuthun, gehen wir von der drittletzten dieses Systems aus. — Wird diese nämlich partiell nach $x_p$ und die oben aufgestellte $(\delta)$ eben so nach $x_2$ differenzirt, welche partiellen Differenziationen jedoch nach der zweiten der Gleichungen (7) zu vollziehen sind; so stellt sich als Unterschiedsgleichung, wenn nämlich die bereits erwiesene Gleichung $(\eta')$ zugezogen wird, die folgende dar:

$$d\,.\,\frac{dX^{(2)}}{dx_p} + \frac{dX^{(2)}}{dx_{p-1}} = d\,.\,\frac{dX^{(p)}}{dx_2} + \frac{dX^{(p-1)}}{dx_2}\ . \qquad (\varepsilon'')$$

Differenzirt man ferner die erste der Gleichungen (5) partiell nach $x_2$ und die drittletzte derselben nach $x_m$; so gelangt man in ähnlicher Weise, wie die Gleichungen $(\xi)$ und $(\xi')$ erhalten worden sind, auf folgende Gleichung:

$$\frac{dX^{(m-1)}}{dx_2} = \frac{dX^{(2)}}{dx_{m-1}}\ . \qquad (\zeta'')$$

Verfährt man endlich mit diesen eben aufgestellten zwei Gleichungen, wie mit den analogen in den beiden vorausgeschickten Fällen; dann gelangt man auf folgende:

$$\frac{dX^{(2)}}{dx_p} = \frac{dX^{(p)}}{dx_2}\ , \qquad (\eta'')$$

die eine analoge zu $(\eta)$ und $(\eta')$ ist, aus der, wenn für p nach und nach die Zahlenwerthe:

$$3, 4, 5, 6, \ldots . m-1$$

gesetzt werden, sämmtliche auf der dritten Zeile in (4) befindlichen Gleichungen hervorgehen. Es stellen sich sonach auch diese als Folge der Gleichungen in (5) heraus.

Fährt man auf dem bis jetzt betretenen Wege, analoge Gleichungen zu $(\eta)$, $(\eta')$, $(\eta'')$ abzuleiten, fort; so gelangt man durch Schlüsse und Operationen, denen ähnlich, die auf diese eben genannten geführt haben, auf folgende allgemeine Gleichung:

$$\frac{dX^{(k)}}{dx_p} = \frac{dX^{(p)}}{dx_k},$$

in der $k<p$, und p aller ganzen positiven Werthe von und mit 1 bis und mit $m-1$ fähig ist, die demnach den allgemeinen Repräsentanten sämmtlicher Gleichungen in (4) abgiebt. Es gehen also sämmtliche Gleichungen in (4) in Folge der Annahme des Bestandhabens sämmtlicher Gleichungen in (5) hervor. W. z. b. w.

377. Nachdem wir festgestellt haben, daß aus den Gleichungen (6) die Gleichungen (5), aus diesen dann wieder die Gleichungen in (3) und (4) hervorgehen; so ersetzen die erstgenannten, beachtend die Entstehungsweise derselben, in aller und jeder Beziehung die zuletzt aufgeführten. Nun bedarf es keines besondern Beweises, unter der Annahme des Bestandhabens der Gleichungen in (3) und (4) und bei Zugrundelegung der Vereinfachungsgleichungen in (1) Nr. 370, den Ausdruck zur Rechten in Gleichung (2) derselben Nr., als vollständiges Differenziale der Größen:

$$x, x_1, x_2, x_3, \ldots . x_{m-1}$$

zu erklären; daher auch ein Gleiches von den Gleichungen in (6). Ferner ist unter diesen die erste auch die einzige Gleichung, die ganz unabhängig von den in $(\alpha)$ Nr. 370 zusammengestellten, neueingeführten Größen ist, und lediglich die in Rücksicht auf Integrabilität zur Untersuchung vorgelegte Differenzialfunction V umfaßt; daher stellt auch diese erste der Gleichungen in (6) die einzige Bedingungsgleichung dar, damit besagte Differenzialfunction, als un-

mittelbares Ergebniß der Differenziation einer Differenzialfunction auftrete, die der Ordnung nach um eine Einheit von der erstern übertroffen wird. Denn beim Eintreffen dieser einzigen Bedingungsgleichung stellen ja die auf dieselbe folgenden Gleichungen in (6) jene Bestimmungen der in ($\alpha$) zusammengestellten Functionen dar, die in (2) gesetzt, den Ausdruck zur Rechten, als vollständige oder integrable lineare Differenzialfunction herausstellen. – Wird solcher nunmehr nach Nr. 285 integrirt, so ergiebt sich für $V'$ eine Function von $x$, $x_1$, $x_2$, . . . $x_{m-1}$, welche mit Zuziehung der Hülfsgleichungen in (1) die vorhin erwähnte, zu einer um eine Einheit geringern Ordnung als die vorgelegte $V$ gehörende, Differenzialfunction darstellt, und folglich die verlangte Integralfunction abgiebt.

Betreffend die willkührlichen Constanten dieser Integralfunction $V'$ bemerken wir Folgendes.

Vorerst ist einleuchtend, daß die Coefficienten $X$, $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, . . im Ausdrucke zur Rechten der Gleichungen (2), wie aus den Gleichungen in (6) zu entnehmen ist, keinerlei Größen allgemeiner Art mitführen, die nicht in der vorgelegten Differenzialfunction $V$ selbst vorkommen; hieraus folgt sofort, daß $V'$ nur eine willkührliche Constante einführen kann, die als Addendus der nach Nr. 285 gewonnenen Bestimmung von $V'$ beizufügen ist. Sieht man ferner einstweilen von dem Falle ab, in welchem die vorgelegte Differenzialfunction $V$ zur ersten Ordnung gehört, so stellt in jedem andern Falle die Integralfunction $V'$, bevor nämlich die willkührliche Constante beigesetzt wird, noch eine Differenzialfunction und folglich eine unendlich kleinwerdende Größe vor; daher wird die besagte willkührliche Constante weder einen endlichen, viel weniger noch einen unendlich großen Werth annehmen können, sondern lediglich durch Null zu ersetzen sein: es führt sonach die unmittelbar vorhergehende Integralfunction einer Differenzialfunction der $m$ten Ordnung einer Variabeln keine willkührliche Constante mit, falls die Ordnungszahl $m$ größer als Eins ist. Hieraus die allgemeine Folgerung, die endliche Integralfunction einer Differenzialfunction einer Variabeln beliebiger Ordnung, falls nämlich eine solche möglich erkannt wird, enthält bloß eine von der Variabeln unabhängige, willkührliche Constante.

378. Die in Nr. 375 in (A) zusammengestellten zwei Gleichungen bieten noch einige Folgerungen allgemeiner Beschaffenheit dar, mittelst deren die schon oft erwähnten Gleichungen in (6) beachtenswerthe Umformungen unterzogen werden können. Mit der Herstellung jener Folgerungen befassen wir uns noch in vorliegender Nr., die wir gleichsam als Fortsetzung der Nr. 375 angesehen wissen wollen; die Mittheilung dieser Umformungen aber schieben wir auf die nächstfolgende Nr. hinaus.

Mit Beibehaltung der in Nr. 375 festgestellten Bezeichnungen und mit Zuziehung der daselbst gewonnenen Ergebnisse wenden wir uns zunächst der zweiten der in (A) zusammengestellten Gleichungen zu.

Wenn man in die eben angeführte Gleichung statt r nach und nach die Zahlenwerthe:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ r-1$$

setzt, und wenn bei jedem Ergebnisse das demselben vorausgehende mit in Betracht gezogen wird; so gelangt man zuletzt auf folgende allgemeine Gleichung:

$$\frac{dF_r}{dx_0} = d^r . \frac{dF_0}{dx_0},$$

welche eine der angekündigten Folgerungen darstellt.

Verfährt man in ähnlicher Weise mit der ersten der Gleichungen in (A); so gelangt man zuletzt auf folgende noch allgemeinere Folgerung:

$$\frac{dF_r}{dx_p} =$$

$$= d^r . \frac{dF_0}{dx_p} + \binom{r}{1} d^{r-1} . \frac{dF_0}{dx_{p-1}} + \binom{r}{2} d^{r-2} . \frac{dF_0}{dx_{p-2}} .. + \binom{r}{r-1} d . \frac{dF_0}{dx_{p-r+1}} + \binom{r}{r} \frac{dF_0}{dx_{p-r}}, \quad (B)$$

die die vorhergehende als besondern Fall, gleich wie die erste die zweite der Gleichungen in (A), umfaßt. Denn nach der Nr. 375 ist $F_0$ oder F bloß als Function von $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$, oder als Function solcher x festgestellt worden, die positive ganze Zeiger, mitbegriffen Null, haben, keineswegs aber auch von einem mit irgend einem negativen Zeiger begabten x; wodurch sämmtliche partiellen Differenzialquotienten, wie die folgenden:

$$\frac{dF_0}{dx_{-1}},\ \frac{dF_0}{dx_{-2}},\ \frac{dF_0}{dx_{-3}},\ \frac{dF_0}{dx_{-4}},\ \ldots$$

durch Nullen zu ersetzen sind. Es ersetzt sonach die in (B) aufgestellte Gleichung die derselben vorausgehende, namentlich wenn man neben der Gleichung (B) auch folgende:

$$\frac{dF_0}{dx_{-k}} = 0\,, \qquad (f)$$

in der k irgend eine ganze positive Zahl vorstellt, jedesmal in Betracht zu ziehen nicht unterläßt.

Eine andere Folgerung aus den Gleichungen in (A), die eine inverse Gleichung zu (B) darstellt, wird in folgender Weise gewonnen.

Setzt man nämlich in der ersten der Gleichungen (A) $r=0$, so erhält man:

$$d\,.\,\frac{dF_0}{dx_p} = \frac{dF_1}{dx_p} - \frac{dF_0}{dx_{p-1}}\,,$$

welche mit Beachtung der vorhergehenden Gleichung (f) nicht nur für alle ganzen und positiven Werthe von p, sondern auch noch für $p=0$ Bestand hat. Wird von dieser Gleichung das totale Differenziale hergestellt, so hat man:

$$d^2.\,\frac{dF_0}{dx_p} = d\,.\,\frac{dF_1}{dx_p} - d\,.\,\frac{dF_0}{dx_{p-1}}\,;$$

läßt man einerseits in der vorausgehenden Gleichung p in $p-1$ übergehen, und anderseits setzt man in der ersten der Gleichungen (A) für r die Zahl 1: so geht, durch Subtraktion dieser beiden Ergebnisse, die so eben aufgestellte Gleichung in folgende über:

$$d^2\,.\,\frac{dF_0}{dx_p} = \frac{dF_2}{dx_p} - 2\,\frac{dF_1}{dx_{p-1}} + \frac{dF_0}{dx_{p-2}}\,,$$

die gleichfalls mit Zuziehung der Gleichung (f) für alle positiven ganzen Werthe von p, Null mitbegriffen, Bestand hat. Wird auch von dieser Gleichung das totale Differenziale genommen; so zieht man gleichfalls mit Berücksichtigung der ersten der Gleichungen in (A) und der bereits erhaltenen Gleichungen, für dieselben Werthe von p als diese, folgende:

$$d^3\,.\,\frac{dF_0}{dx_p} = \frac{dF_3}{dx_p} - 3\,\frac{dF_2}{dx_{p-1}} + 3\,\frac{dF_1}{dx_{p-2}} - \frac{dF_0}{dx_{p-3}}\,.$$

Wird in dieser Weise fortgefahren, so stellt sich folgende allgemeine inverse zur Gleichung (B) heraus:

$$d^r.\frac{dF_0}{dx_p} =$$

$$= \frac{dF_r}{dx_p} - \binom{r}{1}\frac{dF_{r-1}}{dx_{p-1}} + \binom{r}{2}\frac{dF_{r-2}}{dx_{p-2}} - \ldots (-1)^{r-1}\binom{r}{r-1}\frac{dF_1}{dx_{p-r+1}} + (-1)^r\binom{r}{r}\frac{dF_0}{dx_{p-r}}, \quad (C)$$

die, jedesmal mit Zuziehung der Gleichung (f), für alle ganzen und positiven Werthe von p, wie auch noch für $p=0$ Bestand hat und in der, gleich wie in der inversen zu derselben in (B), die Symbole $F_r$ und $F_0$ nach den Gleichungen (b) in Nr. 375 zu deuten sind.

Von dieser Gleichung (C) werden wir in der folgenden Nr. ausgehen, die am Eingange vorliegender Nr. angedeuteten Umformungen der Gleichungen in (6) zu bewerkstelligen.

379. Wird in der allgemeinen Gleichung (C) vorangehender Nr. die Differenzialfunction nter Ordnung daselbst, $F_0$ nämlich, durch die Differenzialfunction mter Ordnung V, die wir in Beziehung auf Integrabilität zur Untersuchung uns vorgelegt, ersetzt; werden eben so die Ausdrücke:

$$F_1, \quad F_2, \quad F_3, \quad \ldots\ldots \quad F_p,$$

gemäß der ihnen nunmehr zukommenden Bedeutung, der Reihe nach durch:

$$V_1, \quad V_2, \quad V_3, \quad \ldots\ldots \quad V_p,$$

ersetzt, wo man also

$$V_k = d^k.V \text{ und } V_0 = V \quad (8)$$

hat: dann stellt sich besagte Gleichung folgendermaßen dar:

$$d^r.\frac{dV}{dx_p} =$$

$$= \frac{dV_r}{dx_p} - \binom{r}{1}\frac{dV_{r-1}}{dx_{p-1}} + \binom{r}{2}\frac{dV_{r-2}}{dx_{p-2}} - \ldots (-1)^{r-1}\binom{r}{r-1}\frac{dV_1}{dx_{p-r+1}} + (-1)^r\binom{r}{r}\frac{dV}{dx_{p-r}}. \quad (9)$$

Wie diese Gleichung bei der Umformung der Gleichungen (6) mitwirkt, wollen wir an ein Paar Gleichungen dieses Systems mit einiger Ausführlichkeit zuerst zeigen, worauf wir dann das Gesammtergebniß dieser Umformung einfach und ohne besondere Erläuterung zusammen stellen werden.

Wird nämlich in dieser Gleichung (9)

$$r=1 \text{ und } p=m$$

gesetzt, dann geht solche über in:

$$d.\frac{dV}{dx_m} = \frac{dV_1}{dx_m} - \frac{dV}{dx_{m-1}};$$

wird dieses Ergebniß in die zweitletzte der Gleichungen in (6) eingeführt: so erscheint $X^{(m-2)}$ in folgender Weise umgeformt:

$$X^{(m-2)} = 2\,\frac{dV}{dx_{m-1}} - \frac{dV_1}{dx_{m-2}}.$$

Wird ferner in der unmittelbar vorausgehenden Gleichung m in $m-1$ umgesetzt, so hat man:

$$d.\frac{dV}{dx_{m-1}} = \frac{dV_1}{dx_{m-1}} - \frac{dV}{dx_{m-2}};$$

die Gleichung (9) giebt, wenn man:

$$r = 2 \text{ und } p = m$$

setzt, die folgende:

$$d^2.\frac{dV}{dx_m} = \frac{dV_2}{dx_m} - 2\,\frac{dV_1}{dx_{m-1}} + \frac{dV}{dx_{m-2}};$$

werden die beiden zuletzt aufgestellten Gleichungen in die drittletzte der Gleichungen in (6) eingeführt: so stellt sich die Umformungsgleichung für $X^{(m-3)}$ folgendermaßen dar:

$$X^{(m-3)} = 3\,\frac{dV}{dx_{m-2}} - 3\,\frac{dV_1}{dx_{m-1}} + \frac{dV_2}{dx_m}.$$

In ähnlicher Weise und unter ähnlichen Formen ergeben sich die Umformungsgleichungen für:

$$X^{(m-4)},\ X^{(m-5)} \ldots X^{(2)},\ X^{(1)},\ X,$$

wie auch für die Bedingungsgleichung; so daß die Gesammtheit der Gleichungen in (6) in derselben Ordnungsfolge durch das folgende System von Gleichungen ersetzt werden kann:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= \binom{m+1}{1}\frac{dV}{dx} - \binom{m+1}{2}\frac{dV_1}{dx_1} + \binom{m+1}{3}\frac{dV_2}{dx_2} - \ldots (-1)^m \binom{m+1}{m+1}\frac{dV_m}{dx_m},\\
X &= \binom{m}{1}\frac{dV}{dx_1} - \binom{m}{2}\frac{dV_1}{dx_2} + \binom{m}{3}\frac{dV_2}{dx_3} - \ldots (-1)^{m-1}\binom{m}{m}\frac{dV_{m-1}}{dx_m},\\
X^{(1)} &= \binom{m-1}{1}\frac{dV}{dx_2} - \binom{m-1}{2}\frac{dV_1}{dx_3} + \binom{m-1}{3}\frac{dV_2}{dx_4} - \ldots (-1)^{m-2}\binom{m-1}{m-1}\frac{dV_{m-2}}{dx_m},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
X^{(m-4)} &= \binom{4}{1}\frac{dV}{dx_{m-3}} - \binom{4}{2}\frac{dV_1}{dx_{m-2}} + \binom{4}{3}\frac{dV_2}{dx_{m-1}} - \binom{4}{4}\frac{dV_3}{dx_m},\\
X^{(m-3)} &= \binom{3}{1}\frac{dV}{dx_{m-2}} - \binom{3}{2}\frac{dV_1}{dx_{m-1}} + \binom{3}{3}\frac{dV_2}{dx_m},\\
X^{(m-2)} &= \binom{2}{1}\frac{dV}{dx_{m-1}} - \binom{2}{2}\frac{dV_1}{dx_m},\\
X^{(m-1)} &= \frac{dV}{dx_m}.
\end{aligned}\right\} (10)$$

Die erste dieser Gleichungen stellt die Bedingungsgleichung der Integrabilität der vorgelegten Differenzialfunction mter Ordnung V der Variabeln x vor; beim Eintreffen derselben wird man X, $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, . . . mit Berücksichtigung der Gleichungen in (8) bestimmen und die Ergebnisse in die Gleichung (2) Nr. 370 einsetzen: das Ergebniß der Integration des Ausdruckes zur Rechten der eben angeführten Gleichung wird dann aus Gründen, die wir nur nicht wiederholen wollen, die verlangte unmittelbar vorhergehende Integralfunction von V vorstellen, welche, wie wir in Nr. 377 dargethan haben, bei der Annahme $m > 1$ keine willkührliche Constante mitführen wird.

380. Nachdem wir den Fall, V stellt eine Differenzialfunction mter Ordnung nur einer Variabeln vor, nach allen Seiten besprochen und in einer den Anforderungen der Wissenschaft gemäßen Weise erlediget zu haben vermeinen, bringen wir die bisher gewonnenen allgemeinen Resultate, bevor wir zur Betrachtung der Differenzialfunctionen mit mehr als einer Variabeln übergehen, zuerst noch auf einen besondern Fall zur Anwendung.

Wenn man:

$$V = x\,d^m x \text{ , oder } V = x\,x_m$$

hat, wo also V eine Differenzialfunction der mten Ordnung in Bezug auf die Variable x vorstellt; so werden wir vorerst V in Beziehung auf Integrabilität untersuchen und, je nach dem Ergebnisse im bejahenden Sinne, auch zur Integration derselben schreiten.

Schon eine flüchtige Betrachtung dieser Differenzialfunction V zeigt, daß hier die Gleichungen in (6) mit mehr Vortheil, als die in (10) anzuwenden sein dürften. — Nach diesen Gleichungen stellen wir uns die folgenden, nach der Annahme über V gefolgerten, Gleichungen zusammen:

$$V = x\,x_m,\ \frac{dV}{dx} = x_m,\ \frac{dV}{dx_1} = 0,\ \frac{dV}{dx_2} = 0,\ \ldots\ \frac{dV}{dx_{m-1}} = 0,\ \frac{dV}{dx_m} = x,$$

aus welchen, nach der ersten der Gleichungen in (6), folgende Bedingungsgleichung der Integrabilität gezogen wird:

$$x_m\,[1 + (-1)^m] = 0\,;$$

diese Gleichung wird aber nur unter der Annahme, m stellt eine

ungerade Zahl vor, als Gleichheit realisirt: daher sind wir auch zur Folgerung berechtiget, daß die vorgelegte Differenzialfunction mter Ordnung, je nachdem die Ordnungszahl derselben m ungerade oder gerade ist, Ergebniß einer Differenziation einer zur (m—1)ten Ordnung gehörenden Differenzialfunction sein wird oder nicht. — Unter der Annahme also, die Ordnungszahl m ist ungerade, schreiten wir nunmehr zur Integration von V, und wenden uns zu diesem Zwecke den übrigen Gleichungen in (6) zu, um die verschiedenen Functionen $X, X^{(1)}, X^{(2)} \ldots$ zu erhalten.

Aus diesen Gleichungen ergeben sich, nach der obigen Feststellung über V und der getroffenen Verfügung über m, folgende Bestimmungsgleichungen:

$$X = x_{m-1},\ X^{(1)} = -x_{m-2},\ X^{(2)} = x_{m-3},\ \ldots\ X^{(m-2)} = -x_1,\ X^{(m-1)} = x;$$

wird nun $m = 2n+1$ gesetzt, dann stellt sich die Gleichung (2) Nr. 370, wie folgt, dar:

$$d.V' = x_{2n}\,dx - x_{2n-1}\,dx_1 + x_{2n-2}\,dx_2 - \ldots + x_2\,dx_{2n-2} - x_1 dx_{2n-1} + x\,dx_{2n}.$$

Integrirt man nun zu beiden Seiten vom Gleichheitszeichen; so erhält man, je nachdem man n von der Form 2p oder von der Form $2p-1$ voraussetzt, die eine oder die andere der nun folgenden zwei Gleichungen:

$$V' = x x_{4p} - x_1 x_{4p-1} + x_2 x_{4p-2} - \ldots - x_{2p-1} x_{2p+1} + \tfrac{1}{2} x_{2p}^2,$$

$$V' = x x_{4p-2} - x_1 x_{4p-3} + x_2 x_{4p-4} - \ldots + x_{2p-2} x_{2p} - \tfrac{1}{2} x_{2p-1}^2,$$

in welchen p irgend eine ganze und positive Zahl vorstellt. Bedenkt man ferner die Gleichung:

$$V = dV', \text{ aus der } V' = \int V$$

gezogen wird; so stellen sich beachtend die Vereinfachsgleichungen in (1) Nr. 370 folgende zwei Integralbestimmungen heraus:

$$\int x\,d^{4p+1}x =$$

$$= x\,d^{4p}x - dx\,d^{4p-1}x + d^2x\,d^{4p-2}x - \ldots - d^{2p-1}x\,d^{2p+1}x + \tfrac{1}{2}(d^{2p}x)^2,$$

$$\int x\,d^{4p-1}x =$$

$$+ x\,d^{4p-2}x - dx\,d^{4p-3}x + d^2x\,d^{4p-4}x - \ldots + d^{2p-2}x\,d^{2p}x - \tfrac{1}{2}(d^{2p-1}x)^2,$$

die gleichfalls für alle ganzen und positiven Werthe von p Bestand haben, die erstere aber auch noch für $p = 0$.

381. Wir legen uns nunmehr den Fall zur Untersuchung vor, wenn V eine Differenzialfunction, irgend einer Klasse k, zweier Variabeln x und y vorstellt. — Indem wir diese Differenzialfunction in Bezug auf die Variable x von der mten und in Bezug auf y von der nten Ordnung feststellen, setzen wir zugleich die unmittelbar vorhergehende Integralfunction derselben, falls nämlich eine solche existiren soll, von der $(m-1)$ten Ordnung in Bezug auf x und von der $(n-1)$ten Ordnung in Bezug auf y voraus, und wenn wir, wie in dem Falle einer Differenzialfunction einer Variabeln, solche durch V′ repräsentiren, dann wird V′ eine zur $(k-1)$ten Klasse gehörende Differenzialfunction der beiden Variabeln x und y sein.

Stellt man zur Vereinfachung folgende Gleichungen fest:

$$\left.\begin{aligned} x_1 = dx\,,\ x_2 = dx_1\,,\ x_3 = dx_2\,,\ \ldots\ x_m = dx_{m-1}\,,\\ y_1 = dy\,,\ y_2 = dy_1\,,\ y_3 = dy_2\,,\ \ldots\ y_n = dy_{n-1}\,, \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

dann wird dem Vorausgeschickten zufolge V eine Function von:

$$x\,,\ x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots\ x_m\,,\ y\,,\ y_1\,,\ y_2\,,\ \ldots\ y_n$$

und V′ eine Function von:

$$x\,,\ x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots\ x_{m-1}\,,\ y\,,\ y_1\,,\ y_2\,,\ \ldots\ y_{n-1}$$

sein, in der Weise, daß erstere Ergebniß einer totalen Differenziation der letztern, oder daß die Gleichung:

$$V = d.V'$$

identisch realisirt werde. Wird also das totale Differenziale von V′ durch die Gleichung:

$$\begin{aligned} d.V' = {} & X\,dx + X^{(1)}dx_1 + X^{(2)}dx_2 + \ldots + X^{(m-1)}dx_{m-1} \\ & + Y\,dy + Y^{(1)}dy_1 + Y^{(2)}dy_2 + \ldots + Y^{(n-1)}dy_{n-1}\,, \end{aligned} \quad (12)$$

dargestellt, wo die Differenzialcoefficienten:

$$X,\ X^{(1)},\ X^{(2)},\ X^{(3)},\ \ldots\ X^{(m-1)}, \quad (\vartheta)$$

$$Y,\ Y^{(1)},\ Y^{(2)},\ Y^{(3)},\ \ldots\ Y^{(n-1)}, \quad (\Theta)$$

Functionen derselben Größen als V′ sind; dann ist die obige Gleichheit, welche V als Ergebniß der Differenziation von V′ darstellt, mit folgender gleichbedeutend:

$$V = Xx_1 + X^{(1)}x_2 + X^{(2)}x_3 + X^{(3)}x_4 + \ldots + X^{(m-1)}x_m$$
$$+ Yy_1 + Y^{(1)}y_2 + Y^{(2)}y_3 + Y^{(3)}y_4 + \ldots + Y^{(n-1)}y_n, \quad (13)$$

wo aber die in (S) und (Θ) zusammengestellten Functionen von $x, x_1, x_2, \ldots y, y_1, y_2, \ldots$ analoge mit denen in (4) Nr. 370 aufgestellten Beziehungen eingehen. Im vorliegenden Falle werden diese Beziehungen durch folgende drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dX^{(k)}}{dx_p} &= \frac{dX^{(r)}}{dx_k}, \\ \frac{dY^{(k')}}{dy_{p'}} &= \frac{dY^{(r')}}{dy_{k'}}, \\ \frac{dX^{(k'')}}{dy_{p''}} &= \frac{dY^{(r'')}}{dx_{k''}}, \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

anzudeuten sein, deren jede ein System mehrerer umfaßt. Die erste dieser Gleichungen besteht bei der Annahme $k<p$ für alle ganzen und positiven Werthe von $p=1$ bis $p=m-1$; die zweite, bei der analogen Annahme $k'<p'$, besteht für alle ganzen und positiven Werthe von $p'=1$ bis $p'=n-1$; die dritte dieser Gleichungen endlich besteht für alle ganzen und positiven Werthe von $k''=0$ bis $k''=m-1$ und für die ganzen und positiven Werthe von $p''=0$ bis $p''=n-1$. In jedem dieser drei Systeme von Gleichungen hat man jedesmal:

$X^{(0)}$ durch $X$, $Y^{(0)}$ durch $Y$, $x_0$ durch $x$ und $y_0$ durch $y$

zu ersetzen.

Mit der Bestimmung der Functionen in (S) und (Θ), daß deren Ergebnisse den Gleichungen in (13) und (14) genügen, haben wir uns nunmehr zu befassen; wozu wir auch in der nächstfolgenden Nr. übergehen.

382. Differenziren wir die Gleichung (13), indem wir solche als Gleichheit erklären, partiell nach $x$; so stellt sich das unmittelbare Ergebniß dieser partiellen Differenziation folgendermaßen dar:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dX}{dx}x_1 + \frac{dX^{(1)}}{dx}x_2 + \frac{dX^{(2)}}{dx}x_3 + \ldots + \frac{dX^{(m-1)}}{dx}x_m$$
$$+ \frac{dY}{dx}y_1 + \frac{dY^{(1)}}{dx}y_2 + \frac{dY^{(2)}}{dx}y_3 + \ldots + \frac{dY^{(n-1)}}{dx}y_n .$$

Gehen wir ferner von der Annahme aus, sämmtliche drei Systeme von Gleichungen, die aus (14) gebildet werden können, bestehen gleichfalls als Gleichheiten, und berücksichtigen gegenwärtig aus dem ersten dieser Systeme jene Abtheilung, die der Annahme $k=0$ entspricht, dann aus dem dritten besagter Systeme die Abtheilung, welche durch die Verfügung $k''=0$ gebildet werden kann; so nimmt die eben aufgestellte Gleichung, wenn überdieß nach die Hülfsgleichungen in (11) zugezogen werden, folgende Form an:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dX}{dx}dx + \frac{dX}{dx_1}dx_1 + \frac{dX}{dx_2}dx_2 + \ldots + \frac{dX}{dx_{m-1}}dx_{m-1}$$
$$+ \frac{dX}{dy}dy + \frac{dX}{dy_1}dy_1 + \frac{dX}{dy_2}dy_2 + \ldots + \frac{dX}{dy_{n-1}}dy_{n-1},$$

in der, beachtend die Bedeutung von X, der Ausdruck zur Rechten das vollständige Differenziale von X repräsentirt: folglich hat man:

$$\frac{dV}{dx} = d.X.$$

Eben so erhält man, nach einem partiellen Differenziren der Gleichheit in (13) in Bezug auf y mit Zuziehung des zweiten und dritten Systems von Gleichungen, so aus (14) gebildet werden kann (aus dem zweiten Systeme die der Annahme $k'=0$ entsprechende Abtheilung und aus dem dritten die Abtheilung der Annahme $p''=0$), folgendes Endergebniß:

$$\frac{dV}{dy} = d.Y.$$

Ganz in ähnlicher Weise und aus ähnlichen Gründen gewinnt man folgende zwei Gleichungen:

$$\frac{dV}{dx_1} = X + d.X^{(1)}, \quad \frac{dV}{dy_1} = Y + d.Y^{(1)},$$

wie auch die folgenden:

$$\frac{dV}{dx_2} = X^{(1)} + d.X^{(2)}, \quad \frac{dV}{dy_2} = Y^{(1)} + d.Y^{(2)},$$

und, wenn in dieser Weise fortgefahren wird, zuletzt auch die folgenden:

$$\frac{dV}{dx_{m-1}} = X^{(m-2)} + d.X^{(m-1)}, \quad \frac{dV}{dy_{n-1}} = Y^{(n-2)} + d.Y^{(n-1)}.$$

Wird endlich die Gleichheit in (13) einmal nach $x_m$ und ein ander-

mal nach $y_n$ partiell differenzirt; so gewinnt man, beachtend daß die Functionen in (Θ) und (Θ) von $x_m$ sowohl als von $y_n$ independent sind, die folgenden zwei Gleichungen:

$$\frac{dV}{dx_m} = X^{(m-1)} \text{ und } \frac{dV}{dy_n} = Y^{(n-1)}.$$

Werden alle diese Ergebnisse zusammengestellt, so hat man die folgenden, durch einen vertikalen Strich gesonderten, zwei Systeme von Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l|l}
X^{(m-1)} = \frac{dV}{dx_m}, & Y^{(n-1)} = \frac{dV}{dy_n}, \\
X^{(m-2)} + d.X^{(m-1)} = \frac{dV}{dx_{m-1}}, & Y^{(n-2)} + d.Y^{(n-1)} = \frac{dV}{dy_{n-1}}, \\
X^{(m-3)} + d.X^{(m-2)} = \frac{dV}{dx_{m-2}}, & Y^{(n-3)} + d.Y^{(n-2)} = \frac{dV}{dy_{n-2}}, \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
X^{(1)} + d.X^{(2)} = \frac{dV}{dx_2}, & Y^{(1)} + d.Y^{(2)} = \frac{dV}{dy_2}, \\
X + d.X^{(1)} = \frac{dV}{dx_1}, & Y + d.Y^{(1)} = \frac{dY}{dy_1}, \\
d.X = \frac{dV}{dx}, & d.Y = \frac{dV}{dy},
\end{array}\right\} \quad (15)$$

wo das System zur Linken sämmtliche Functionen in (Θ) mit Ausschluß der in (Θ), und das zur Rechten sämmtliche Functionen in (Θ) mit Ausschluß der in (Θ) umfaßt, und deren Entstehung die Annahme eines identischen Bestehens der Gleichung (13) und sämmtlicher aus den drei allgemeinen Gleichungen in (14) zu folgernden drei Systeme von Gleichungen zu Grunde liegt.

Vergleicht man nun von diesen zwei Systemen das zur Linken mit dem in Nr. 371 zusammengestellten Systeme von Gleichungen in (5), so überzeugt man sich sofort von deren Identität; daher führt auch besagtes System auf dieselben in Nr. 372 unter (6) zusammengefaßten Gleichungen. Aus der Analogie ferner der beiden so eben zusammengestellten Systeme von Gleichungen unter einander darf auch auf die Analogie der denselben respective entsprechenden Folgerungen geschlossen werden: sonach bieten diese zwei Systeme in (15) die folgenden zwei Systeme von Gleichungen dar:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= \frac{dV}{dx} - d\cdot\frac{dV}{dx_1} + d^2\cdot\frac{dV}{dx_2} - \ldots (-1)^m\ d^m\cdot\frac{dV}{dx_m},\\
X &= \frac{dV}{dx_1} - d\cdot\frac{dV}{dx_2} + d^2\cdot\frac{dV}{dx_3} - \ldots (-1)^{m-1} d^{m-1}\cdot\frac{dV}{dx_m},\\
X^{(1)} &= \frac{dV}{dx_2} - d\cdot\frac{dV}{dx_3} + d^2\cdot\frac{dV}{dx_4} - \ldots (-1)^{m-2} d^{m-2}\cdot\frac{dV}{dx_m},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
X^{(m-3)} &= \frac{dV}{dx_{m-2}} - d\cdot\frac{dV}{dx_{m-1}} + d^2\cdot\frac{dV}{dx_m},\\
X^{(m-2)} &= \frac{dV}{dx_{m-1}} - d\cdot\frac{dV}{dx_m},\\
X^{(m-1)} &= \frac{dV}{dx_m},
\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

$$\left.\begin{aligned}
0 &= \frac{dV}{dy} - d\cdot\frac{dV}{dy_1} + d^2\cdot\frac{dV}{dy_2} - \ldots (-1)^n\ d^n\cdot\frac{dV}{dy_n},\\
Y &= \frac{dV}{dy_1} - d\cdot\frac{dV}{dy_2} + d^2\cdot\frac{dV}{dy_3} - \ldots (-1)^{n-1} d^{n-1}\cdot\frac{dV}{dy_n},\\
Y^{(1)} &= \frac{dV}{dy_2} - d\cdot\frac{dV}{dy_3} + d^2\cdot\frac{dV}{dy_4} - \ldots (-1)^{n-2} d^{n-2}\cdot\frac{dV}{dy_n},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Y^{(n-3)} &= \frac{dV}{dy_{n-2}} - d\cdot\frac{dV}{dy_{n-1}} + d^2\cdot\frac{dV}{dy_n},\\
Y^{(n-2)} &= \frac{dV}{dy_{n-1}} - d\cdot\frac{dV}{dy_n},\\
Y^{(n-1)} &= \frac{dV}{dy_n}.
\end{aligned}\right\} \quad (16')$$

Diese zwei Systeme von Gleichnngen, die einerseits die Functionen in (S) und (Θ) bestimmen, dann anderseits zwei Gleichungen (je die erste in (16) und in (16′)) darbieten, die von diesen Functionen unabhängig sind, und diesem nach Bedingungsgleichungen der Integrabilität der hier in Rede stehenden Differenzialfunction V abgeben, sind, wie schon oben erwähnt wurde, in Folge der Annahme gewonnen worden, es bestehen die Gleichung in (13) und die aus (14) zu ziehenden drei Systeme von Gleichungen als Gleichheiten. Wir haben also noch, ähnlich dem Falle, wo V bloß Differenzialfunction der einen Variabeln x vorgestellt, und wie auch Ausgangs der vorangehenden Nr. angekündiget worden, das Umgekehrte des eben Aus-

gesprochenen darzuthun, nämlich, daß diese zuletzt aufgestellten zwei Systeme von Gleichungen jene in (13) und (14) zur Folge haben. Mit der Mittheilung der Begründung dieser umgekehrten Aussage werden wir uns in der nächstfolgenden Nr. befassen.

**383.** Bei der Beweisführung des Ausgangs vorhergehender Nr. erwähnten umgekehrten Satzes werden wir jene Bestandtheile in Kürze und gewissermaßen nur vorbeigehend berühren, zu denen analoge in dem Falle noch existiren, wo V eine Function nur einer Variabeln vorausgesetzt ward; wodurch allein uns möglich wird, ohne Abbruch an Strenge, lediglich durch Vermeidung unnützer Wiederholungen, eine Erleichterung in der Uebersicht des Ganges dieser Beweisführnng zu erzielen.

Daß aus den Gleichungen in (16) und (16′) das Doppelsystem der Gleichungen in (15) in ähnlicher Weise hergestellt werden kann, als in Nr. 373 aus den Gleichungen in (6) das System in (5) zu ziehen nachgewiesen ward, leuchtet beim bloßen Hinblick auf besagte Gleichungen ein; daher erübriget uns noch, sämmtliche in (13) und (14)enthaltenen Gleichungen, als Folgen des Doppelsystems in (15) darzuthun.

Die Gleichungen in (13) und (14) umfassen vier abgesonderte Systeme, diese wollen wir einzeln oder abgesondert vornehmen, und jedes als eine Folge des Doppelsystems der Gleichungen in (15) darthun.

a. Die Gleichung (13). Verfährt man mit jedem der Systeme in (15), mit dem zur Linken in gleicher und mit dem zur Rechten in analoger Weise, wie in Nr. 374 mit dem Systeme der Gleichungen in (5); nimmt hierauf dann die Summe beider Ergebnisse: so gelangt man nach einer Integration dieses Summenergebnisses, mit Zuziehung des am angeführten Orte geltend gemachten Grundes betreffend die Nullsetzung der Integrationsconstante, genau auf die angekündigte Gleichung in (13).

b. Das System der Gleichungen in (14), so aus der ersten dieser drei Gleichungen hervorgeht. Dieses System geht aus dem zur Linken in (15) befindlichen Gleichungensystem genau in derselben Weise hervor, wie wir bei Differenzialfunctionen einer Variabeln, in der Nr. 376 sämmtliche

Gleichungen in (4), als Folgen der Gleichungen in (5) dargestellt haben.

c. Das aus der zweiten Gleichung in (14) zu ziehende System von Gleichungen. Behandelt man das System zur Rechten in (15) analog wie in dem vorausgehenden Falle das System zur Linken behandelt werden mußte; so stellen sich auch die gegenwärtig angekündigten Gleichungen als Folgen der Gleichungen in (15) dar.

d. Das der dritten unter den Gleichungen in (14) entsprechende System von Gleichungen. Auch dieses System, das allerdings kein Analogon in dem Falle hat, wenn V bloß Differenzialfunction einer Variabeln vorstellt, stellt sich als Folge der Gleichungen in (15) dar, wie sofort eigens dargethan werden soll.

Bedenkt man nämlich, daß die in Nr. 375 aufgestellten allgemeinen Gleichungen nicht nur wenn die Function F daselbst die Größen $x, x_1, x_2, x_3, \ldots$ enthält, sondern auch dann noch Bestand haben, wenn dieselbe Function überdieß noch von den in den Gleichungen (11) festgestellten Größen $y, y_1, y_2, \ldots$ abhängig ist; so sind wir auch zur Aufstellung zweier zu den in (7) Nr. 376 ganz analogen Gleichungen berechtiget, die, mit diesen vereint, folgendes System darbieten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(d.F)}{dx} &= d.\frac{dF}{dx}, & \frac{d(d.F)}{dx_p} &= d.\frac{dF}{dx_p} + \frac{dF}{dx_{p-1}}, \\ \frac{d(d.F)}{dy} &= d.\frac{dF}{dy}, & \frac{d(d.F)}{dy_q} &= d.\frac{dF}{dy_q} + \frac{dF}{dy_{q-1}}. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Mittelst dieser Hülfsgleichungen, in denen F irgend eine Function der sämmtlichen in (11) vorkommenden Größen vorstellt, und in welchen p jede der Zahlen:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots m-1$$

und q jede der folgenden:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots n-1$$

vorstellen soll, fällt es nicht mehr schwer auch die gegenwärtig in Rede stehenden Gleichungen, als Folgen der in (15) darzuthun, wie wir solches für eine Abtheilung wenigstens eigens zeigen wollen.

Differenzirt man nämlich die letzte der Gleichungen des Systems linkerhand in (15) partiell nach $y_q$; so bietet unter den Hülfsgleichungen in (17) die zweite auf der zweiten Zeile folgendes Ergebniß dar:

$$\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y_q}+\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y_{q-1}}=\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y_q}.$$

Mit Ausnahme der ersten und letzten Gleichung aus dem Systeme rechterhand in (15) ist jede andere dieses Systems von folgender Form:

$$Y^{(q-1)}+\mathrm{d}.Y^{(q)}=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y_q};$$

differenzirt man diese partiell nach x und berücksichtiget die erste auf der ersten Zeile in (17) befindliche Hülfsgleichung, so stellt sich folgende Gleichung heraus:

$$\frac{\mathrm{d}Y^{(q-1)}}{\mathrm{d}x}+\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}Y^{(q)}}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}y_q\,\mathrm{d}x}.$$

Wird nun diese Gleichung von der vorigen, durch partielles differenziren gewonnenen, subtrahirt; so erhält man:

$$\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y_q}+\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y_{q-1}}=\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}Y^{(q)}}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}Y^{(q-1)}}{\mathrm{d}x}. \qquad (\iota)$$

Differenziren wir ferner von den Gleichungen in (15) die letzte aus dem Systeme linkerhand partiell nach $y_n$, die erste aus dem Systeme rechterhand partiell nach x, berücksichtigen aber bei der erstern partiellen Differenziation die betreffende Hülfsgleichung aus (17), so stellt der Unterschied dieser beiden Ergebnisse die folgende Gleichung dar:

$$\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y_n}+\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y_{n-1}}-\frac{\mathrm{d}Y^{(n-1)}}{\mathrm{d}x}=0;$$

nach dem getroffenen Uebereinkommen in Nr. 381 ist X unabhängig von $y_n$, daher hat man:

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y_n}=0, \text{ also auch } \mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y_n}=0;$$

sonach hat man folgende Gleichung:

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y_{n-1}}=\frac{\mathrm{d}Y^{(n-1)}}{\mathrm{d}x}. \qquad (\varkappa)$$

Mit Hülfe dieser bietet die vorige (ι), wenn für q nach und nach die Werthe:

$$n-1\,,\ n-2\,,\ \ldots\ 3\,,\ 2\,,\ 1$$

gesetzt werden, ein System von Gleichungen dar, deren allgemeiner Repräsentant durch die folgende Gleichung dargestellt werden kann:

$$\frac{dX}{dy_{p''}} = \frac{dY^{(p'')}}{dx}\,,$$

wenn man in derselben $p''$ jeden der Werthe $0, 1, 2, 3, \ldots (n-1)$ sein läßt; welche, wie wir uns vorgesetzt, mit jener Abtheilung, so aus der dritten Gleichung in (14) bei der Annahme $k'' = 0$ gefolgert werden kann, identisch ist. — In ganz ähnlicher Weise stellt man aus dem Doppelsysteme in (15) Gleichungen her, die mit denen aus der dritten Gleichung in (14) bei den successiven Annahmen:

$$k'' = 1\,,\ k'' = 2\,,\ k'' = 3\,,\ \ldots\,,\ k'' = m-1\,,$$

gefolgerten, durchaus identisch sind.

Durch ein Zusammenfassen des in vorliegender Nr. Mitgetheilten sehen wir uns vorerst zum Schlusse berechtiget, daß, bei einem Zugrundelegen der Gleichungen in (16) und (16′) vorangehender Nr., die Gleichungen in (13) und (14) aus Nr. 381 als nothwendige Folgen derselben herausgehen. Nun sind aber die letztgenannten die einzig wesentlichen, damit bei Zugrundelegung der Gleichungen (11), der Ausdruck zur Rechten in Gleichung (12), als integrable Differenzialfunction erscheine; sonach wird solches auch eintreten, wenn die Gleichungen in (16) und (16′) weder auf einen Widerspruch noch auf irgend einen Zusammenhang unter den Variabeln oder deren Differenzialien hinführen. Dieses wird offenbar erreicht, wenn je die erste Gleichung in jedem dieser zwei Systeme, als eine identische erkannt wird; denn dann stellen die auf diesen folgenden Gleichungen, in beiden Systemen, Bestimmungen für $X, X^{(1)}, X^{(2)} \ldots$, $Y, Y^{(1)}, Y^{(2)} \ldots$ dar, welche in den Differenzialausdruck zur Rechten in Gleichung (12) gesetzt, denselben in eine integrable lineare Differenzialfunction von $x, x_1, x_2, \ldots x_{m-1}, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ umsetzen. Es stellen sonach die erste der Gleichungen in (16) und die erste der Gleichungen in (16′) die einzig

nothwendigen Bedingungsgleichungen dar, damit die in Nr. 381 vorgelegte gedachte Differenzialfunction V zweier Variabeln x und y, als Ergebniß einer totalen Differenziation, in der daselbst beschriebenen Weise, erkannt werde.

384. Aus den Gleichungen (16) und (16′) lassen sich ähnliche Gleichungen und in ähnlicher Weise herstellen, als in dem Falle einer Variabeln, aus den analogen zu diesen, die Gleichungen (10) erhalten worden sind. Die Herstellung jedoch dieser analogen zu (10) für den vorliegenden Fall dürfte kaum irgend welcher Schwierigkeit unterliegen; daher unterlassen wir auch solches, und theilen nur noch einen besondern Fall zur Anwendung der vorausgehenden allgemeinen Ergebnisse mit.

Wenn man:

$$V = Pdx + Qdy$$

annimmt, wo P und Q beliebige Functionen von x und y vorstellen, so werden wir mit Zuziehung der vorausgehenden allgemeinen Ergebnisse die Bedingung der Integrabilität dieser Differenzialfunction herzustellen suchen.

Da man hier:

$$V = Px_1 + Qy_1$$

hat, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dP}{dx}x_1 + \frac{dQ}{dx}y_1, \quad \frac{dV}{dx_1} = P,$$

$$\frac{dV}{dy} = \frac{dP}{dy}x_1 + \frac{dQ}{dy}y_1, \quad \frac{dV}{dy_1} = Q,$$

und mithin auch die folgenden:

$$d.\frac{dV}{dx_1} = \frac{dP}{dx}x_1 + \frac{dP}{dy}y_1,$$

$$d.\frac{dV}{dy_1} = \frac{dQ}{dx}x_1 + \frac{dQ}{dy}y_1.$$

Mit Hülfe dieser Ergebnisse gehen die Bedingungsgleichungen der Integrabilität der hier vorgelegten Differenzialfunction V, die je erste der in (16) und (16′) aufgestellten Gleichungen, in folgende über:

$$\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) y_1 = 0\,, \quad \left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) x_1 = 0\,,$$

welche nur dann identisch bestehen, wenn man:

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$$

voraussetzt. Besteht nun diese Bedingungsgleichung als Gleichheit, dann wird, weil die Gleichungen in (16) und (16′) nunmehr folgende Bestimmungen:

$$X = P \text{ und } Y = Q$$

darbieten, die allgemeine Gleichung (12) in folgende übergehen:

$$d.V' = Pdx + Qdy\,;$$

und der Ausdruck zur Rechten wird, nach der allgemeinen Beweisführung, ein vollständiges Differenziale von x und y sein, das, in Uebereinstimmung mit dem Theorem in Nr. 282, nach den daselbst mitgetheilten Vorschriften integrirt, das Integrale von V, nämlich V′, als Function von x, y und einer willkührlichen Constanten darbieten wird.

385. Nachdem wir auch den Fall, wenn V eine Differenzialfunction zweier Variabeln, irgend welcher Klassenzahl k, vorstellt, in allen seinen wesentlichern Theilen beleuchtet und begründet haben, erachten wir es für unnöthig auch noch die einzelnen Theile des Falles, wenn V eine solche Differenzialfunction mehrerer Variabeln vorstellt, in systematischer Anordnung vorzuführen und dieselben zu begründen; daher wir uns nur noch auf die Mittheilung der Endergebnisse dieses allgemeinsten Falles beschränken.

Wenn V irgend eine Differenzialfunction der kten Klasse einer beliebigen Anzahl von Variabeln x, y, z, .. vorstellt, und zwar der mten Ordnung in Bezug auf x, der nten in Bezug auf y, der pten in Bezug auf z u. s. w.; so ist dieselbe einer unmittelbar vorhergehenden Integralfunction fähig, die eine zur (k — 1)ten Klasse gehörende Differenzialfunction der (m — 1)ten Ordnung in Bezug auf x, der (n — 1)ten Ordnung in Bezug auf y, der (p — 1)ten Ordnung in Bezug auf z u. s. w. vorstellen wird, wenn folgende Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{dV}{dx} - d\,.\,\frac{dV}{dx_1} + d^2\,.\,\frac{dV}{dx_2} - \ldots (-1)^m d^m\,.\,\frac{dV}{dx_m}\,, \\ 0 &= \frac{dV}{dy} - d\,.\,\frac{dV}{dy_1} + d^2\,.\,\frac{dV}{dy_2} - \ldots (-1)^n d^n\,.\,\frac{dV}{dy_n}\,, \\ 0 &= \frac{dV}{dz} - d\,.\,\frac{dV}{dz_1} + d^2\,.\,\frac{dV}{dz_2} - \ldots (-1)^p d^p\,.\,\frac{dV}{dz_p}\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,, \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

deren Anzahl gleich der der gegenseitig unabhängigen Variabeln x, y, z, . . . ist, identisch realisirt werden.

Zur Vereinfachung der Darstellung hat man hier gleichwie in den vorausgeschickten zwei Fällen folgende Gleichungen festgestellt:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= dx\,,\ x_2 = dx_1\,,\ x_3 = dx_2\,,\ \ldots\ x_m = dx_{m-1}\,, \\ y_1 &= dy\,,\ y_2 = dy_1\,,\ y_3 = dy_2\,,\ \ldots\ y_n = dy_{n-1}\,, \\ z_1 &= dz\,,\ z_2 = dz_1\,,\ z_3 = dz_2\,,\ \ldots\ z_p = dz_{p-1}\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

Wenn keine der in (A) zusammengestellten Bedingungsgleichungen identisch realisirt wird, dann ist V auch nach keiner der Variabeln eines unmittelbar vorhergehenden Integrals fähig. Beim identischen Eintreffen einiger dieser Bedingungsgleichungen, z. B. der ersten und zweiten, nicht aber der übrigen; dann wird auch V nur in Beziehung auf x und y, mit Ausschließung von z und der nach übrigen Variabeln, eines unmittelbar vorhergehenden Integrals fähig sein, in welchem Falle die letzgenannten Variabeln als constante Größen zu behandeln sein werden. Beim Eintreffen endlich aller dieser Bedingungsgleichungen in (A), dann läßt V in Beziehung auf sämmtliche Variabeln eine unmittelbar vorhergehende Integralfunction zu, die folgendermaßen bestimmt wird.

Bei Feststellung der Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{dV}{dx_1} - d\,.\,\frac{dV}{dx_2} + d^2\,.\,\frac{dV}{dx_3} - \ldots (-1)^{m-1} d^{m-1}\,.\,\frac{dV}{dx_m}\,, \\ X^{(1)} &= \frac{dV}{dx_2} - d\,.\,\frac{dV}{dx_3} + d^2\,.\,\frac{dV}{dx_4} - \ldots (-1)^{m-2} d^{m-2}\,.\,\frac{dV}{dx_m}\,, \\ X^{(2)} &= \frac{dV}{dx_3} - d\,.\,\frac{dV}{dx_4} + d^2\,.\,\frac{dV}{dx_5} - \ldots (-1)^{m-3} d^{m-3}\,.\,\frac{dV}{dx_m}\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X^{(m-2)} &= \frac{dV}{dx_{m-1}} - d\,.\,\frac{dV}{dx_m}\,, \\ X^{(m-1)} &= \frac{dV}{dx_m}\,, \end{aligned}\right\} \quad (C)$$

$$\left.\begin{aligned}
Y &= \frac{dV}{dy_1} - d.\frac{dV}{dy_2} + d^2.\frac{dV}{dy_3} - \ldots (-1)^{n-1} d^{n-1}.\frac{dV}{dy_n},\\
Y^{(1)} &= \frac{dV}{dy_2} - d.\frac{dV}{dy_3} + d^2.\frac{dV}{dy_4} - \ldots (-1)^{n-2} d^{n-2}.\frac{dV}{dy_n},\\
Y^{(2)} &= \frac{dV}{dy_3} - d.\frac{dV}{dy_4} + d^2.\frac{dV}{dy_5} - \ldots (-1)^{n-3} d^{n-3}.\frac{dV}{dy_n},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Y^{(n-2)} &= \frac{dV}{dy_{n-1}} - d.\frac{dV}{dy_n},\\
Y^{(n-1)} &= \frac{dV}{dy_n},
\end{aligned}\right\} (C')$$

$$\left.\begin{aligned}
Z &= \frac{dV}{dz_1} - d.\frac{dV}{dz_2} + d^2.\frac{dV}{dz_3} - \ldots (-1)^{p-1} d^{p-1}.\frac{dV}{dz_p},\\
Z^{(1)} &= \frac{dV}{dz_2} - d.\frac{dV}{dz_3} + d^2.\frac{dV}{dz_4} - \ldots (-1)^{p-2} d^{p-2}.\frac{dV}{dz_p},\\
Z^{(2)} &= \frac{dV}{dz_3} - d.\frac{dV}{dz_4} + d^2.\frac{dV}{dz_5} - \ldots (-1)^{p-3} d^{p-3}.\frac{dV}{dz_p},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Z^{(p-2)} &= \frac{dV}{dz_{p-1}} - d.\frac{dV}{dz_p},\\
Z^{(p-1)} &= \frac{dV}{dz_p},
\end{aligned}\right\} (C'')$$

u. s. w.,

geht in der Gleichung:

$$\begin{aligned}
d.V' = {} & Xdx + X^{(1)}dx_1 + X^{(2)}dx_2 + \ldots + X^{(m-1)}dx_{m-1}\\
& + Ydy + Y^{(1)}dy_1 + Y^{(2)}dy_2 + \ldots + Y^{(n-1)}dy_{n-1}\\
& + Zdz + Z^{(1)}dz_1 + Z^{(2)}dz_2 + \ldots + Z^{(p-1)}dz_{p-1}\\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad (D)
\end{aligned}$$

der Ausdruck rechterhand vom Gleichheitszeichen in ein auf sämmtliche Variabeln:

$x$, $x_1$, $x_2$, . . . $y$, $y_1$, $y_2$ . . . $z$, $z_1$, $z_2$, . . . u. s. w.

bezügliches vollständiges oder integrirbares Differenziale über, das, nach Nr. 285 integrirt und durch $V'$ dargestellt, die unmittelbar vorhergehende Integralfunction zu $V$, mit Beachtung der Gleichungen in (B), darbieten wird. Diese Integralfunction $V'$ wird, falls die

Klassenzahl $k > 1$ ist, keine willkührliche Constante mitführen; nur bei $k = 1$ kann eine solche eingeführt werden.

386. Mit der Anwendung der in vorangehender Nr. zusammengestellten allgemeinen Ergebnisse auf den besondern Fall:

$$V = Mdx^2 + Ndy^2 + Pdz^2 + Qdxdy + Rdzdx + Sdydz + Td^2x + Ud^2y + Wd^2z,$$

schließen wir die Untersuchungen über Integrabilität nichtlinearer mehrgliedriger Differenzialfunctionen.

Da man nach den allgemeinen Gleichungen (B):

$$V = Mx_1^2 + Ny_1^2 + Pz_1^2 + Qx_1y_1 + Rz_1x_1 + Sy_1z_1 + Tx_2 + Uy_2 + Wz_2$$

hat, so ergeben sich, wenn M, N, P, Q, R, S, T, U, W als beliebige Functionen von x, y, z auftreten, folgende Gleichungen:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dM}{dx}x_1^2 + \frac{dN}{dx}y_1^2 + \frac{dP}{dx}z_1^2 + \frac{dQ}{dx}x_1y_1 + \frac{dR}{dx}z_1x_1 + \frac{dS}{dx}y_1z_1 + \frac{dT}{dx}x_2 + \frac{dU}{dx}y_2 + \frac{dW}{dx}z_2,$$

$$\frac{dV}{dy} = \frac{dM}{dy}x_1^2 + \frac{dN}{dy}y_1^2 + \frac{dP}{dy}z_1^2 + \frac{dQ}{dy}x_1y_1 + \frac{dR}{dy}z_1x_1 + \frac{dS}{dy}y_1z_1 + \frac{dT}{dy}x_2 + \frac{dU}{dy}y_2 + \frac{dW}{dy}z_2,$$

$$\frac{dV}{dz} = \frac{dM}{dz}x_1^2 + \frac{dN}{dz}y_1^2 + \frac{dP}{dz}z_1^2 + \frac{dQ}{dz}x_1y_1 + \frac{dR}{dz}z_1x_1 + \frac{dS}{dz}y_1z_1 + \frac{dT}{dz}x_2 + \frac{dU}{dz}y_2 + \frac{dW}{dz}z_2,$$

$$\frac{dV}{dx_1} = 2Mx_1 + Qy_1 + Rz_1,$$

$$\frac{dV}{dy_1} = 2Ny_1 + Sz_1 + Qx_1,$$

$$\frac{dV}{dz_1} = 2Pz_1 + Rx_1 + Sy_1,$$

$$\frac{dV}{dx_2} = T, \quad \frac{dV}{dy_2} = U, \quad \frac{dV}{dz_2} = W;$$

die sechs letztern dieser Gleichungen führen auf folgende;

$$d.\frac{dV}{dx_1} = 2\frac{dM}{dx}x_1^2 + \frac{dQ}{dy}y_1^2 + \frac{dR}{dz}z_1^2 + \left(2\frac{dM}{dy} + \frac{dQ}{dx}\right)x_1y_1 + \left(\frac{dR}{dx} + 2\frac{dM}{dz}\right)z_1x_1 + \left(\frac{dQ}{dz} + \frac{dR}{dy}\right)y_1z_1 + 2Mx_2 + Qy_2 + Rz_2,$$

$$d.\frac{dV}{dy_1} = \frac{dQ}{dx}x_1^2 + 2\frac{dN}{dy}y_1^2 + \frac{dS}{dz}z_1^2$$
$$+ \left(\frac{dQ}{dy} + 2\frac{dN}{dx}\right)x_1y_1 + \left(\frac{dS}{dx} + \frac{dQ}{dz}\right)z_1x_1 + \left(2\frac{dN}{dz} + \frac{dS}{dy}\right)y_1z_1$$
$$+ Qx_2 + 2Ny_2 + Sz_2,$$

$$d.\frac{dV}{dz_1} = \frac{dR}{dx}x_1^2 + \frac{dS}{dy}y_1^2 + 2\frac{dP}{dz}z_1^2$$
$$+ \left(\frac{dR}{dy} + \frac{dS}{dx}\right)x_1y_1 + \left(2\frac{dP}{dx} + \frac{dR}{dz}\right)z_1x_1 + \left(\frac{dS}{dz} + 2\frac{dP}{dy}\right)y_1z_1$$
$$+ Rx_2 + Sy_2 + 2Pz_2,$$

$$d.\frac{dV}{dx_2} = \frac{dT}{dx}x_1 + \frac{dT}{dy}y_1 + \frac{dT}{dz}z_1,$$

$$d.\frac{dV}{dy_2} = \frac{dU}{dx}x_1 + \frac{dU}{dy}y_1 + \frac{dU}{dz}z_1,$$

$$d.\frac{dV}{dz_2} = \frac{dW}{dx}x_1 + \frac{dW}{dy}y_1 + \frac{dW}{dz}z_1;$$

endlich werden aus den drei letztern dieser Gleichungen die folgenden gezogen:

$$d^2.\frac{dV}{dx_2} = \frac{d^2T}{dx^2}x_1^2 + \frac{d^2T}{dy^2}y_1^2 + \frac{d^2T}{dz^2}z_1^2$$
$$+ 2\frac{d^2T}{dxdy}x_1y_1 + 2\frac{d^2T}{dzdx}z_1x_1 + 2\frac{d^2T}{dydz}y_1z_1$$
$$+ \frac{dT}{dx}x_2 + \frac{dT}{dy}y_2 + \frac{dT}{dz}z_2,$$

$$d^2.\frac{dV}{dy_2} = \frac{d^2U}{dx^2}x_1^2 + \frac{d^2U}{dy^2}y_1^2 + \frac{d^2U}{dz^2}z_1^2$$
$$+ 2\frac{d^2U}{dxdy}x_1y_1 + 2\frac{d^2U}{dzdx}z_1x_1 + 2\frac{d^2U}{dydz}y_1z_1$$
$$+ \frac{dU}{dx}x_2 + \frac{dU}{dy}y_2 + \frac{dU}{dz}z_2,$$

$$d^2.\frac{dV}{dz_2} = \frac{d^2W}{dx^2}x_1^2 + \frac{d^2W}{dy^2}y_1^2 + \frac{d^2W}{dz^2}z_1^2$$
$$+ 2\frac{d^2W}{dxdy}x_1y_1 + 2\frac{d^2W}{dzdx}z_1x_1 + 2\frac{d^2W}{dydz}y_1z_1$$
$$+ \frac{dW}{dx}x_2 + \frac{dW}{dy}y_2 + \frac{dW}{dz}z_2.$$

Die vorgelegte Differenzialfunction, mit der allgemeinen V voran-

gehender Nr. verglichen, bietet zuerst:

$$m = n = p = 2$$

dar; daher gehen die allgemeinen Bedingungsgleichungen (A) daselbst, vermöge der vorausgeschickten Gleichungen, in folgende über:

$$0 = \left(-\frac{dM}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2}\right) x_1^2 + \left(\frac{dN}{dx} - \frac{dQ}{dy} + \frac{d^2T}{dy^2}\right) y_1^2 + \left(\frac{dP}{dx} - \frac{dR}{dz} + \frac{d^2T}{dz^2}\right) z_1^2$$
$$+ 2\left(-\frac{dM}{dy} + \frac{d^2T}{dxdy}\right) x_1 y_1 + 2\left(-\frac{dM}{dz} + \frac{d^2T}{dxdz}\right) z_1 x_1 + \left(\frac{dS}{dx} - \frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz} + 2\frac{d^2T}{dydz}\right) y_1 z_1$$
$$+ 2\left(-M + \frac{dT}{dx}\right) x_2 + \left(-Q + \frac{dU}{dx} + \frac{dT}{dy}\right) y_2 + \left(-R + \frac{dW}{dx} + \frac{dT}{dz}\right) z_2 ,$$

$$0 = \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2U}{dx^2}\right) x_1^2 + \left(-\frac{dN}{dy} + \frac{d^2U}{dy^2}\right) y_1^2 + \left(\frac{dP}{dy} - \frac{dS}{dz} + \frac{d^2U}{dz^2}\right) z_1^2$$
$$+ 2\left(-\frac{dN}{dx} + \frac{d^2U}{dxdy}\right) x_1 y_1 + \left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz} - \frac{dS}{dx} + 2\frac{d^2U}{dxdz}\right) z_1 x_1 + 2\left(-\frac{dN}{dz} + \frac{d^2U}{dydz}\right) y_1 z_1$$
$$+ \left(-Q + \frac{dU}{dx} + \frac{dT}{dy}\right) x_2 + 2\left(-N + \frac{dU}{dy}\right) y_2 + \left(-S + \frac{dW}{dy} + \frac{dU}{dz}\right) z_2 ,$$

$$0 = \left(\frac{dM}{dz} - \frac{dR}{dx} + \frac{d^2W}{dx^2}\right) x_1^2 + \left(\frac{dN}{dz} - \frac{dS}{dy} + \frac{d^2W}{dy^2}\right) y_1^2 + \left(-\frac{dP}{dz} + \frac{d^2W}{dz^2}\right) z_1^2$$
$$+ \left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} - \frac{dS}{dx} + 2\frac{d^2W}{dxdy}\right) x_1 y_1 + 2\left(-\frac{dP}{dx} + \frac{d^2W}{dxdz}\right) z_1 x_1 + 2\left(-\frac{dP}{dy} + \frac{d^2W}{dydz}\right) y_1 z_1$$
$$+ \left(-R + \frac{dW}{dx} + \frac{dT}{dz}\right) x_2 + \left(-S + \frac{dW}{dy} + \frac{dU}{dz}\right) y_2 + 2\left(-P + \frac{dW}{dz}\right) z_2 ,$$

welche nur dann identisch realisirt werden, wenn jeder der Faktoren von:

$$x_1^2 , \; y_1^2 , \; z_1^2 , \quad x_1 y_1 , \; z_1 x_1 , \; y_1 z_1 , \quad x_2 , y_2 , \; z_2$$

in jeder dieser Gleichungen identisch in Null übergeht.

Das Nullsetzen der Faktoren von $x_2$, $y_2$, $z_2$ in jeder dieser drei Bedingungsgleichungen führt auf folgende sechs Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} M = \frac{dT}{dx} , \quad N = \frac{dU}{dy} , \quad P = \frac{dW}{dz} , \\ Q = \frac{dU}{dx} + \frac{dT}{dy} , \; R = \frac{dT}{dz} + \frac{dW}{dx} , \; S = \frac{dW}{dy} + \frac{dU}{dz} ; \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

und da bei der Annahme des identischen Bestandhabens dieser sechs Gleichungen sämmtliche vorhin erwähnten Faktoren in Nullen übergehen: so sind wir zur Aussage berechtiget, daß die hier vorge-

legte Differenzialfunction unmittelbares Ergebniß einer totalen Differenziation einer die Variabeln x, y, z, dx, dy, dz implicirenden Function sein wird, wenn die eben aufgestellten Gleichungen in (a) als Gleichheiten erkannt werden.

Unter der Annahme des identischen Bestandhabens dieser Bedingungsgleichungen in (a) bieten die oben aufgestellten Gleichungen, nach den allgemeinen Gleichungen (C), (C′), (C″) vorangehender Nr., folgende Bestimmungen für

$$X\,,\ X^{(1)}\,,\ Y\,,\ Y^{(1)}\,,\ Z\,,\ Z^{(1)}$$

dar:

$$X = \left(2M - \frac{dT}{dx}\right) x_1 + \left(Q - \frac{dT}{dy}\right) y_1 + \left(R - \frac{dT}{dz}\right) z_1\,,\quad X^{(1)} = T\,,$$

$$Y = \left(Q - \frac{dU}{dx}\right) x_1 + \left(2N - \frac{dU}{dy}\right) y_1 + \left(S - \frac{dU}{dz}\right) z_1\,,\quad Y^{(1)} = U\,,$$

$$Z = \left(R - \frac{dW}{dx}\right) x_1 + \left(S - \frac{dW}{dy}\right) y_1 + \left(2P - \frac{dW}{dz}\right) z_1\,,\quad Z^{(1)} = W\,,$$

oder auch, beachtend die Bedingungsgleichungen (a), folgende:

$$X = M x_1 + \frac{dU}{dx} y_1 + \frac{dW}{dx} z_1\,,\quad X^{(1)} = T\,,$$

$$Y = \frac{dT}{dy} x_1 + N y_1 + \frac{dW}{dy} z_1\,,\quad Y^{(1)} = U\,,$$

$$Z = \frac{dT}{dz} x_1 + \frac{dU}{dz} y_1 + P z_1\,,\quad Z^{(1)} = W\,.$$

Werden diese Ergebnisse in die allgemeine Gleichung (D) vorangehender Nr. gesetzt, so geht solche über in:

$$d.V' = \left(M x_1 + \frac{dU}{dx} y_1 + \frac{dW}{dx} z_1\right) dx + T\,dx_1$$
$$+ \left(\frac{dT}{dy} x_1 + N y_1 + \frac{dW}{dy} z_1\right) dy + U\,dy_1$$
$$+ \left(\frac{dT}{dz} x_1 + \frac{dU}{dz} y_1 + P z_1\right) dz + W\,dz_1\,,$$

in der beim Eintreffen der Bedingungsgleichungen (a), der Ausdruck zur Rechten eine vollständige oder integrirbare lineare Differenzialfunction vorstellt. Wir haben auch in der That besagte Differenzialfunction nach Nr. 285 integrirt, und sind mit beständiger Zuziehung

der Bedingungsgleichungen (a) auf folgende Bestimmung für V' gelangt:

$$T x_1 + U y_1 + W z_1 + \text{Const.};$$

restituirt man aber für $x_1$, $y_1$, $z_1$ deren Werthe dx, dy, dz, so stellt sich für die willkührliche Integrationsconstante der Nullwerth heraus und man hat:

$$V' = T\,dx + U\,dy + W\,dz,$$

so daß man, beim Eintreffen der Bedingungsgleichungen (a), die Bestimmungsgleichung:

$$\int V = V'$$

hat, wo V die am Eingange vorgelegte Differenzialfunction ist.

Anmerkung. Man würde irren, wenn man in den Bedingungsgleichungen (a):

$$T = 0, \quad U = 0, \quad W = 0$$

annähme, in der Meinung, dadurch die Bedingungsgleichungen der Integrabilität folgender Differenzialfunction:

$$M\,dx^2 + N\,dy^2 + P\,dz^2 + Q\,dx\,dy + R\,dz\,dx + S\,dy\,dz$$

zu erzielen. — Allerdings entsteht diese Differenzialfunction aus der am Eingange dieser Nr. vorgelegten, wenn in letzterer $T = 0$, $U = 0$, $W = 0$ angenommen wird; allgemeiner wird aber solche durch die Annahme, die Differenzialien dx, dy, dz sind unendlich kleinwerdende constante Größen, aus derselben gefolgert, wo dann die Coefficienten T, U und W Nullwerthe oder beliebige Functionen von x, y, z vorstellen können. — Wenn demnach aus den Bedingungsgleichungen (a) die Bedingungen der Integrabilität der gegenwärtig in Rede stehenden (der zuletzt aufgestellten) Differenzialfunction zu folgern sind; so eliminire man vorerst aus den Bedingungsgleichungen in (a) diese Coefficienten oder Functionen T, U, W: das Ergebniß dieser Elimination wird dann dasselbe sein, das die Gleichungen (3) Nr. 344 als Eliminationsergebniß der Größen A', B', C' dargeboten. Es stellen nämlich diese citirten Gleichungen die Lösung desselben Problems vor, wo die Buchstaben A, B, C, D, E, F daselbst gegenwärtig durch M, N, P, Q, R, S ersetzt sind.

# Achtes Kapitel.

## Anwendungen der zwei-, drei- und mehrfachen bestimmten Integralien.

### §. I.

### Darstellung von Functionen einer und mehrerer Variabeln durch mehrfache bestimmte Integralien.

387. Wir könnten die im ersten Bande, in den Nrn. 169—171 gewonnenen Sätze zu Grunde legen, um eine für sämmtliche reellen Werthe der allgemeinen Größe continuirliche Function durch eine Doppelintegrale darzustellen. Eines Theiles sind wir aber gegenwärtig in der Lage, diese citirten Sätze in größerer Allgemeinheit, als dort geschah, mitzutheilen, wodurch uns auch eine Function mit bestimmten Continuitätsgrenzen der allgemeinen Größe für irgend ein Intervall dieser Continuität durch ein Doppelintegrale darzustellen möglich wird; andern Theiles haben wir analoge Sätze zu diesen, die auf mehr denn einer Variabeln Bezug haben und zur Darstellung von Functionen mehrerer Variabeln durch mehrfache Integralien führen, gleichfalls noch mitzutheilen: daher ziehen wir es vor, von dem an den oben citirten Stellen Mitgetheilten ganz abzusehen, und den in Rede stehenden Gegenstand in seiner Totalität und Allgemeinheit im vorliegenden Paragraphen zu entwickeln.

388. Um noch allgemeinere, als die in den Nrn. 169—171 des ersten Bandes gewonnenen Sätze zu erhalten, gehen wir gegenwärtig von folgender Gleichung aus:

$$\int_a^A \varphi(x)\,\mathrm{Cos.}\,\alpha x\,dx = F(\alpha)\,. \qquad (1)$$

In dieser Gleichung nehmen wir die Integrationsgrenzen a und A, als reelle mit einerlei Vorzeichen versehene Größen an, unter denen aber auch eine gleich Null sein kann; dabei setzen wir fest, daß

A — a eine angebbare positive Größe vorstelle, welche Bedingung wir in der Folge der Kürze wegen durch:

$$A - a = +$$

andeuten werden. Die Function $\varphi(x)$ in dieser Gleichung setzen wir von der allgemeinen Größe $\alpha$ unabhängig, und für alle im Bereiche der Integrationsgrenzen a und A fallenden Werthe von x continuirlich voraus. Betreffend endlich die Function $F(\alpha)$, die den Werth des bestimmten Integrals zur Linken repräsentirt, wird solche auch von den Integrationsgrenzen a und A dependiren; allein da die analytischen Operationen, die wir diese Gleichung (1) unterziehen werden, besagte Grenzen nicht weiter betreffen, haben wir, zu Vereinfachung der Darstellung, deren Anwesenheit in der Function F besonders herauszuheben oder anzudeuten unterlassen.

Wird nun die vorgelegte Gleichung (1) mit $\mathrm{Cos}.x'\alpha\,d\alpha$ multiplicirt und zu beiden Seiten vom Gleichheitszeichen die Integration nach $\alpha$, von $\alpha=0$ bis $\alpha=\infty$, angedeutet; wird dann das Produkt $\mathrm{Cos}.\alpha x\ \mathrm{Cos}.x'\alpha$ in eine Summe aufgelöst, wodurch der Ausdruck linkerhand vom Gleichheitszeichen in eine Summe zweier Doppelintegralien umgesetzt werden kann: so stellt sich folgende Gleichung heraus:

$$\int_0^\infty\int_a^A \varphi(x)\mathrm{Cos}.\alpha(x'-x)\,dx\,d\alpha + \int_0^\infty\int_a^A \varphi(x)\mathrm{Cos}.\alpha(x'+x)\,dx\,d\alpha = 2\int_0^\infty F(\alpha)\mathrm{Cos}.x'\alpha\,d\alpha,$$

in der man noch über x' beliebig verfügen kann. Erklären wir sonach x' als reelle Größe, die positiv oder negativ sein soll, je nachdem das gemeinschaftliche Zeichen von a und A positiv oder negativ ist; setzen wir dieselbe überdieß inner diesen Größen liegend voraus, in der Weise, daß nach dem oben getroffenen Uebereinkommen folgende Bedingungsgleichungen:

$$A - x' = +\,,\quad x' - a = +$$

Bestand haben: so reducirt sich der Ausdruck zur Linken in der zuletzt aufgestellten Gleichung, beachtend nämlich die Gleichung:

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos}.\,p\,x\,dx = 0\,,$$

die für jeden reellen nicht unendlichkleinwerdenden Werth von p besteht, lediglich auf das erste Glied, nämlich auf:

$$\int_0^{\infty}\int_a^{A} \varphi(x)\,\mathrm{Cos}.\alpha(x'-x)\,dx\,d\alpha\ .$$

Ja, auch dieser Ausdruck, der mit folgendem:

$$\int_a^{A}\int_0^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{Cos}.\alpha(x'-x)\,d\alpha\,dx\ ,$$

oder auch mit folgendem:

$$\int_a^{A}\left\{\int_0^{\infty}\mathrm{Cos}.\alpha(x'-x)\,d\alpha\right\}\varphi(x)\,dx$$

gleichbedeutend ist, reducirt sich aus gleichem Grunde auf:

$$\int_{x'-\omega}^{x'+\omega}\left\{\int_0^{\infty}\mathrm{Cos}.\alpha(x'-x)\,d\alpha\right\}\varphi(x)\,dx\ ,$$

wo $\omega$ eine unendlich kleinwerdende Größe repräsentirt. Denn vermöge der obigen Gleichung hat man:

$$\int_0^{\infty}\mathrm{Cos}.\alpha(x'-x)\,d\alpha=0\ ,$$

für alle Werthe von $x$, die um eine endliche Größe von $x'$ verschieden sind; und da die Größe $x'$ zwischen den auf $x$ bezüglichen Integrationsgrenzen, also zwischen a und A, enthalten ist: so erscheint letztere Behauptung gerechtfertiget, und die obige aus (1) gewonnene Gleichung geht nunmehr in folgende über:

$$\int_{x'-\omega}^{x'+\omega}\int_0^{\infty}\varphi(x)\,\mathrm{Cos}.\alpha(x'-x)\,d\alpha\,dx=2\int_0^{\infty}F(\alpha)\,\mathrm{Cos}.x'\alpha\,d\alpha\ ,$$

oder auch in:

$$\int_0^{\infty}\int_{x'-\omega}^{x'+\omega}\varphi(x)\,\mathrm{Cos}.\alpha(x'-x)\,dx\,d\alpha=2\int_0^{\infty}F(\alpha)\,\mathrm{Cos}.x'\alpha\,d\alpha\ .$$

Um den Ausdruck linker Hand vom Gleichheitszeichen weiter zu reduciren, wollen wir uns mit dem Theil desselben eigens befassen, der die auf $x$ bezügliche Integration betrifft, nämlich mit:

$$\int_{x'-\omega}^{x'+\omega}\varphi(x)\,\mathrm{Cos}.\alpha(x'-x)\,dx\ .$$

Wird in demselben $x$ in $x'+x$ umgesetzt, so hat man:

$$\int_{x'-\omega}^{x'+\omega}\varphi(x)\,\mathrm{Cos}.\alpha(x'-x)\,dx=\int_{-\omega}^{+\omega}\varphi(x'+x)\,\mathrm{Cos}.\alpha x\,dx\ ,$$

oder auch:

$$\int_{x'-\omega}^{x'+\omega} \varphi(x)\,\mathrm{Cos.}\alpha(x'-x)\,dx = \int_0^{\omega} \Big\{ \varphi(x'+x) + \varphi(x'-x) \Big\}\,\mathrm{Cos.}\alpha x\,dx\,,$$

aus der, wegen der unendlich kleinwerdenden obern Integrationsgrenze, die folgende gezogen wird:

$$\int_{x'-\omega}^{x'+\omega} \varphi(x)\,\mathrm{Cos.}\alpha(x'-x)\,dx = \omega \Big\{ \varphi(x'+\omega) + \varphi(x'-\omega) \Big\}\,\mathrm{Cos.}\alpha\omega\,;$$

es ist aber die Function $\varphi(x)$ für alle Werthe von $x = a$ bis $x = A$, als eine continuirliche vorausgesetzt worden, wodurch:

$$\varphi(x'+\omega) + \varphi(x'-\omega) = 2\,\varphi(x')$$

gesetzt werden darf: daher hat man:

$$\int_{x'-\omega}^{x'+\omega} \varphi(x)\,\mathrm{Cos.}\alpha(x'-x)\,dx = 2\,\omega\,\varphi(x')\,\mathrm{Cos.}\alpha\omega\,,$$

und die obige Gleichung geht nunmehr in folgende über:

$$\varphi(x')\,\omega \int_0^{\infty} \mathrm{Cos.}\omega\alpha\,d\alpha = \int_0^{\infty} F(\alpha)\,\mathrm{Cos.}x'\alpha\,d\alpha\,.$$

Stellt man endlich das unbestimmte Produkt aus der unendlich kleinwerdenden Größe $\omega$ in den unendlich großwerdenden Werth des Integrals $\int_0^{\infty} \mathrm{Cos.}\omega\alpha\,d\alpha$ durch M vor; so erhält man:

$$M\varphi(x') = \int_0^{\infty} F(\alpha)\,\mathrm{Cos.}x'\alpha\,d\alpha\,, \qquad (2)$$

in der noch die Ermittelung des unbestimmten Faktors M übrig bleibt.

Indem wir zur Bestimmung dieses unbekannten Faktors übergehen, heben wir den Umstand heraus, daß derselbe, wie die vorhergehende Gleichung zeigt, von der jeweiligen Beschaffenheit der Function $\varphi(x)$ unabhängig ist; daß derselbe folglich bei jedweder Verfügung über diese Function ein und denselben Werth nur darbieten kann.

Wird diesem nach

$$\varphi(x) = x^0 = 1$$

angenommen, so geht die Gleichung (1) über in:

$$F(\alpha) = \frac{\text{Sin.A}\alpha - \text{Sin.a}\alpha}{\alpha},$$

und die zuletzt aufgestellte allgemeine Gleichung (2) bietet, wegen:

$$\varphi(x') = x'^0 = 1,$$

folgende Bestimmungsgleichung für M dar:

$$M = \int_0^\infty \frac{\text{Sin.A}\alpha - \text{Sin.a}\alpha}{\alpha} \text{Cos.}x'\alpha \, d\alpha, \qquad (3)$$

die auch, wie folgt, gestellt werden kann:

$$2M = \int_0^\infty \frac{\text{Sin.}(A+x')\alpha}{\alpha} d\alpha + \int_0^\infty \frac{\text{Sin.}(A-x')\alpha}{\alpha} d\alpha$$

$$- \int_0^\infty \frac{\text{Sin.}(x'+a)\alpha}{\alpha} d\alpha + \int_0^\infty \frac{\text{Sin.}(x'-a)\alpha}{\alpha} d\alpha. \qquad (4)$$

Um aus dieser Gleichung den Werth von M, bei den verschiedenen Annahmen über a und A zu ermitteln, legen wir uns die im ersten Bande Nr. 159 aufgestellte Gleichung (56) vor, die folgendermaßen gestellt werden kann:

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin } p\alpha}{\alpha} e^{-m\alpha} d\alpha = \text{Arctang.} \frac{p}{m}. \qquad (5)$$

Dieselbe besteht bloß für positive Werthe von m, den Nullwerth jedoch mitbegriffen; hingegen findet solche, wie aus der Deduction derselben erhellet, sowohl für positive als negative Werthe von p Statt, in der Weise, daß das bestimmte Integrale linkerhand, je nachdem p positiv oder negativ ist, den positiven oder negativen kleinsten Bogen vorstellt, dessen trigonometrische Tangente durch den positiven Zahlenwerth $\frac{p}{m}$ ausgedrückt wird. Wenn sonach in dieser Gleichung (5) $m = 0$ oder gleich einer unendlichkleinwerdenden positiven Zahl angenommen wird; so hat man:

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin.}p\alpha}{\alpha} d\alpha = \pm \frac{\pi}{2}, \qquad (6)$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem p einen positiven oder einen negativen Zahlenwerth vorstellt.

Dieses vorausgesetzt bietet die Gleichung (4), wenn a und A, also auch $x'$, positive Werthe vorstellen, die den Bedingungen $A - x' = +$ und $x' - a = +$ nachkommen, folgende Bestimmungsgleichung für M dar:

$$2M = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi ;$$

wenn ferner a, A und sonach auch $x'$ negative Werthe repräsentiren, die denselben Annahmen, $A - x' = +$ und $x' - a = +$, entsprechen, dann zieht man aus derselben Gleichung (4) die folgende:

$$2M = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi ,$$

als Bestimmungsgleichung für M; — bei der einen wie bei der andern Annahme sonach, wenn nämlich a, A und $x'$ zugleich positiv oder zugleich negativ sind, wenn man nur:

$$A - x' = + \text{ und } x' - a = +$$

und folglich auch:

$$A - a = +$$

hat, stellt sich eine und dieselbe Bestimmung für M heraus, nämlich:

$$M = \frac{\pi}{2} .$$

Wird aber eine der Bedingungen:

$$A - x' = + , \quad x' - a = + ,$$

mit Beibehaltung der übrigen, durch eine der folgenden:

$$A - x' = 0 \text{ oder } x' - a = 0$$

ersetzt, d. h. wird M unter der Annahme bestimmt, $x'$ stellt einen der Grenzwerthe A oder a selbst vor; dann bietet die Gleichung (4) mit Zuziehung der Gleichung (6), bei der Annahme $x' = a$ sowohl, als bei der $x = A$, die Bestimmung:

$$M = \frac{\pi}{4}$$

dar, wobei nothwendig im ersten Falle a und im letztern A von Null verschieden sein muß. Hingegen zieht man, bei der Annahme:

$$x' = a = 0\,,$$

aus derselben Gleichung (4) oder, auf eine noch einleuchtendere Weise, aus der Gleichung (3) den obigen Werth von M, nämlich:

$$M = \tfrac{\pi}{2}\,;$$

denselben Werth von M findet man, wenn

$$x' = A = 0$$

angenommen wird, bei Berücksichtigung namentlich des Umstandes, daß, wegen der Bedingung $A - a = +$, alsdann die untere Integrationsgrenze nothwendig einen reellen negativen Werth vorstellt.

Diese drei Bestimmungsmomente des Faktors M berücksichtigend, bietet die Gleichung (2) die Begründung folgenden Satzes dar.

Wenn a und A reelle mit gleichen Zeichen versehene Größen vorstellen, die der Bedingung $A - a = +$ nachkommen, unter denen aber auch eine, a oder A, gleich Null sein kann; wenn zweitens $\varphi(x)$ eine von $x = a$ bis $x = A$ continuirliche Function von x vorstellt; wenn drittens die Gleichung:

$$\int_a^A \varphi(x)\,\mathrm{Cos.}\alpha x\,dx = F(\alpha)\,, \qquad \text{(I)}$$

als bestehend erkannt wird, dabei aber die allgemeine Größe $\alpha$ in der Function $\varphi(x)$ nicht enthalten ist: so besteht auch die Gleichung:

$$\varphi(x') = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F(\alpha)\,\mathrm{Cos.}x'\alpha\,d\alpha\,, \qquad \text{(II)}$$

erstens für jene Werthe von x', die folgenden Bedingungen nachkommen:

$$A - x' = +\,,\quad x' - a = +\,,$$

und zweitens auch noch für $x' = 0$, falls eine der Integrationsgrenzen, a oder A, gleich Null ist; hingegen bestehen unter den gleichen Prämissen folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(A) &= \frac{4}{\pi}\int_0^\infty F(\alpha)\,\mathrm{Cos.}A\alpha\,d\alpha\,,\\ \varphi(a) &= \frac{4}{\pi}\int_0^\infty F(\alpha)\,\mathrm{Cos.}a\alpha\,d\alpha\,, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III)}$$

falls A und a endliche oder angebbare Werthe haben.

389. Wenn die in vorangehender Nr. festgestellten Bezeichnungen dieselben Bedeutungen beibehalten und unter den gleichen Beschränkungen auch in vorliegender Nr. auftreten, so gelangt man bei Zugrundelegung der Gleichung:

$$\int_a^A q(x)\,\mathrm{Sin.}\alpha x\,dx = F'(\alpha),$$

wo im Allgemeinen $F'(\alpha)$ eine von $F(\alpha)$ verschiedene Function von $\alpha$ sein wird, wenn solche mit $\mathrm{Sin.}x'\alpha\,d\alpha$ multiplicirt und dann von $\alpha=0$ bis $\alpha=\infty$ integrirt wird, auf die Gleichung:

$$\int_0^\infty\int_a^A q(x)\mathrm{Cos.}\alpha(x'-x)dx\,d\alpha-\int_0^\infty\int_a^A q(x)\mathrm{Cos.}\alpha(x'+x)dx\,d\alpha=2\int_0^\infty F'(\alpha)\mathrm{Sin.}x'\alpha\,d\alpha,$$

aus der durch dieselben Betrachtungen, die wir in vorangehender Nr. über die ganz analoge Gleichung angestellt, die folgende gezogen wird:

$$M\,q(x') = \int_0^\infty F'(\alpha)\,\mathrm{Sin.}x'\alpha\,d\alpha,$$

wo der unbestimmte Faktor M von der besondern Beschaffenheit der Function $\varphi(x)$ durchaus unabhängig ist.

Diesen Faktor zu bestimmen nehmen wir, gleichwie in vorangehender Nr.,

$$\varphi(x) = x^0 = 1$$

an, und da nunmehr:

$$F'(\alpha) = \frac{\mathrm{Cos.}a\alpha - \mathrm{Cos.}A\alpha}{\alpha}$$

sich herausstellt; so ergiebt sich zur Bestimmung von M die Gleichung:

$$M = \int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos.}a\alpha - \mathrm{Cos.}A\alpha}{\alpha}\,\mathrm{Sin.}x'\alpha\,d\alpha,$$

oder auch die folgende:

$$2M = \int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin.}(x'+a)\alpha}{\alpha}\,d\alpha + \int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin.}(x'-a)\alpha}{\alpha}\,d\alpha$$

$$- \int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin.}(A+x')\alpha}{\alpha}\,d\alpha + \int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin.}(A-x')\alpha}{\alpha}\,d\alpha.$$

Behandelt man diese Gleichungen unter denselben drei Annahmen über a und A wie die Gleichungen (3) und (4) vorangehender Nr., so bietet auch jede derselben genau die gleiche Bestimmung für M als in besagter Nr. dar; so daß wir auch folgenden Satz, als begründet aufstellen können.

Wenn a und A reelle, mit gleichen Zeichen versehene Größen repräsentiren, die der Bedingung $A-a=+$ nachkommen, unter denen eine, a oder A, auch gleich Null sein kann; wenn $\varphi(x)$ von $x=a$ bis $x=A$ continuirlich verbleibt; wenn endlich folgende Gleichung:

$$\int_a^A \varphi(x)\,\mathrm{Sin.}\alpha x\,dx = F'(\alpha)\,, \qquad \text{(IV)}$$

wo die allgemeine Größe $\alpha$ in $\varphi(x)$ nicht erscheint, als bestehend erkannt wird: so besteht auch die Gleichung:

$$\varphi(x') = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F'(\alpha)\,\mathrm{Sin.}x'\alpha\,d\alpha \qquad \text{(V)}$$

zunächst für alle reellen Werthe von $x'$, die den Bedingungen:

$$A - x' = +\,,\quad x' - a = +$$

genügen, wie auch noch für $x'=0$, wenn eine der Integrationsgrenzen, a oder A, gleich Null ist; unter den gleichen Prämissen bestehen aber die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(A) &= \frac{4}{\pi}\int_0^\infty F'(\alpha)\,\mathrm{Sin.}A\alpha\,d\alpha\,,\\ \varphi(a) &= \frac{4}{\pi}\int_0^\infty F'(\alpha)\,\mathrm{Sin.}a\alpha\,d\alpha\,, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI)}$$

wenn a und A angebbare Werthe vorstellen.

390. Mit Zugrundelegung der in beiden vorausgehenden Nrn. begründeten Sätze sind wir jede Function einer allgemeinen Größe, für alle im Bereiche zweier Zahlengrößen fallenden Werthe derselben, innerhalb deren die Function noch continuirlich ist, durch eine Doppelintegrale darzustellen in der Lage.

Wenn die im ersteren dieser Sätze vorkommende Gleichung (I) mit $\mathrm{Cos.}x'\alpha\,d\alpha$ multiplicirt und hierauf beiderseits des Gleichheits-

zeichens nach $\alpha$, von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \infty$, integrirt wird, erhält man die Gleichung:

$$\int_0^\infty \int_a^A q(x)\,\mathrm{Cos.}\alpha x\,\mathrm{Cos.}x'\alpha\,dx\,d\alpha = \int_0^\infty F(\alpha)\,\mathrm{Cos.}x'\alpha\,d\alpha\,;$$

wird nun die Gleichung (II) desselben Satzes zugezogen: so geht diese eben aufgestellte Gleichung über in:

$$q(x') = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_a^A q(x)\,\mathrm{Cos.}\alpha x'\,\mathrm{Cos.}\alpha x\,dx\,d\alpha\,. \qquad (7)$$

Eine analoge zu dieser Gleichung wird erhalten, wenn man von dem zweiten der am Eingange erwähnten Sätze ausgeht. Multiplicirt man nämlich die Gleichung (IV) dieses Satzes mit $\mathrm{Sin.}x'\alpha\,d\alpha$, verfährt dann wie in dem eben behandelten Falle und zieht die Gleichung (V) desselben Satzes zu; so erhält man auch:

$$q(x') = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_a^A \varphi(x)\,\mathrm{Sin.}\alpha x'\,\mathrm{Sin.}\alpha x\,dx\,d\alpha\,. \qquad (8)$$

Jede dieser zwei Gleichungen (7) und (8) stellt die Function $\varphi(x')$ durch ein Doppelintegrale ausgedrückt dar, jede derselben besteht für alle Werthe von $x'$, so zwischen a und A enthalten sind; dabei unterliegen jedoch letztere, a und A, der Beschränkung, einerlei Vorzeichen zu haben und der Anfoderung:

$$A - a = +$$

nachzukommen. Wenn eine dieser Integrationsgrenzen gleich Null ist, dann bestehen besagte Gleichungen auch noch für $x' = 0$; hingegen erhält man, mit Zuziehung der Gleichungen (III) und (VI) der vorangehenden zwei Nrn., entweder:

$$\left.\begin{aligned} q(A) &= \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \int_a^A q(x)\,\mathrm{Cos.}\alpha A\,\mathrm{Cos.}\alpha x\,dx\,d\alpha\,, \\ q(a) &= \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \int_a^A q(x)\,\mathrm{Cos.}\alpha a\,\mathrm{Cos.}\alpha x\,dx\,d\alpha\,, \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} q(A) &= \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \int_a^A q(x)\,\mathrm{Sin.}\alpha A\,\mathrm{Sin.}\alpha x\,dx\,d\alpha\,, \\ q(a) &= \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \int_a^A q(x)\,\mathrm{Sin.}\alpha a\,\mathrm{Sin.}\alpha x\,dx\,d\alpha\,, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

wo A in je der ersten und a in je der zweiten dieser Gleichungen von Null verschiedene Werthe repräsentiren.

391. Die Gleichungen (7) und (8) vorangehender Nr. unterliegen der Beschränkung, nur insofern die Function $\varphi(x')$ für alle innerhalb a und A enthaltenen Zahlenwerthe von $x'$ zu repräsentiren, als diese Grenzwerthe gleiche Vorzeichen haben; zur Ableitung einer die Function $\varphi(x')$ darstellenden Gleichung, die von dieser Beschränkung frei ist, übergehen wir nunmehr und zwar mit Zugrundelegung der in vorangehender Nr. gewonnenen Ergebnisse.

Vorerst erinnern wir, daß die Gleichungen (7) und (8) auch dann noch zugleich Bestand haben, wenn für $x'$ eine unendlich kleinwerdende Größe $\omega$ angenommen wird, falls man zugleich eine der Integrationsgrenzen, a oder A, unendlichkleinwerdend voraussetzt.

Werden sonach unter dieser Verfügung über $x'$ die Ausdrücke rechterhand der Gleichheitszeichen besagter Gleichungen einander gleich gesetzt; so hat man folgende Gleichung:

$$\int_0^\infty \int_a^A q(x)\,\mathrm{Sin}.\alpha\omega\,\mathrm{Sin}.\alpha x\,dx\,d\alpha = \int_0^\infty \int_a^A q(x)\,\mathrm{Cos}.\alpha\omega\,\mathrm{Cos}.\alpha x\,dx\,d\alpha\,.$$

Werden ferner die Gleichungen (7) und (8) addirt, so erhält man:

$$q(x') = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_a^A q(x)\,[\mathrm{Cos}.\alpha x'\,\mathrm{Cos}.\alpha x + \mathrm{Sin}.\alpha x'\,\mathrm{Sin}.\alpha x]\,dx\,d\alpha\,,$$

aus der erstens, wenn $x'$ endlich ist, die folgende:

$$q(x') = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_a^A \varphi(x)\,\mathrm{Cos}.\alpha\,(x'-x)\,dx\,d\alpha\,, \qquad (11)$$

und zweitens, wenn $x'=\omega$ angenommen wird, mit Zuziehung der vorhin aufgestellten, die folgende:

$$q(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_a^A q(x)\,\mathrm{Cos}.\alpha\omega\,\mathrm{Cos}.\alpha x\,dx\,d\alpha\,,$$

oder auch:

$$q(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_a^A \varphi(x)\,\mathrm{Cos}.\alpha x\,dx\,d\alpha\,. \qquad (12)$$

gezogen wird, wenn a oder A gleich Null ist.

Die Gleichung (11), die gleichfalls für alle Werthe von $x'$, so zwischen a und A enthalten sind, noch Bestand hat, weicht, wie die

zuletzt aufgestellte Gleichung (12) zeigt, darin von den Gleichungen (7) und (8) ab, daß während diese bei der Annahme $a=0$ oder $A=0$ auch noch für $x'=0$ oder $=\omega$ Bestand haben, jene (11) solches nicht mehr ist; der Ausdruck zur Rechten dieser Gleichung (11) stellt nämlich für $x'=0$ bloß die Hälfte des Ausdruckes zur Linken, oder von $\varphi(0)$ dar. Mittelst dieser Eigenthümlichkeit der Gleichung (11) sind wir in der Lage, das Bestandhaben derselben für alle Werthe von $x'$, die zwischen a und A enthalten sind, auch dann noch darzuthun, wenn gleich diese Zahlengrößen a und A mit entgegengesetzten Zeichen behaftet sind, wenn nur, wie wir bis jetzt beständig vorausgsetzt haben,

$$A - a = +$$

verbleibt; so daß diese Gleichung (11) die am Eingange angekündigte Gleichung abgeben wird.

Bevor wir jedoch zur Erhärtung dieser Aussage übergehen, wollen wir die oben erwähnte Eigenthümlichkeit der Gleichung (11) unmittelbar aus der Gleichung (7), ohne Zuziehung der Gleichung (8), noch einmal darthun.

Die Gleichung (7) ist mit folgender:

$$\varphi(x')=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_a^A \varphi(x)\,\mathrm{Cos.}\alpha(x'-x)\,dx\,d\alpha+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_a^A \varphi(x)\,\mathrm{Cos.}\alpha(x'+x)\,dx\,d\alpha \quad (a)$$

gleichbedeutend. Wird nun $x'$ von Null verschieden und zwischen a und A enthaltend vorausgesetzt, dann geht $x'+x$, wenn a und A gleiche Zeichen haben, nie in Null über; und da man alsdann:

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}\alpha(x'+x)\,d\alpha = 0$$

hat: so geht diese Gleichung in:

$$\varphi(x') = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_a^A \varphi(x)\,\mathrm{Cos.}\alpha(x'-x)\,dx\,d\alpha$$

über, falls, wie eben erwähnt ward, $x'$ von Null verschieden ist. Wird aber in derselben Gleichung (a) $x'=0$ gesetzt; so erhält man die Gleichung:

$$\varphi(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_a^A \varphi(x)\,\mathrm{Cos.}\alpha x\,dx\,d\alpha\ ,$$

welche, mit der vorhergehenden vereint, die Richtigkeit unserer obigen Aussage, die Eigenthümlichkeit der Gleichung (11) betreffend, auf unzweideutige Weise darthun.

Wir übergehen nunmehr zur Erhärtung unserer vorigen Behauptung, daß die Gleichung (11) auch dann noch ein Bestand hat, wenn gleich die Integrationsgrenzen a und A entgegengesetzter Zeichen sind.

Nach dem was in den Nrn. 313—315 über den Zusammenhang zwischen Doppelintegralien und Doppelsummen mitgetheilt ward, besteht, wenn a negativ und A positiv vorausgesetzt wird, folgende Gleichung:

$$\int_0^{\infty}\int_a^{A} q(x)\,\mathrm{Cos}.\alpha(x'-x)\,dx\,d\alpha =$$

$$= \int_0^{\infty}\int_a^{0} q(x)\,\mathrm{Cos}.\alpha(x'-x)\,dx\,d\alpha + \int_0^{\infty}\int_0^{A} q(x)\,\mathrm{Cos}.\alpha(x'-x)\,dx\,d\alpha\,,$$

dannzumal namentlich, wenn $\varphi(x)$ im Bereiche der Integrationsgrenzen von x, von $x=a$ bis $x=A$, continuirlich verbleibt.

Das erste Doppelintegrale rechts vom Gleichheitszeichen dieser Gleichung ist, da wir a negativ voraussetzen, für sämmtliche negativen Werthe von $x'$, die der Bedingung:

$$x' - a = +$$

entsprechen, vermöge der obigen Gleichung (11), Repräsentant von $\pi\varphi(x')$; für negative Werthe von $x'$, die dieser Bedingung nicht nachkommen, einzig und allein $x'=a$ ausgenommen, wie auch für alle positiven Werthe von $x'$ geht das besagte Doppelintegrale in Null über, denn dasselbe kann auch, wie folgt, gestellt werden:

$$\int_a^{0}\left\{\int_0^{\infty}\mathrm{Cos}.\alpha(x'-x)\,d\alpha\right\} q(x)\,dx\,,$$

und das bestimmte Integrale inner den Klammern verschwindet für diese Werthe von $x'$; endlich stellt dieses Doppelintegrale für $x'=0$, wie die Gleichung (12) zeigt, nur die Hälfte des Werthes von $\pi\varphi(0)$ dar. — Aus ganz ähnlichen Gründen ist das zweite Doppelintegrale rechts vom Gleichheitszeichen obiger Gleichung für alle positiven Werthe von $x'$, die der Bedingung:

$$A - x' = +$$

nachkommen, der Repräsentat von $\pi\varphi(x')$; für alle positiven Werthe von $x'$, die dieser Bedingung nicht nachkommen, mit alleiniger Ausnahme des Werthes A von $x'$, wie auch für sämmtliche negativen Werthe dieser allgemeinen Größe geht besagtes Doppelintegrale jedesmal in Null über; für $x'=0$ endlich bietet dasselbe die Hälfte des Werthes von $\pi\varphi(0)$ dar.

Alles dieses zugegeben, erhellt sofort, daß die Summe der beiden zuletzt besprochenen Doppelintegralien, nämlich, daß das Doppelintegrale:

$$\int_0^\infty \int_a^A \varphi(x)\,\mathrm{Cos.}\alpha\,(x'-x)\,dx\,d\alpha\,,$$

ganz unserer Behauptung gemäß, der Repräsentant von $\pi\varphi(x')$ ist, d. h., die Gleichung:

$$q(x') = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_a^A q(x)\,\mathrm{Cos.}\alpha\,(x'-x)\,dx\,d\alpha\,,$$

besteht für alle zwischen a und A fallenden Werthe von $x'$ als Gleichheit, wenn gleich a negativ und A positiv angenommen wird.

Um endlich zu erfahren, wie es mit der Gleichung (11) zu halten sei, wenn für $x'$ eine der Integrationsgrenzen a oder A gesetzt wird, wenden wir uns den oben aufgestellten Gleichungen in (9) und (10) zu.

Addirt man je die ersten der Gleichungen (9) und (10), wie auch je die zweiten derselben, so erhält man in gleicher Folge die folgenden zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(A) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_a^A \varphi(x)\,\mathrm{Cos.}\alpha(A-x)\,dx\,d\alpha\,, \\ q(a) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_a^A q(x)\,\mathrm{Cos.}\alpha(a-x)\,dx\,d\alpha\,; \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

aus denen hervorgeht, daß der Ausdruck zur Rechten in Gleichung (11) nur die Hälfte des Ausdruckes zur Linken derselben Gleichung repräsentirt, wenn für $x'$ eine der Integrationsgrenzen a oder A gesetzt wird.

Eigentlich sind diese letztern Gleichungen unter der Annahme abgeleitet, a und A stellen mit gleichen Zeichen behaftete Zahlengrößen vor; dieselben bestehen aber auch unter der entgegengesetzten

Annahme, wie wir solches für eine derselben eigens nachweisen wollen.

Wird von jeder Vieldeutigkeit der Function $\varphi(x')$ abgesehen, so stellt $\varphi(A)$ einen einzigen und völlig bestimmten Werth dar; je die erste der in (9) und in (10) aufgestellten Gleichungen besteht aber auch noch, wenn $a=0$ und $A$ eine positive Größe vorstellt: daher bietet auch die Summe dieser zwei Gleichungen, unter eben erwähnter Verfügung über a und A, besagten einzigen Werth von $\varphi(A)$ dar, man hat nämlich:

$$q(A) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^A q(x)\,\mathrm{Cos.}\alpha(A-x)\,dx\,d\alpha\;;$$

nun reducirt sich auf den Ausdruck zur Rechten dieser Gleichung der Ausdruck zur Rechten in der ersten der Gleichungen (13), wenn man in demselben a negativ und A positiv voraussetzt, da nämlich das auf x bezügliche Integrale in demselben in eine Summe zweier, das eine von $x=a$ bis $x=0$ und das andere von $x=0$ bis $x=A$, zerfällt werden kann und ersteres, das von $x=a$ bis $x=0$ alsdann in Null übergeht: folglich stellt, wie behauptet wurde, der Ausdruck zur Rechten in den ersten der Gleichungen (13) den Werth von $\varphi(A)$ auch dann noch vor, wenn auch A und a entgegengesetzter Zeichen sind, falls man nur $A-a=+$ hat.

Vertauschen wir nun in der Gleichung (11) $x'$ mit x, so stellt sich als Hauptergebniß des in vorliegender Nr. Mitgetheilten folgender dritte Satz heraus.

Wenn a und A zwei reelle Größen vorstellen, die der Bedingung:

$$A - a = +$$

nachkommen; wenn $\varphi(x)$ eine von $x=a$ bis $x=A$ continuirliche Function von x vorstellt: so hat man für alle Werthe von x, die den Bedingungen:

$$A - x = + \text{ und } x - a = +$$

entsprechen, die identische Gleichung:

$$q(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_a^A q(x')\,\mathrm{Cos.}\alpha(x-x')\,dx'\,d\alpha\;; \qquad \text{(VII)}$$

hingegen hat man für $x=a$ und für $x=A$, wo auch ei-

ner dieser Werthe von x, a oder A, gleich Null sein kann, folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(A) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\int_a^{A} \varphi(x')\,\mathrm{Cos}.\alpha\,(A-x')\,dx'\,d\alpha\,, \\ \varphi(a) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\int_a^{A} \varphi(x')\,\mathrm{Cos}.\alpha\,(a-x')\,dx'\,d\alpha\,. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII)}$$

392. Bedenkt man, daß der so eben erwiesene Satz noch Bestand hat, wenn a und A numerisch beliebig groß, erstere negativ und letztere positiv angenommen wird; so läßt sich auch folgender vierte Satz aufstellen.

Wenn eine Function von x, $\varphi(x)$, für alle reellen, positiven oder negativen Werthe von x continuirlich verbleibt; so besteht für dieselben Werthe von x die Gleichheit:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x')\,\mathrm{Cos}.\alpha\,(x-x')\,dx'\,d\alpha\,, \qquad \text{(IX)}$$

mit welchem Satze, in Poisson's Worten ausgedrückt, Fourier die Analysis bereichert hat.

393. Mittelst der Sätze in beiden vorausgehenden Nrn. sind wir jede Function einer allgemeinen Größe nicht nur für das ganze Bereich ihrer Continuität, sondern auch für irgend einen Theil desselben darzustellen in der Lage. Wenn nämlich a und A, oder $-\infty$ und $+\infty$ die äußersten Werthe einer allgemeinen Größe x sind, innerhalb deren eine Function von x, wie $\varphi(x)$, continuirlich verbleibt; so stellt bei der erstern Annahme der Continuitätsgrenzen die Gleichung (VII) und bei der letztern die Gleichung (IX) diese Function dar. Allein, wenn gleich a und A nicht die äußersten Grenzwerthe der Continuität sind, sondern, wenn die Function $\varphi(x)$ auch noch für Werthe von x, die entweder größer als A oder kleiner als a sind, continuirlich verbleibt; so stellt gleichwohl die Gleichung (VII), oder genauer gesprochen, der Ausdruck zur Rechten vom Gleichheitszeichen derselben, diese Function $\varphi(x)$ für alle innerhalb a und A fallenden Werthe von x — aber auch gerade nur für diese Werthe — dar. Denn setzt man in besagtem Ausdrucke statt x irgend einen Werth der entweder um eine angebbare Größe kleiner als A oder um eine solche Größe größer als a ist, so besteht ja, wie wir be-

reits dargethan, die Gleichung (VII) als Gleichheit, falls nur die Function $\varphi(x)$ den Zustand der Continuität nicht verläßt; wenn hingegen für x Werthe gesetzt werden, die um angebbare Größen entweder größer als A oder kleiner als a sind, dann geht der Werth des Doppelintegrals dieser Gleichung (VII) jedesmal in Null über, und hört sonach dem engern Begriffe einer Function (Einleitung Nr. 6) zu entsprechen auf. Daß in der That dem so sei, namentlich, was den zweiten Theil dieser Aussage betrifft, fassen wir bloß den Fall in's Auge, wenn in besagtem Doppelintegrale für x irgend ein Werth angenommen wird, der um ein Angebbares größer als A ist.

Da man die Gleichheit hat:

$$\int_0^\infty \int_a^A q(x')\,\mathrm{Cos.}\alpha(x-x')\,dx'\,d\alpha = \int_a^A \left\{ \int_0^\infty \mathrm{Cos.}\alpha(x-x')\,d\alpha \right\} q(x')\,dx' ,$$

so besteht auch, bei der Annahme:

$$x = A + k^2 ,$$

wo k irgend eine angebbare reelle Größe bedeutet, folgende Gleichheit:

$$\int_0^\infty \int_a^A q(x')\,\mathrm{Cos.}\alpha(A-x'+k^2)\,dx'\,d\alpha = \int_a^A \left\{ \int_0^\infty \mathrm{Cos.}\alpha(A-x'+k^2)\,d\alpha \right\} q(x')\,dx' ;$$

da ferner die auf $x'$ bezügliche Integration von $x'=a$ bis $x'=A$ sich erstreckt und, nach der Voraussetzung, $A-a=+$ ist, so ist um so mehr der Ausdruck:

$$A - x' + k^2$$

für alle die so eben erwähnten Werthe von $x'$ eine angebbare positive Größe: folglich hat man:

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}\alpha\,(A - x' + k^2)\,d\alpha = 0 ,$$

und mithin auch:

$$\int_0^\infty \int_a^A q(x')\,\mathrm{Cos.}\alpha\,(x - x')\,dx'\,d\alpha = 0 ,$$

wenn $x = A + k^2$, und $\varphi(x)$ für diesen Werth von x noch im Zustande der Continuität verharrend angenommen wird. In analoger Weise wird die Richtigkeit der zuletzt aufgestellten Gleichung dargethan, wenn man $x = a - k^2$ setzt, wo k in der bisher gebrauchten

Bedeutung auftritt; daher ist unsere obige Behauptung gerechtfertiget, lautend: der Ausdruck zur Rechten in Gleichung (VII) repräsentirt für alle zwischen a und A fallenden Werthe von x die Function $\varphi(x)$, falls diese für besagte Werthe von x den Zustand der Continuität nicht verläßt; für Werthe von x hingegen, die außer dem Bereiche dieser Größen zu liegen kommen, geht besagter Ausdruck in Null über.

Von dieser so eben begründeten Eigenthümlichkeit der Gleichung (VII) werden wir im nächstfolgenden Paragraphen Gebrauch machen, gemischte Functionen (deren Erklärung wir bis dorthin verschieben) durch algebraische Summen von Doppelintegralien darzustellen.

394. Wir wenden nus nunmehr den Functionen zweier Variabeln zu und schicken, zum Behufe der Darstellung derselben durch vierfache bestimmte Integralien, einige analoge Sätze zu den in den Nrn. 388 und 389 begründeten voraus.

Einer dieser Sätze wird gewonnen, wenn man von folgender Gleichung ausgeht:

$$\int_b^B \int_a^A \varphi(x, y) \operatorname{Cos.}\alpha x \operatorname{Cos.}\beta y \, dx \, dy = F(\alpha, \beta) , \qquad (14)$$

wo die Integrationsgrenzen nach x und nach y reelle Zahlenwerthe vorstellen, dabei erstere, a und A, einerseits, wie letztere, b und B, anderseits gleiche Zeichen tragen und folgenden Bedingungen nachkommen:

$$A - a = +\infty , \quad B - b = +\infty ;$$

die Function $\varphi(x, y)$, die wir von $\alpha$ und $\beta$ unabhängig annehmen, setzen wir zugleich von $x = a$ bis $x = A$ und von $y = b$ bis $y = B$ mit der Eigenschaft der Continuität begabt voraus; endlich wird die Function $F(\alpha, \beta)$, als Werth des Doppelintegrals in der vorgelegten Gleichung, im Allgemeinen auch die Integrationsgrenzen a, A, b und B enthalten, dieselben eigens anzudeuten, haben wir jedoch aus gleichem Grunde, wie bei dem ganz analogen Falle in Nr. 388, unterlassen.

Wird nun diese vorgelegte Gleichung mit:

$$\operatorname{Cos.}\alpha x' \operatorname{Cos.}\beta y' \, d\alpha \, d\beta$$

multiplicirt und hierauf beiderseits nach $\alpha$, von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \infty$,

und nach $\beta$, von $\beta=0$ bis $\beta=\infty$, integrirt; so ergiebt sich, wenn einstweilen:

$$P = \text{Cos.}\alpha(x+x') + \text{Cos.}\alpha(x-x'),$$
$$Q = \text{Cos.}\beta(y+y') + \text{Cos.}\beta(y-y')$$

gesetzt wird, die Gleichung:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_b^B\int_a^A \varphi(x,y)PQ\,dx\,dy\,d\alpha\,d\beta = 4\int_0^\infty\int_0^\infty F(\alpha,\beta)\,\text{Cos.}x'\alpha\,\text{Cos.}y'\beta\,d\alpha\,d\beta,$$

die auch mit der folgenden:

$$\int_b^B\int_a^A\left\{\int_0^\infty P d\alpha.\int_0^\infty Q d\beta\right\}\varphi(x,y)dxdy = 4\int_0^\infty\int_0^\infty F(\alpha,\beta)\text{Cos.}x'\alpha\text{Cos.}y'\beta d\alpha d\beta \quad (15)$$

gleichbedeutend ist.

Setzen wir die neueingeführten Größen $x'$ und $y'$ reell voraus, erstere gleichen Zeichens mit a und A, und letztere desselben Zeichens wie b und B; nehmen wir ferner an, daß dieselben überdieß noch folgenden Bedingungen nachkommen:

$$A - x' = +, \quad x' - a = +,$$
$$B - y' = +, \quad y' - b = +,$$

daß sonach $x'$ zwischen a und A, und $y'$ zwischen b und B enthalten ist: dann hat man, wie in dem ganz analogen Falle in Nr. 388,

$$\int_0^\infty P\,d\alpha = \int_0^\infty \text{Cos.}\alpha(x-x')\,d\alpha,$$

$$\int_0^\infty Q\,d\beta = \int_0^\infty \text{Cos.}\beta(y-y')\,d\beta,$$

und in der obigen Gleichung (15) sind die Integrationsgrenzen von x, a und A, durch $x'-\omega$ und $x'+\omega$, und eben so die von y, b und B, respective durch $y'-\omega'$ und $y'+\omega'$ zu ersetzen, wo $\omega$ und $\omega'$ unendlich kleinwerdende positive Größen vorstellen. Denken wir uns diese Gleichung, nachdem man solche in eben erwähnter Weise umgeformt, aufgestellt, und lassen dann in derselben

$$x \text{ in } x'+x \text{ und } y \text{ in } y'+y$$

übergehen; so ergiebt sich die Gleichung:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{-\omega'}^{+\omega'}\int_{-\omega}^{+\omega}\varphi(x'+x,y'+y)\,\text{Cos.}\alpha x\,\text{Cos.}\beta y\,dx\,dy\,d\alpha\,d\beta =$$
$$= 4\int_0^\infty\int_0^\infty F(\alpha,\beta)\,\text{Cos.}x'\alpha\,\text{Cos.}y'\beta\,d\alpha\,d\beta.$$

Wird ferner, und zwar nur einstweilen:

$$J = \int_{-\omega'}^{+\omega'} \int_{-\omega}^{+\omega} q(x' + x, y' + y) \operatorname{Cos.}\alpha x \operatorname{Cos.}\beta y \, dx \, dy$$

gesetzt, so hat man auch:

$$J = \int_0^{\omega'} \int_0^{\omega} \left\{ \begin{matrix} q(x'+x, y'+y) + q(x'+x, y'-y) \\ + q(x'-x, y'+y) + q(x'-x, y'-y) \end{matrix} \right\} \operatorname{Cos.}\alpha x \operatorname{Cos.}\beta y \, dx \, dy ,$$

aus der:

$$J = \omega\omega' \left\{ \begin{matrix} q(x' + \omega, y' + \omega') + q(x' + \omega, y' - \omega') \\ + q(x' - \omega, y' + \omega') + q(x' - \omega, y' - \omega') \end{matrix} \right\} \operatorname{Cos.}\alpha\omega \operatorname{Cos.}\beta\omega'$$

gezogen wird; bedenkt man noch die Continuität der Function $\varphi(x,y)$ für alle Werthe von x und y, die respective zwischen a und A und zwischen b und B fallen: so ergiebt sich endlich;

$$J = 4\,\omega\,\omega'\,q(x', y') \operatorname{Cos.}\alpha\omega \operatorname{Cos.}\beta\omega' ,$$

wodurch die vorige Gleichung in folgende übergeht:

$$q(x', y')\omega\omega' \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \operatorname{Cos.}\omega\alpha \operatorname{Cos.}\omega'\beta \, d\alpha \, d\beta = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} F(\alpha,\beta) \operatorname{Cos.}x'\alpha \operatorname{Cos.}y'\beta \, d\alpha \, d\beta .$$

Stellt man, ähnlich wie in Nr. 388, das unbestimmte Produkt:

$$\omega\,\omega' \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \operatorname{Cos.}\omega\alpha \operatorname{Cos.}\omega'\beta \, d\alpha \, d\beta ,$$

wo der eine Faktor $\omega\,\omega'$ unendlich kleinwerdend und der nebenanstehende zweite Faktor unendlich großwerdend ist, durch M vor; so hat man, statt der letzten Gleichung, auch folgende:

$$M\,q(x', y') = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} F(\alpha, \beta) \operatorname{Cos.}x'\alpha \operatorname{Cos.}y'\beta \, d\alpha \, d\beta , \qquad (16)$$

in der noch die unbestimmte Größe M zu ermitteln übrig bleibt.

Wird zur Bestimmung dieser Größe M, da solche von der besondern Beschaffenheit der Function $\varphi(x, y)$ unabhängig ist, die Annahme:

$$q(x, y) = (xy)^0 = 1$$

getroffen; dann geht die vorgelegte Gleichung (14) über in:

$$\int_b^B \int_a^A \operatorname{Cos.}\alpha x \operatorname{Cos.}\beta y \, dx \, dy = F(\alpha, \beta) ,$$

aus der:

$$F(\alpha,\beta) = \int_b^B \mathrm{Cos.}\beta y\, dy \,.\, \int_a^A \mathrm{Cos.}\alpha x\, dx\,,$$

oder

$$F(\alpha,\beta) = \frac{\mathrm{Sin.}\beta B - \mathrm{Sin.}\beta b}{\beta} \,.\, \frac{\mathrm{Sin.}\alpha A - \mathrm{Sin.}\alpha a}{\alpha}$$

gezogen wird. Nach der eben getroffenen Annahme über $\varphi(x, y)$ hat man auch:

$$\varphi(x', y') = (x'y')^0 = 1\,;$$

daher bietet die Gleichung (16) folgende Bestimmung für M dar:

$$M = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin.}B\beta - \mathrm{Sin.}b\beta}{\beta} \,.\, \frac{\mathrm{Sin.}A\alpha - \mathrm{Sin.}a\alpha}{\alpha}\, \mathrm{Cos.}x'\alpha\, \mathrm{Cos.}y'\beta\, d\alpha\, d\beta\,,$$

oder auch:

$$M = M_1 \,.\, M_2\,, \qquad (17)$$

wo der Kürze wegen:

$$M_1 = \int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin.}A\alpha - \mathrm{Sin.}a\alpha}{\alpha}\, \mathrm{Cos.}x'\alpha\, d\alpha\,,$$

$$M_2 = \int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin.}B\beta - \mathrm{Sin.}b\beta}{\beta}\, \mathrm{Cos.}y'\beta\, d\beta$$

gesetzt wurde.

Vergleicht man diese Werthe von $M_1$ und $M_2$ mit dem Werthe von M aus Gleichung (3) Nr. 388, so erkennt man zuerst die Identität von $M_1$ mit dieser eben erwähnten Größe M; und da der Werth dieser von A, a und $x'$ independent ist, so leuchtet auch die Identität von $M_2$ mit dieser Größe M ein. — Diesem nach hat man, unter den bis jetzt festgestellten Beschränkungen über $x'$, $y'$, a, A, b und B, folgende Bestimmungen für $M_1$ und $M_2$:

$$M_1 = \tfrac{\pi}{2}\,,\quad M_2 = \tfrac{\pi}{2}\,.$$

Hingegen hat man:

$$M_1 = \tfrac{\pi}{4}\,,$$

wenn $x'$ einen der Grenzwerthe a oder A, der verschieden von Null gedacht ist, vorstellt; und eben so hat man:

$$M_2 = \tfrac{\pi}{4},$$

wenn $y'$ einen von Null verschieden vorausgesetzten Grenzwerth, b oder B, annimmt. Ist aber einer der Grenzwerthe von $x'$, a oder A, gleich Null, dann hat man auch für $x'=0$, wie im ersten Falle:

$$M_1 = \tfrac{\pi}{2};$$

und eben so hat man:

$$M_2 = \tfrac{\pi}{2},$$

bei der Annahme $y'=0$, wenn einer der Grenzwerthe von $y'$, b oder B, gleich Null ist.

Je nach dem Eintreffen einer dieser Fälle wird nunmehr die Gleichung (17) für M eine bekannte Größe darbieten, welche in die Gleichung (16) gesetzt, folgendes am Eingange angekündigte Theorem begründet darbietet.

Wenn a und A reelle mit gleichen Zeichen versehene Größen vorstellen, die der Bedingung $A-a=+$ nachkommen, worunter eine auch gleich Null sein kann; wenn eben so b und B reelle mit gleichen Zeichen begabte Größen sind, worunter gleichfalls eine gleich Null sein kann, und die der Bedingung $B-b=+$ nachkommen; wenn ferner $\varphi(x,y)$ eine, von $x=a$ bis $x=A$ und von $y=b$ bis $y=B$, continuirliche Function von x und y vorstellt; und wenn endlich die Gleichung:

$$\int_b^B \int_a^A \varphi(x,y)\,\mathrm{Cos.}\alpha x\,\mathrm{Cos.}\beta y\,dx\,dy = F(\alpha,\beta) \qquad (X)$$

Bestand hat, wo aber die Function $\varphi(x,y)$ von den allgemeinen Größen $\alpha$ und $\beta$ unabhängig ist: so besteht vorerst die Gleichung:

$$\varphi(x',y') = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty \int_0^\infty F(\alpha,\beta)\,\mathrm{Cos.}x'\alpha\,\mathrm{Cos.}y'\beta\,d\alpha\,d\beta, \qquad (XI)$$

erstens für jene Werthe von $x'$ und $y'$, die folgenden Bedingungen nachkommen:

$$A - x' = +, \quad x' - a = +,$$
$$B - y' = +, \quad y' - b = +,$$

und zweitens auch noch für $x'=0$ oder für $y'=0$, je

nachdem eine der Integrationsgrenzen a und A oder b und B gleich Null ist; dann bestehen, wenn a und A von Null verschieden sind, folgende zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(a, y') &= 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty\int_0^\infty F(\alpha,\beta)\,\mathrm{Cos}.a\alpha\,\mathrm{Cos}.y'\beta\,d\alpha\,d\beta\,, \\ \varphi(A, y') &= 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty\int_0^\infty F(\alpha,\beta)\,\mathrm{Cos}.A\alpha\,\mathrm{Cos}.y'\beta\,d\alpha\,d\beta\,, \end{aligned}\right\} \text{(XII)}$$

erstens für jene Werthe von y', die den Bedingungen:

$$B - y' = +\,,\quad y' - b = +$$

nachkommen und zweitens auch für $y'=0$, falls b oder B gleich Null ist; ferner bestehen, wenn b und B von Null verschieden sind, folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x', b) &= 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty\int_0^\infty F(\alpha,\beta)\,\mathrm{Cos}.x'\alpha\,\mathrm{Cos}.b\beta\,d\alpha\,d\beta\,, \\ \varphi(x', B) &= 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty\int_0^\infty F(\alpha,\beta)\,\mathrm{Cos}.x'\alpha\,\mathrm{Cos}.B\beta\,d\alpha\,d\beta\,, \end{aligned}\right\} \text{(XIII)}$$

erstens, wenn die Werthe von x' den Bedingungen:

$$A - x' = +\,,\quad x' - a = +$$

nachkommen und zweitens, falls a oder A gleich Null ist, auch für $x'=0$; endlich bestehen, immer unter denselben Prämissen, auch folgende vier Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(a, b) &= 4\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty\int_0^\infty F(\alpha,\beta)\,\mathrm{Cos}.a\alpha\,\mathrm{Cos}.b\beta\,d\alpha\,d\beta\,, \\ \varphi(a, B) &= 4\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty\int_0^\infty F(\alpha,\beta)\,\mathrm{Cos}.a\alpha\,\mathrm{Cos}.B\beta\,d\alpha\,d\beta\,, \\ \varphi(A, b) &= 4\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty\int_0^\infty F(\alpha,\beta)\,\mathrm{Cos}.A\alpha\,\mathrm{Cos}.b\beta\,d\alpha\,d\beta\,, \\ \varphi(A, B) &= 4\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty\int_0^\infty F(\alpha,\beta)\,\mathrm{Cos}.A\alpha\,\mathrm{Cos}.B\beta\,d\alpha\,d\beta\,, \end{aligned}\right\} \text{(XIV)}$$

wenn sämmtliche vier Integrationsgrenzen a, A, b und B endliche oder angebbare Werthe haben.

395. Ein zweiter Satz wird gewonnen, wenn folgende Gleichung zu Grunde gelegt wird:

$$\int_b^B \int_a^A q(x, y) \operatorname{Cos.}\alpha x \operatorname{Sin.}\beta y \, dx \, dy = F'(\alpha, \beta) ,$$

wo die verschiedenen Zeichen und Buchstabengrößen die gleichen, in vorangehender Nr. denselben beigelegten Bedeutungen beibehalten, und den daselbst festgestellten Bedingungen unterliegen. Von dem hier neueingeführten Zeichen, von der Function $F'(\alpha, \beta)$, kann gleichfalls dasselbe, was von der Function $F(\alpha, \beta)$ vorangehender Nr., die Abhängigkeit derselben von den Integrationsgrenzen a, A, b und B betreffend, ausgesagt werden.

Multiplicirt man diese Gleichung mit:

$$\operatorname{Cos.}\alpha x' \operatorname{Sin.} y' \, d\alpha \, d\beta ,$$

integrirt dann beiderseits von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \infty$ und von $\beta = 0$ bis $\beta = \infty$, legt ferner den Größen $x'$ und $y'$ dieselben Bedeutungen, wie in vorhergehender Nr. bei; so gelangt man nach einer Reihe von Betrachtungen, ähnlich denen der vorhergehenden Nr., auf folgendes Theorem.

Wenn a und A reelle Größen mit gleichen Zeichen vorstellen, unter denen eine auch Null sein kann, die der Bedingung $A - a = +$ nachkommen; wenn eben so b und B mit gleichen Zeichen begabte reelle Größen repräsentiren, worunter eine auch gleich Null sein kann, die der Bedingung $B - b = +$ entsprechen; wenn ferner $\varphi(x, y)$ eine von $x = a$ bis $x = A$ und von $y = b$ bis $y = B$ continuirliche Function von x und y vorstellt; und wenn endlich die Gleichung:

$$\int_b^B \int_a^A q(x, y) \operatorname{Cos.}\alpha x \operatorname{Sin.}\beta y \, dx \, dy = F'(\alpha, \beta) , \qquad \text{(XV)}$$

wo die allgemeinen Größen $\alpha$ und $\beta$ in $\varphi(x, y)$ nicht vorkommen, als bestehend erkannt wird: so besteht auch die Gleichung:

$$q(x', y') = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty \int_0^\infty F'(\alpha, \beta) \operatorname{Cos.}x'\alpha \operatorname{Sin.}y'\beta \, d\alpha \, d\beta , \qquad \text{(XVI)}$$

für alle Werthe von $x'$ und $y'$, die den Bedingungen:

$$A - x' = +, \quad x' - a = +,$$
$$B - y' = +, \quad y' - b = +$$

entsprechen, wie auch noch für $x'=0$ oder $y'=0$, je nachdem eine der Integrationsgrenzen a und A oder b und B gleich Null ist; der Ausdruck zur Rechten in dieser Gleichung (XVI) muß aber zweimal genommen werden, wenn für x' einer der Grenzwerthe a oder A, der jedoch verschieden von Null ist, gesetzt wird; dasselbe findet Statt, wenn für y' einer der Grenzwerthe b oder B, der gleichfalls von Null verschieden sein muß, gesetzt wird; endlich ist derselbe Ausdruck, damit die Gleichung ein Bestand habe, zu vervierfachen, wenn für x' einer der Grenzwerthe a oder A und zugleich für y' einer der Grenzwerthe b oder B gesetzt wird, falls nämlich keiner dieser Werthe gleich Null ist.

396. Einen dritten, den beiden vorausgehenden analogen Satz gewinnt man bei Zugrundelegung der folgenden Gleichung:

$$\int_b^B \int_a^A q(x,y)\,\mathrm{Sin.}\alpha x\,\mathrm{Cos.}\beta y\,dx\,dy = F''(\alpha,\beta)\,, \qquad \text{(XVII)}$$

der folgendermaßen lautet.

Wenn Alles wie in den beiden vorausgeschickten Sätzen verbleibt, hat man beim Statthaben dieser Gleichung (XVII) auch folgende:

$$\varphi(x',y') = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty \int_0^\infty F''(\alpha,\beta)\,\mathrm{Sin.}x'\alpha\,\mathrm{Cos.}y'\beta\,d\alpha\,d\beta\,, \qquad \text{(XVIII)}$$

die unter denselben Bedingungen und Beschränkungen, wie die analogen zu derselben, die Gleichungen (XI) und (XVI), Bestand hat, und in gleicher Weise abzuändern ist, wenn für x' oder y' deren Grenzwerthe gesetzt werden.

397. Ein vierter Satz wird endlich aus folgender Gleichung gezogen:

$$\int_b^B \int_a^A q(x,y)\,\mathrm{Sin.}\alpha x\,\mathrm{Sin.}\beta y\,dx\,dy = F'''(\alpha,\beta)\,, \qquad \text{(XIX)}$$

und lautet, wie folgt.

Wenn Alles in der bis jetzt festgestellten Bedeutung und unter denselben Beschränkungen ein Statt hat; so

besteht zugleich mit der eben aufgestelten Gleichung (XIX) die folgende:

$$q(x',y') = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty \int_0^\infty F''''(\alpha,\beta)\,\mathrm{Sin}.x'\alpha\,\mathrm{Sin}.y'\beta\,d\alpha\,d\beta\,, \quad \text{(XX)}$$

unter den gleichen Beschränkungen und Modificationen, als die zu derselben analogen Gleichungen der drei vorausgehenden Nrn.

398. Von den in den vorausgehenden vier Nrn. begründeten Sätzen gehen wir nun aus, um eine Function zweier allgemeinen Größen, sei es für den ganzen Umfang ihrer Continuität, oder auch nur für irgend einen Theil dieses Umfanges durch ein vierfaches Integrale auszudrücken.

Multiplicirt man, zur Erreichung dieses Zweckes, die Gleichung (X) Nr. 394 mit:

$$\mathrm{Cos}.x'\alpha\,\mathrm{Cos}.y'\beta\,d\alpha\,d\beta\,,$$

und integrirt hierauf beide Theile derselben nach $\alpha$ sowohl als nach $\beta$ von 0 bis $\infty$; so ergiebt sich mit Zuziehung der Gleichung (XI) a. a. O. folgende:

$$q(x',y') = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_b^B \int_a^A q(x,y)\mathrm{Cos}.\alpha x'\mathrm{Cos}.\alpha x\mathrm{Cos}.\beta y'\mathrm{Cos}.\beta y\,dx\,dy\,d\alpha\,d\beta. \quad (18)$$

Multiplicirt man ferner die Gleichung (XV) Nr. 395 mit:

$$\mathrm{Cos}.x'\alpha\,\mathrm{Sin}.y'\beta\,d\alpha\,d\beta\,,$$

verfährt dann wie vorhin; so ergiebt sich, beachtend die Gleichung (XVI), folgende:

$$q(x',y') = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_b^B \int_a^A q(x,y)\mathrm{Cos}.\alpha x'\mathrm{Cos}.\alpha x\mathrm{Sin}.\beta y'\mathrm{Sin}.\beta y\,dx\,dy\,d\alpha\,d\beta. \quad (19)$$

Wird ferner die Gleichung (XVII) Nr. 396 mit:

$$\mathrm{Sin}.x'\alpha\,\mathrm{Cos}.y'\beta\,d\alpha\,d\beta$$

multiplicirt, und werden dann die Integrationen in Bezug auf $\alpha$ und $\beta$ von 0 bis $\infty$ genommen; so ergiebt sich vermöge der Gleichung (XVIII) a. a. O. folgende:

$$q(x',y') = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_b^B \int_a^A q(x,y)\mathrm{Sin}.\alpha x'\mathrm{Sin}.\alpha x\mathrm{Cos}.\beta y'\mathrm{Cos}.\beta y\,dx\,dy\,d\alpha\,d\beta. \quad (20)$$

Endlich gewinnt man, wenn die in vorangehender Nr. gleichzeitig bestehenden Gleichungen in ähnlicher Weise behandelt werden, die folgende:

$$\varphi(x',y')=\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\int_0^\infty\int_0^\infty\int_b^B\int_a^A \varphi(x,y)\,\mathrm{Sin}.\alpha x'\,\mathrm{Sin}.\alpha x\,\mathrm{Sin}.\beta y'\,\mathrm{Sin}.\beta y\,dx\,dy\,d\alpha\,d\beta. \quad (21)$$

Werden nun von diesen eben aufgestellten vier Gleichungen die 1te und 2te, die 1te und 3te, die 2te und 4te, endlich die 3te und 4te addirt; so ergeben sich in gleicher Ordnung die folgenden vier Gleichungen:

$$\varphi(x',y')=\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_b^B\int_a^A \varphi(x,y)\,\mathrm{Cos}.\alpha x'\,\mathrm{Cos}.\alpha x\,\mathrm{Cos}.\beta(y'-y)\,dx\,dy\,d\alpha\,d\beta, \quad (22)$$

$$\varphi(x',y')=\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_b^B\int_a^A \varphi(x,y)\,\mathrm{Cos}.\beta y'\,\mathrm{Cos}.\beta y\,\mathrm{Cos}.\alpha(x'-x)\,dx\,dy\,d\alpha\,d\beta, \quad (23)$$

$$\varphi(x',y')=\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_b^B\int_a^A \varphi(x,y)\,\mathrm{Sin}.\beta y'\,\mathrm{Sin}.\beta y\,\mathrm{Cos}.\alpha(x'-x)\,dx\,dy\,d\alpha\,d\beta, \quad (24)$$

$$\varphi(x',y')=\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_b^B\int_a^A \varphi(x,y)\,\mathrm{Sin}.\alpha x'\,\mathrm{Sin}.\alpha x\,\mathrm{Cos}.\beta(y'-y)\,dx\,dy\,d\alpha\,d\beta. \quad (25)$$

Addirt man endlich von den zuletzt aufgestellten vier Gleichungen die 1te und 4te, oder die 2te und 3te; so erhält man in dem einen wie in dem andern Falle folgende Gleichung:

$$\varphi(x',y')=\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_b^B\int_a^A \varphi(x,y)\,\mathrm{Cos}.\alpha(x'-x)\,\mathrm{Cos}.\beta(y'-y)\,dx\,dy\,d\alpha\,d\beta. \quad (26)$$

Die vier ersten dieser neun Gleichungen, nämlich die Gleichungen (18)—(21) bestehen für alle innerhalb a und A fallenden Werthe von $x'$, wie für alle Werthe von $y'$, die zwischen b und B zu liegen kommen; für welche Werthe aber die Function $\varphi(x',y')$ noch zu den continuirlichen gehören muß. Diese Größen a, A, b und B müssen vorerst folgenden Bedingungsgleichungen entsprechen:

$$A-a=+\text{ und }B-b=+;$$

wenn ferner keine der Größen a oder A gleich Null ist, müssen dieselben mit gleichen Zeichen behaftet sein; und dasselbe Bewenden hat es mit den Größen b und B, d. i. wenn keine derselben den Nullwerth vorstellt, dann müssen beide positiv oder beide negativ sein. Endlich finden diese Gleichungen (18)—(21) auch noch für $x'=0$ Statt, wenn einer der Grenzwerthe a oder A gleich Null ist; und wenn

eine der Größen b oder B gleich Null ist, bestehen dieselben auch für $y'=0$.

Mit den vier darauf folgenden Gleichungen, mit den Gleichungen (22)—(25), hat es ein ganz analoges Bewenden wie mit der Gleichung (11) Nr. 391. Aus gleichen Gründen, die wir bei der eben citirten Gleichung geltend machten, besteht z. B. die erste dieser vier Gleichungen, die Gleichung (22), nicht mehr für $y'=0$, wenn gleich eine der Grenzgrößen b oder B gleich Null ist; sondern, es stellt unter der so eben getroffenen Annahme der Ausdruck zur Rechten nur die Hälfte des Werthes dar, den alsdann der Ausdruck zur Linken dieser Gleichung darbietet. Ganz ein ähnliches Bewenden hat es mit der darauf folgenden Gleichung (23), dieselbe besteht nicht mehr für $x'=0$, wenn auch eine der Integrationsgrenzen a oder A gleich Null ist; der Ausdruck zur Rechten derselben stellt alsdann nur die Hälfte des Ausdruckes zur Linken dar. Von der Gleichung (24) gilt dasselbe, was so eben von der Gleichung (23), und von der Gleichung (25) was unmittelbar vorher von der Gleichung (22) ausgesagt wurde. Ferner läßt sich in analoger Weise, wie in Nr. 391 von der Gleichung (11) dargethan worden, nunmehr auch von den Gleichungen (22) und (25) darthun, daß dieselben, falls keine der Größen b oder B gleich Null ist, dann noch bestehen, wenn die Zeichen von b und B auch entgegengesetzter Beschaffenheit sind; und eben so finden die Gleichungen (23) und (24) Statt, es mögen die Integrationsgrenzen a und A, falls keine derselben gleich Null ist, gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben. Diese zwei besonders herausgehobenen Eigenthümlichkeiten der Gleichungen (22)—(25) ausgenommen, bestehen solche unter allen übrigen Einschränkungen, die wir bei den vier Gleichungen (18)—(21) aufgeführt haben.

Uebergehend endlich zu der letzten der oben aufgestellten neun Gleichungen, nämlich zur Gleichung (26), sind wir die Momente ihres Bestandhabens dadurch festzustellen in der Lage, indem wir auf die Erzeugung derselben zurückgehen. — Dieselbe ist Ergebniß der Summation der Gleichungen (22) und (25), oder auch der Gleichungen (23) und (24). Als Ergebniß der zuerst genannten zwei Gleichungen ist der Ausdruck zur Rechten derselben nur die Hälfte des Ausdruckes zur Linken, wenn $y'=0$ und eine der zwei Größen b oder B gleich Null ist; insofern wir dieselbe als Ergebniß der

zuletzt genannten zwei Gleichungen ansehen, ist auch der Ausdruck zur Rechten nur die Hälfte des Ausdruckes zur Linken, wenn wir $x'=0$ und eine der zwei Größen a oder A gleich Null setzen; daher stellt auch endlich, in Folge dieser zweifachen Eigenthümlichkeit der Gleichung (26), der Ausdruck zur Rechten derselben nur ein Viertel des Ausdruckes zur Linken vor, wenn zugleich $x'=0$ und und $y'=0$ gesetzt wird, und dabei eine der Größen a und A, wie eine der Größen b und B gleich Null ist. Setzen wir hingegen keine der Größen:

$$a\,,\ A\,,\ b\,,\ B$$

gleich Null voraus; so besteht diese Gleichung (26), insofern wir solche als Summationsergebniß der Gleichungen (22) und (25) ansehen, für alle Werthe von $y'$, die zwischen b und B enthalten sind, es mögen diese Größen gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben, wenn man nur

$$B - b = +$$

hat; betrachten wir aber dieselbe Gleichung (26) als Summationsergebniß der Gleichungen (23) und (24), so besteht solche für alle Werthe von $x'$, die zwischen a und A liegen, dieselben mögen mit gleichen oder mit entgegengesetzten Zeichen behaftet sein, wenn nur die Bedingungsgleichung:

$$A - a = +$$

ein Statt hat; aus dem Zusammentreffen dieser doppelten Entstehungsweise besagter Gleichung (26) sind wir sonach auch zur Folgerung berechtiget, es besteht dieselbe für alle Werthe von $x'$, so innerhalb a und A, wie für alle Werthe von $y'$, so innerhalb b und B liegen, die Zeichen dieser Größen a, A, b und B mögen wie immer beschaffen sein, wenn dieselben nur den Bedingungen:

$$A - a = + \text{ und } B - b = +$$

ein Genüge thun.

399. Nach dem, was wir so eben begründend mitgetheilt haben, repräsentirt die Gleichung (26) jede Function zweier Variabeln $x'$ und $y'$, wie $\varphi(x',y')$, für alle innerhalb a und A enthaltenen Werthe von $x'$ und für alle Werthe von $y'$, welche zwischen b und B enthalten sind; dieselbe besteht frei von jeder Einschränkung bezüglich

die Zeichen der Zahlengrößen a, A, b, B, wenn dieselben nur folgenden Bedingungen:

$$A - a = +, \quad B - b = +$$

entsprechen, und wenn die Function $\varphi(x', y')$ im ganzen Bereiche dieser angedeuteten Werthe von $x'$ und $y'$ continuirlich verbleibt. Es erübriget uns daher noch, zur Erreichung des uns am Eingange vorangehender Nr. gesteckten Zieles, dieselbe Function $\varphi(x', y')$ für einen der Grenzwerthe selbst, für $x' = a$ oder A, für $y' = b$ oder B, gleichfalls durch ein vierfaches Integrale auszudrücken, das in einer einfachen Beziehung zu dem der Gleichung (26) stehe, und denselben Grad der Allgemeinheit, bezüglich die Integrationsgrenzen a, A, b und B, beibehalte.

Da eine etwas ausführliche Erörterung eines dieser Fälle genügende Belehrung zur Lösung der übrigen darbieten dürfte; so beschränken wir unsere Untersuchungen lediglich auf den Fall, wenn man $\varphi(x', y')$ für $x' = a$, wo a verschieden von Null gedacht bleibt, darzustellen hat.

Multipliciren wir die Gleichung (X) Nr. 394 mit:

$$\mathrm{Cos.}a\alpha\ \mathrm{Cos.}y'\beta\ d\alpha\ d\beta,$$

integriren dann nach $\alpha$ sowohl als nach $\beta$ von 0 bis $\infty$; so erhalten wir mit Zuziehung der ersten der Gleichungen (XII) a. a. O. folgende Gleichung:

$$\varphi(a,y') = 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty\int_0^\infty\int_b^B\int_a^A \varphi(x,y)\mathrm{Cos.}\alpha a\mathrm{Cos.}\alpha x\mathrm{Cos.}\beta y'\mathrm{Cos.}\beta y\,dx\,dy\,d\alpha\,d\beta. \quad (27)$$

In ähnlicher Weise ziehen wir aus den in den Nrn. 395, 396, 397 aufgestellten Sätzen folgende drei Gleichungen:

$$\varphi(a,y') = 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty\int_0^\infty\int_b^B\int_a^A \varphi(x,y)\mathrm{Cos.}\alpha a\mathrm{Cos.}\alpha x\mathrm{Sin.}\beta y'\mathrm{Sin.}\beta y\,dx\,dy\,d\alpha\,d\beta, \quad (28)$$

$$\varphi(a,y') = 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty\int_0^\infty\int_b^B\int_a^A \varphi(x,y)\mathrm{Sin.}\alpha a\mathrm{Sin.}\alpha x\mathrm{Cos.}\beta y'\mathrm{Cos.}\beta y\,dx\,dy\,d\alpha\,d\beta, \quad (29)$$

$$\varphi(a,y') = 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty\int_0^\infty\int_b^B\int_a^A \varphi(x,y)\mathrm{Sin.}\alpha a\mathrm{Sin.}\alpha x\ \mathrm{Sin.}\beta y\ \mathrm{Sin.}\beta y\,dx\,dy\,d\alpha\,d\beta. \quad (30)$$

Werden nun diese vier Gleichungen in ähnlicher Weise, wie die vier ersten Gleichungen vorangehender Nr. verbunden; so ergeben sich folgende analoge zu den Gleichungen (22)—(25) daselbst:

$$\varphi(a,y') = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_b^B \int_a^A \varphi(x,y) \operatorname{Cos}.\alpha a \operatorname{Cos}.\alpha x \operatorname{Cos}.\beta (y' - y)\, dx\, dy\, d\alpha\, d\beta ,$$

$$\varphi(a,y') = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_b^B \int_a^A \varphi(x,y) \operatorname{Cos}.\beta y' \operatorname{Cos}.\beta y \operatorname{Cos}.\alpha (a - x)\, dx\, dy\, d\alpha\, d\beta ,$$

$$\varphi(a,y') = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_b^B \int_a^A \varphi(x,y) \operatorname{Sin}.\beta y' \operatorname{Sin}.\beta y \operatorname{Cos}.\alpha (a - x)\, dx\, dy\, d\alpha\, d\beta ,$$

$$\varphi(a,y') = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_b^B \int_a^A \varphi(x,y) \operatorname{Sin}.\alpha a \operatorname{Sin}.\alpha x \operatorname{Cos}.\beta (y' - y)\, dx\, dy\, d\alpha\, d\beta .$$

Von der ersten und vierten dieser Gleichungen kann, wie von den analogen der vorangehenden Nr. dargethan werden, daß solche für alle innerhalb b und B enthaltenen Werthe von y' Bestand haben, die Zeichen von b und B mögen gleicher oder entgegengesetzter Beschaffenheit sein, wenn man nur $B - b = +$ hat. Addirt man sonach diese Gleichungen, wodurch:

$$\varphi(a,y') = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_b^B \int_a^A \varphi(x,y) \operatorname{Cos}.\alpha (a - x) \operatorname{Cos}.\beta (y' - y)\, dx\, dy\, d\alpha\, d\beta$$

erhalten wird; so besteht dieselbe vermöge ihrer Entstehung für alle Werthe von y', die innerhalb b und B liegen, wo die Zeichen dieser Größen gleich oder verschieden sein können; ferner besteht dieselbe, es mögen a und A gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben, wenn nur $A - a = +$ verbleibt, wovon man sich in ähnlicher Weise, wie beim analogen Falle in Nr. 391, bei den Gleichungen (13), überzeugen kann: sonach besteht diese Gleichung, was die Integrationsgrenzen a, A, b, B betrifft, in derselben Allgemeinheit, als die Gleichung (26) und belehrt uns auch, wie es mit dieser Gleichung (26) zu halten sei, wenn x' in derselben gleich a angenommen wird. Der Ausdruck zur Rechten dieser Gleichung (26) stellt alsdann die Hälfte des Ausdruckes zur Linken dar.

Auf dasselbe Ergebniß wird man geführt, wenn in der Gleichung (26):

$$x' = A \text{ , oder } y' = b \text{ , oder endlich } y' = B$$

angenommen wird; bei jeder dieser Annahmen stellt der Ausdruck zur Rechten die Hälfte des Ausdruckes zur Linken dieser Gleichung (26) dar.

Wird endlich in der Gleichung (26) für x' einer der Werthe

a oder A und zugleich für y′ einer der Werthe b oder B gesetzt; dann stellt der Ausdruck zur Rechten das Viertel des Ausdruckes zur Linken dar.

400. Fassen wir nun die Hauptergebnisse der beiden vorausgehenden Nrn. in der Form eines Theorems zusammen; so lautet solches, wenn in Gleichung (26) x′ mit x und y′ mit y vertauscht wird, wie folgt.

Wenn a, A und b, B reelle Zahlengrößen vorstellen, die den Bedingungen:

$$A - a = +, \quad B - b = +$$

entsprechen; wenn $\varphi(x,y)$ eine Function von x und y vorstellt, die für sämmtliche Werthe von $x=a$ bis $x=A$ und von $y=b$ bis $y=B$ continuirlich verbleibt: so hat man:

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_b^{B}\int_a^{A}\varphi(x',y')\mathrm{Cos}.\alpha(x-x')\mathrm{Cos}.\beta(y-y')dx'dy'd\alpha\,d\beta, \quad \text{(XXI)}$$

welche für alle reellen Werthe von x und y, als Gleichheit Bestand hat, die folgenden Bedingungen nachkommen:

$$A - x = +, \quad x - a = +,$$
$$B - y = +, \quad y - b = +;$$

hingegen hat man für $x=a$ oder $x=A$, wo einer dieser Grenzwerthe, a oder A, auch gleich Null sein kann, unter Beibehaltung der gemachten Voraussetzungen, folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(a,y)&=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_b^{B}\int_a^{A}\varphi(x',y')\mathrm{Cos}.\alpha(a-x')\mathrm{Cos}.\beta(y-y')dx'dy'd\alpha\,d\beta,\\ \varphi(A,y)&=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_b^{B}\int_a^{A}\varphi(x',y')\mathrm{Cos}.\alpha(A-x')\mathrm{Cos}.\beta(y-y')dx'dy'd\alpha\,d\beta,\end{aligned}\right\} \quad \text{(XXII)}$$

die für sämmtliche Werthe von y, so den Bedingungen:

$$B - y = +, \quad y - b = +$$

nachkommen, als Gleichheiten bestehen; eben so hat man, wenn $y=b$ oder $y=B$ angenommen wird, wo jeder dieser Grenzwerthe von y auch gleich Null sein

kann, gleichfalls unter Beibehaltung der festgestellten Voraussetzungen, die Gleichheiten:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x,b)&=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_b^B\int_a^A\varphi(x',y')\mathrm{Cos}.\alpha(x-x')\mathrm{Cos}.\beta(b-y')dx'dy'd\alpha d\beta\,,\\ \varphi(x,B)&=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_b^B\int_a^A\varphi(x',y')\mathrm{Cos}.\alpha(x-x')\mathrm{Cos}.\beta(B-y')dx'dy'd\alpha d\beta\,,\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{XXIII})$$

für alle Werthe von x, die folgenden Bedingungen entsprechen:

$$A-x=+\,,\quad x-a=+\,;$$

endlich hat man, wenn sowohl für x einer der Grenzwerthe derselben a oder A, als auch für y einer deren Grenzwerthe, b oder B, gesetzt wird, immer unter Beibehaltung der Voraussetzungen dieses Theorems, folgende vier Gleichheiten:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(a,b)&=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_b^B\int_a^A\varphi(x',y')\mathrm{Cos}.\alpha(a-x')\mathrm{Cos}.\beta(b-y')dx'dy'd\alpha d\beta\,,\\ \varphi(a,B)&=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_b^B\int_a^A\varphi(x',y')\mathrm{Cos}.\alpha(a-x')\mathrm{Cos}.\beta(B-y)dx'dy'd\alpha d\beta\,,\\ \varphi(A,b)&=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_b^B\int_a^A\varphi(x',y')\mathrm{Cos}.\alpha(A-x')\mathrm{Cos}.\beta(b-y')dx'dy'd\alpha d\beta\,,\\ \varphi(A,B)&=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_b^B\int_a^A\varphi(x',y')\mathrm{Cos}.\alpha(A-x')\mathrm{Cos}.\beta(B-y')dx'dy'd\alpha d\beta,\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{XXIV})$$

wo auch jede der Größen a, A, b oder B gleich Null sein kann.

401. Als Folgernng des in vorangehender Nr. aufgestellten Satzes geht dieser hervor:

Wenn eine Function $\varphi(x,y)$ für alle positiven und negativen reellen Werthe der Variabeln x und y continuirlich verbleibt; so findet für dieselben Werthe von x und y folgende Gleichheit Statt:

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x',y')\mathrm{Cos}.\alpha(x-x')\mathrm{Cos}.\beta(y-y')dx'dy'd\alpha\,d\beta\,,\quad(\mathrm{XXV})$$

welche Gleichheit eine Erweiterung des in Nr. 392 aufgestellten Satzes, gleichwie das in vorangehender Nr. aufgestellte Theorem eine Erweiterung des Satzes in Nr. 391 ist.

**402.** Die in Nr. 393 gemachte Bemerkung, betreffend die Darstellung einer Function einer allgemeinen Größe nur für einen Theil ihres Continuitätsumfanges, erstreckt sich auch über Functionen zweier allgemeinen Größen.

Da nämlich die Gleichung (XXI), oder genauer gesprochen, der Ausdruck zur Rechten vom Gleichheitszeichen in derselben, für Werthe von x, die größer als A und kleiner als a sind, in Null übergeht, wenn nur die Function $\varphi(x,y)$ bis und mit diesen Grenzwerthen von x continuirlich verbleibt; und da ein Gleiches in Bezug auf die zweite Variable y ausgesagt werden kann, nämlich, daß der Ausdruck zur Rechten in Gleichuug (XXI) in Null übergeht, wenn in demselben für y Werthe, die größer als B oder kleiner als b sind, gesetzt werden, welche Werthe jedoch gleichfalls noch im Bereiche der Continuitätsgrenzen der Function $\varphi(x,y)$ fallen: so fließt hieraus sofort die Richtigkeit unserer Behauptung am Eingange, d. h. der Ausdruck zur Rechten in besagter Gleichung (XXI) ist Repräsentant der Function $\varphi(x,y)$ für jenen Theil ihres Continuitätsumfanges, oder für jene Werthe von x und y, die den Bedingungen:

$$A - x = +\,,\quad x - a = +\,,$$
$$B - y = +\,,\quad y - b = +$$

nachkommen; für jene Werthe von x und y hingegen, die Bedingungen, wie die folgenden:

$$x - A = +\,,\quad a - x = +\,,$$
$$y - B = +\,,\quad b - y = +$$

entsprechen, und gleichwohl noch im Bereiche der Continuitätsgrengrenzen der Function $\varphi(x,y)$ sind, besteht diese Gleichung (XXI) nicht mehr, denn der Ausdruck zur Rechten dieser Gleichung stellt für besagte Werthe von x und y beständig den Nullwerth vor und ist diesem nach keine Function von x und y (Nr. 247, I), während der Ausdruck zur Linken eine solche verbleibt.

Mittelst dieser Bemerkung, die eine folgenreiche Eigenthümlichkeit der Gleichung (XXI) herausstellt, können auch gemischte Functionen zweier Variabeln analytisch ausgedrückt werden, wie wir solches im folgenden Paragraphen des Näheren zeigen werden.

**403.** Auf ähnlichem Wege, wie die Sätze zur Darstellung von

Functionen einer und zweier Variabeln durch zwei- und vierfache Integralien, sei es für den ganzen, oder für einen Theil ihrer respectiven Continuitätsumfänge erhalten worden sind, gelangt man auch auf Sätze, die die Darstellung der Functionen dreier und mehrer Variabeln durch sechs- und mehrfache Integralien zur Folge haben. Wir unterlassen jedoch diese Hülfssätze alle erst abzuleiten und begnügen uns damit, das Haupt- und Endergebniß, die Darstellung von Functionen dreier Variabeln betreffend, in den folgenden zwei Sätzen hier noch mitzutheilen.

Setzen wir zur Vereinfachung der Darstellung folgende Gleichung fest:

$$U = \mathrm{Cos.}\alpha\,(x-x')\ \mathrm{Cos.}\beta\,(y-y')\ \mathrm{Cos.}\gamma\,(z-z')\,, \qquad (a)$$

so lautet der erste Satz, wie folgt.

**I.** Wenn a und A, b und B, c und C reelle Größen sind, die lediglich den Bedingungen:

$$A-a=+\,,\quad B-b=+\,,\quad C-c=+$$

unterliegen; wenn ferner die Function $\varphi(x,y,z)$ für alle Werthe von $x=a$ bis $x=A$, für alle Werthe von $y=b$ bis $y=B$ und für alle Werthe von $z=c$ bis $z=C$ continuirlich verbleibt: so hat man die Gleichheit:

$$\varphi(x,y,z)=\frac{1}{\pi^3}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_c^{C}\int_b^{B}\int_a^{A}\varphi(x',y',z')\,U\,dx'\,dy'\,dz'\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,,$$

für alle Werthe von x, y und z, die folgenden Bedingungen nachkommen:

$$\begin{aligned} A-x&=+\,,\quad x-a=+\,,\\ B-y&=+\,,\quad y-b=+\,,\\ C-z&=+\,,\quad z-c=+\,. \end{aligned}$$

Der Ausdruck zur Rechten dieser Gleichheit ist mit 2 zu multipliciren, wenn entweder für x einer der Grenzwerthe a oder A, oder wenn für y einer der Grenzwerthe b oder B, oder wenn endlich für z einer der Grenzwerthe c oder C angenommen wird; derselbe Ausdruck ist mit 2.2 zu multipliciren, wenn zugleich je zwei der Variabeln x, y, z durch denselben entsprechende Grenzwerthe ersetzt werden; endlich ist besagter Ausdruck mit 2.2.2 zu multipliciren,

wenn alle drei Variabeln x, y und z zugleich durch den einen oder den andern ihrer respectiven Grenzwerthe ersetzt werden.

Als Folgerung deses Satzes geht mit Beibehaltung der Vereinfachungsgleichung (a) folgender angekündigte zweite Satz hervor.

II. Wenn die Function $\varphi(x,y,z)$ für alle positiven und negativen reellen Werthe von x, y, z, mitbegriffen die Nullwerthe, continuirlich verbleibt; so besteht für dieselben Werthe von x, y und z die Gleichheit:

$$\varphi(x,y,z)=\frac{1}{\pi^3}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x',y',z')\,U\,dx'\,dy'\,dz'\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,.$$

404. Zur Vervollständigung des in vorangehender Nr. Mitgetheilten fügen wir noch die Bemerkung bei, daß von der Gleichheit des Hauptttheorems in I. daselbst, dasselbe ausgesagt und nachgewiesen werden kann, was von den analogen zu derselben in den Nrn. 393 und 402 nachgewiesen wurde, nämlich: wenn die Function $\varphi(x,y,z)$ der vorangehenden Nr. auch noch für Werthe von x, y und z, die folgenden Bedingungen entsprechen:

$$x-A=+,\quad a-x=+,$$
$$y-B=+,\quad b-y=+,$$
$$z-C=+,\quad c-z=+,$$

continuirlich verbleibt; dann geht der Ausdruck zur Rechten der allgemeinen Gleichheit vorangehender Nr. in Null über, wenn für x, y oder z Werthe, die diesen Bedingungen entsprechen, gesetzt werden — wodurch die analytische Darstellung gemischter Functionen dreier Variabeln möglich wird.

---

## §. II.

## Darstellung gemischter Functionen durch algebraische Summen mehrfacher Integralien.

405. Jede Function einer allgemeinen Größe drückt, wenn von deren Vieldeutigkeit (Integralrechnung III, Nr. 130) abgesehen wird, das Gesetz ihrer Abhängigkeit von der allgemeinen Größe auf eine einzige, völlig bestimmte und ihr ganz ausschließlich zugehörende

Weise aus; so daß eine zweite, von derselben verschiedene Function einer allgemeinen Größe dieses Abhängigkeitsgesetz gleichfalls in einer zweiten, von der ersten durchaus verschiedenen Weise andeuten wird. Nun erklären wir zwei oder mehrere Functionen einer allgemeinen Größe als identisch, wenn dieselben entweder der äußern Form nach einerlei, d. h. wenn in denselben die allgemeine Größe einerlei algebraische Verbindung eingeht, oder auch, falls solches nicht Statt findet, wenn dieselben für gleiche, aber wie immer beschaffene Werthe der allgemeinen Größe auch gleiche Ergebnisse darbieten. Zwei oder mehrere Functionen einer allgemeinen Größe, die weder der einen noch der andern dieser Anforderungen nachkommen, erklären wir diesem zufolge als verschieden.

Stellen nun, dieses vorausgesetzt:

$$\varphi(x) \quad \varphi'(x), \quad \varphi''(x), \quad \varphi'''(x) \text{ u. s. w.}$$

verschiedene Functionen von x vor; so ist $F(x)$ eine gemischte Function von x, wenn dieselbe, je nach den Werthen von x, Resultate darbietet, welche bald mit denen von $\varphi(x)$, bald mit denen von $\varphi'(x)$, bald mit denen von $\varphi''(x)$ u. s. w. übereinstimmen; oder auch, wir nennen die Function $F(x)$ alsdann eine, aus den Functionen $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ . . ., gemischte Function von x, wenn dieselbe für bestimmte, isolirte oder zusammenhängende, Werthe von x gleiche Resultate wie $\varphi(x)$ darbietet, für andere, gleichfalls isolirte oder zusammenhängende Werthe von x dieselben Resultate als $\varphi'(x)$, für dritte, verschieden von den beiden frühern Werthsystemen von x, die gleichfalls isolirt oder zusammenhängend sein mögen, biete $F(x)$ dieselben Resultate als $\varphi''(x)$ dar u. s. w. — Eine solche gemischte Function von x, wie $F(x)$, sind wir mit Zuziehung des im vorausgeschickten Paragraphen Mitgetheilten jedesmal darzustellen in der Lage, wie aus dem Verfolge dieses Paragraphen zum Deutlichsten hervorgehen soll.

406. Der Lösung des allgemeinen Problems schicken wir einige besondere Fälle voraus, und machen mit folgendem den Anfang.

Man bestimme eine gemischte Function einer allgemeinen Größe x, die für alle Werthe von x, so zwischen 0 nnd 1 liegen, dieselben Werthe als $x^2$, und für alle

zwischen 1 und 2 fallenden Werthe von x übereinstimmende Werthe mit $x^3$ darbiete.

Zur Herstellung dieser verlangten gemischten Function von x wenden wir uns dem Ausgangs Nr. 391 aufgestellten Satze zu. Nach Gleichung (VII) daselbst hat man:

$$x^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^1 x'^2 \operatorname{Cos}.\alpha\,(x-x')\,dx'\,d\alpha\,,$$

für alle positiven, innerhalb 0 und 1 enthaltenen Werthe von x, und da $x^2$ für $x=0$ in Null übergeht; so findet diese Gleichung für alle positiven Werthe von x, von $x=0$ angefangen bis in die nächste Nähe von $x=1$, als Gleichheit Statt. Eben so hat man nach derselben Gleichung (VII):

$$x^3 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_1^2 x'^3 \operatorname{Cos}.\alpha\,(x-x')\,dx'\,d\alpha\,,$$

die gleichfalls als Gleichheit für alle innerhalb 1 und 2 enthaltenen Werthe von x Bestand hat.

Nach demselben citirten Satze wissen wir ferner:

1) daß der Ausdruck zur Rechten der ersten dieser zwei Gleichheiten für sämmtliche negativen Werth von x sowohl, als auch für sämmtliche positiven Werthe dieser Größe, die nur irgendwie die Einheit übertreffen, jedesmal in Null übergeht;
2) daß der Ausdruck zur Rechten in der zweiten dieser Gleichheiten gleichfalls jedesmal in Null übergeht, falls die allgemeine Größe x in demselben entweder negative Werthe annimmt, oder auch positive, die aber entweder um angebbare Größen kleiner als 1 oder größer als 2 sind;
3) daß jeder der eben angeführten Ausdrücke endlich bei der Annahme $x=1$, nur die Hälfte der Function ist, deren Repräsentant solcher ist, daher stellt auch die Summe besagter Ausdrücke für $x=1$ die positive Einheit dar.

Alles dieses vorausgesetzt, hat man folgende Bestimmung der verlangten gemischten Function, falls nämlich solche durch F(x) angedeutet wird;

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^1 x'^2 \operatorname{Cos}.\alpha(x-x')\,dx'\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_1^2 x'^3 \operatorname{Cos}.\alpha(x-x')\,dx'\,d\alpha\,,$$

oder auch folgende:

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{1}\Big\{x'^2\,\mathrm{Cos.}\,\alpha(x-x') + (1+x')^3\,\mathrm{Cos.}\,\alpha(x-x'-1)\Big\}\,dx'\,d\alpha\,.$$

Diese gemischte Function, $F(x)$, von $x$ ist für negative Werthe der allgemeinen Größe, oder von $x=-\infty$ bis $x=0$ der Null gleich; für alle Werthe von $x=0$ bis $x=2-v$, wo $v$ an der Uebergangsgrenze aus dem unendlich kleinwerdenden Zustande in den des endlichen einer Größe steht, ist $F(x)$ eine continuirliche Function von $x$, d. h. im ganzen Bereiche dieser Werthe von $x$ ändert sich besagte gemischte Function jedesmal nur um eine unendlich kleinwerdende Größe, wenn die allgemeine Größe $x$ gleichfalls nur eine unendlich kleinwerdende Aenderung eingeht; dieselbe ist ferner inner demselben Werthumfange von $x$ gemischt, in einer Weise, wie am Eingange dieser Nr. festgestellt ward; beim Durchgange der allgemeinen Größe $x$ durch den Werth 2 legt diese Function $F(x)$ die Eigenschaft der Continuität ab, und zwar, wenn $v$ die vorhin festgestellte Bedeutung beibehält, sowohl beim Uebergange von $x=2-v$ bis $x=2$, als auch bei dem von $x=2$ bis $x=2+v$; endlich ist diese Function für die positiven Werthe von $x$, von $2+v$ angefangen bis ins Unendliche fortgesetzt, beständig der Nulle gleich.

Anmerkung. Die vorletzte dieser Aussagen, die Discontinuität der gemischten Function $F(x)$ betreffend, macht eine besondere Erläuterung nöthig. Bedenkt man nämlich die obigen Aussagen in 1) und 2), so ist:

$$F(2-v) = (2-v)^3\,,\quad F(2) = \tfrac{1}{2}\,2^3\,,\quad F(2+v) = 0\,;$$

die Größe $v$ ist zwar keine unendlich kleinwerdende, jedoch eine äußerst kleine Zahlengröße — setzen wir sonach, um irgend einen Fall vor Augen zu haben:

$$v = 10^{-100}\,,$$

so stellt sich:

$$F(2-v) = 8\,,$$

mit einer bis auf die 99te Decimalstelle sich erstreckenden Genauigkeit heraus; und da ferner

$$F(2) = 4 \text{ und } F(2+v) = 0$$

ist: so ist auch ganz augenfällig, daß, in der nächsten Umgebung des Werthes 2 für $x$, die gemischte Function $F(x)$ für äußerst kleine, ja sogar für unendlich kleinwerdende Aenderungen von $x$ endliche Aenderungen

(nämlich beim Uebergange von $x=2-v$ bis $x=2$, wie auch bei dem von $x=2$ bis $x=2+v$) erleidet, daß dieselbe sonach (nach Nr. 247, III) in der Umgebung von $x=2$ eine endliche Discontinuität eingeht.

407. Zur Verificirung des in vorangehender Nr. gewonnenen Ergebnisses wollen wir die gemischte Function $F(x)$ daselbst mit $dx$ multipliciren, dann von $x=a$ bis $x=b$ integriren und, je nach Verschiedenheit dieser Integrationsgrenzen, das Ergebniß dieser Integration jedesmal noch näher bestimmen.

Vorerst hat man bei Zugrundelegung der in vorangehender Nr. aufgestellten Gleichung für $F(x)$ folgende Integralgleichung:

$$\int_a^b F(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^1\int_a^b \left\{ x'^2 \operatorname{Cos.}\alpha(x-x') + (1+x')^3 \operatorname{Cos.}\alpha(x-x'-1) \right\} dx\,dx'\,d\alpha;$$

wird rechts vom Gleichheitszeichen die Integration nach $x$ innerhalb der angezeigten Grenzen $a$ und $b$ vollzogen und nachher die Ordnungsfolge der partiellen Integrationen nach $x'$ und $\alpha$ vertauscht: so hat man die Gleichung:

$$\int_a^b F(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \left\{ \int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin.}\alpha(b-x')}{\alpha}\,d\alpha - \int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin.}\alpha(a-x')}{\alpha}\,d\alpha \right\} x'^2\,dx'$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^1 \left\{ \int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin.}\alpha(b-1-x')}{\alpha}\,d\alpha - \int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin.}\alpha(a-1-x')}{\alpha}\,d\alpha \right\} (1+x')^3 dx', \quad (1)$$

die wir im Folgenden, wie wir uns vorgesetzt, je nach der Beschaffenheit von $a$ und $b$ näher bestimmen werden.

1) Für die Annahme:

$$a > 2 \text{ und } b > 2$$

hat man, da $x'$ in der eben aufgestellten allgemeinen Gleichung (1) alle Werthe von 0 bis 1 durchläuft, die Gleichungen:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin.}\alpha(b-x')}{\alpha}\,d\alpha = \tfrac{\pi}{2}, \quad \int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin.}\alpha(a-x')}{\alpha}\,d\alpha = \tfrac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin.}\alpha(b-1-x')}{\alpha}\,d\alpha = \tfrac{\pi}{2}, \quad \int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin.}\alpha(a-1-x')}{\alpha}\,d\alpha = \tfrac{\pi}{2};$$

vermöge welcher die allgemeine Gleichung in folgende übergeht:

$$\int_a^b F(x)\,dx = 0 . \qquad (a > 2\,,\ b > 2)$$

Dieses Ergebniß ist ganz der Eigenthümlichkeit der gemischten Function $F(x)$ gemäß; da nämlich solche für alle Werthe von $x$, die größer als 2 sind, in Null übergeht.

2) Eine zweite Annahme, die auf dasselbe Resultat, als die eben Mitgetheilte führt, ist folgende:

$$a < 0 \text{ und } b < 0 .$$

Vermöge des Umstandes, daß die auf $x'$ Bezug habenden Integrationen in der allgemeinen Gleichung (1) über sämmtliche Werthe von 0 bis 1 sich erstrecken, hat man (Gleichung (6) Nr. 388):

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin.}\alpha\,(b - x')}{\alpha}\,d\alpha = -\tfrac{\pi}{2}\,, \quad \int_0^\infty \frac{\text{Sin.}\alpha\,(a - x')}{\alpha}\,d\alpha = -\tfrac{\pi}{2}\,,$$

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin.}\alpha\,(b-1-x')}{\alpha}\,d\alpha = -\tfrac{\pi}{2}\,, \quad \int_0^\infty \frac{\text{Sin.}\alpha\,(a-1-x')}{\alpha}\,d\alpha = -\tfrac{\pi}{2}\,,$$

welche Gleichungen, wie angekündiget ward, auf:

$$\int_a^b F(x)\,dx = 0 . \qquad (a < 0\,,\ b < 0)$$

führen.

Auch dieses Ergebniß entspricht vollkommen der Eigenthümlichkeit der gemischten Function $F(x)$, die für sämmtliche negativen Werthe von $x$ den Nullwerth darbietet.

3) Ferner sei:

$$a = 0 \text{ und } b \gtreqless 0 \text{ wie } b \lesseqgtr 1\,,$$

so stellt sich, wegen:

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin.}\alpha\,(a - x')}{\alpha}\,d\alpha = -\tfrac{\pi}{2}\,,$$

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin.}\alpha\,(b-1-x')}{\alpha}\,d\alpha = -\tfrac{\pi}{2}\,, \quad \int_0^\infty \frac{\text{Sin.}\alpha\,(a-1-x')}{\alpha}\,d\alpha = -\tfrac{\pi}{2}\,,$$

zunächst folgende Gleichung:

$$\int_0^b F(x)dx = \tfrac{1}{2}\int_0^1 x'^2\,dx' + \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^\infty x'^2\,\frac{\mathrm{Sin.}\alpha\,(b-x')}{\alpha}\,d\alpha\,dx',$$

oder auch folgende dar:

$$\int_0^b F(x)dx = \frac{1}{6} + \frac{1}{\pi}\int_0^b\int_0^\infty x'^2\,\frac{\mathrm{Sin.}\alpha\,(b-x')}{\alpha}\,d\alpha\,dx'$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_b^1\int_0^\infty x'^2\,\frac{\mathrm{Sin.}\alpha\,(b-x')}{\alpha}\,d\alpha\,dx';$$

in dem ersten dieser Doppelintegralien hat man, wegen der Integrationsgrenzen von $x'$ daselbst,

$$b - x' = +,$$

daher reducirt sich der Werth desselben auf:

$$\tfrac{\pi}{2}\int_0^b x'^2\,dx';$$

das zweite dieser Doppelintegralien reducirt sich aber, wegen

$$b - x' = -,$$

auf:

$$-\tfrac{\pi}{2}\int_b^1 x'^2\,dx';$$

daher geht die vorige Gleichung über in:

$$\int_0^b F(x)\,dx = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2}\int_0^b x'^2\,dx' - \tfrac{1}{2}\int_b^1 x'^2\,dx'$$

und, nach Vollziehung der angezeigten Integrationen, in:

$$\int_0^b F(x)\,dx = \tfrac{1}{3}\,b^3. \qquad (b \geqq 0,\ b \leqq 1)$$

Auf dasselbe Resultat gelangt man unmittelbar, wenn der Umstand beachtet wird, daß für alle Werthe von $x=0$ bis $x=1$ die gemischte Function $F(x)$ übereinstimmende Resultate mit $x^2$ darbietet.

4) Werden endlich folgende Annahmen getroffen:

$$a \geqq 0 \text{ und } a \leqq 1,\quad b \geqq 1 \text{ und } b \leqq 2,$$

so geht die allgemeine Gleichung, wegen:

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin.}\alpha(b-x')}{\alpha}\,d\alpha = \tfrac{\pi}{2}, \quad \int_0^\infty \frac{\text{Sin.}\alpha(a-1-x')}{\alpha}\,d\alpha = -\tfrac{\pi}{2},$$

in folgende über:

$$\int_a^b F(x)\,dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^1 x'^2\,dx' - \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^\infty x'^2\,\frac{\text{Sin.}\alpha(a-x')}{\alpha}\,d\alpha\,dx'$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^\infty (1+x')^3\,\frac{\text{Sin.}\alpha(b-1-x')}{\alpha}\,d\alpha\,dx' + \tfrac{1}{2}\int_0^1 (1+x')^3\,dx';$$

nun ist:

$$\int_0^1\int_0^\infty x'^2\,\frac{\text{Sin.}\alpha(a-x')}{\alpha}\,d\alpha\,dx' =$$

$$= \int_0^a\int_0^\infty x'^2\,\frac{\text{Sin.}\alpha(a-x')}{\alpha}\,d\alpha\,dx' + \int_a^1\int_0^\infty x'^2\,\frac{\text{Sin.}\alpha(a-x')}{\alpha}\,d\alpha\,dx',$$

welche Gleichung, beachtend die oben festgestellten Beschränkungen von a, in folgende übergeht:

$$\int_0^1\int_0^\infty x'^2\,\frac{\text{Sin.}\alpha(a-x')}{\alpha}\,d\alpha\,dx' = \tfrac{\pi}{2}\int_0^a x'^2\,dx' - \tfrac{\pi}{2}\int_a^1 x'^2\,dx';$$

und da aus ähnlichen Gründen auch folgende Gleichung:

$$\int_0^1\int_0^\infty (1+x')^3\,\frac{\text{Sin.}\alpha(b-1-x')}{\alpha}\,d\alpha\,dx' = \tfrac{\pi}{2}\int_0^{b-1}(1+x')^3\,dx' - \tfrac{\pi}{2}\int_{b-1}^1 (1+x')^3\,dx'$$

erhalten wird: so geht die vorige Gleichung über in:

$$\int_a^b F(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\left\{\int_0^1 x'^2\,dx' - \int_0^a x'^2\,dx' + \int_a^1 x'^2\,dx'\right\}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left\{\int_0^{b-1}(1+x')^3\,dx' - \int_{b-1}^1 (1+x')^3\,dx' + \int_0^1 (1+x')^3\,dx'\right\},$$

oder auch in:

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^1 x'^2\,dx' + \int_0^{b-1} (1+x')^3\,dx',$$

oder endlich in:

$$\int_a^b F(x)\,dx = \frac{1-a^3}{3} + \frac{b^4-1}{4}. \qquad \begin{pmatrix} a \geqq 0 \text{ und } a \leqq 1 \\ b \geqq 1 \text{ und } b \leqq 2 \end{pmatrix}$$

Auch dieses Resultat ist in völliger Uebereinstimmung mit der Eigenschaft der gemischten Function $F(x)$, mit der, für alle Werthe von $x=0$ bis $x=1$ die Function $x^2$, hingegen für alle Werthe von $x=1$ bis $x=2$ die Function $x^3$ vorzustellen.

408. Eine von der in beiden vorangehenden Nrn. besprochenen verschiedene gemischte Function einer allgemeinen Größe x komme folgenden Bedingungen nach.

Dieselbe soll für die Zwischenwerthe zu 0 und $\frac{\pi}{2}$ von x mit Sin.x, für die Zwischenwerthe zu $\frac{\pi}{2}$ und $\pi$ mit Cos.x, für die Zwischenwerthe zu $\pi$ und $\frac{3\pi}{2}$ wiederum mit Sin.x, wie für die zu $\frac{3\pi}{2}$ und $2\pi$ mit Cos.x u. s. w. übereinstimmen.

Auf ähnlichem Wege wie in Nr. 406 gelangt man mit Zuziehung der Gleichheit (VII) Nr. 391 auf folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} F(x) = {} & \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin.}x' \,\text{Cos.}\alpha(x-x')\,dx'\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{Cos.}x' \,\text{Cos.}\alpha(x-x')\,dx'\,d\alpha \\ & + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \text{Sin.}x' \,\text{Cos.}\alpha(x-x')\,dx'\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \text{Cos.}x' \,\text{Cos.}\alpha\,(x-x')\,dx'\,d\alpha \\ & + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} \text{Sin.}x' \,\text{Cos.}\alpha\,(x-x')\,dx'\,d\alpha + \ldots\ldots\ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned} \qquad (A)$$

wo $F(x)$ die verlangte gemischte Function ist.

Bringt man in dieser Gleichung sämmtliche auf $x'$ bezüglichen Integrationen auf einerlei Integrationsgrenzen, auf die von $x'=0$ bis $x'=\frac{\pi}{2}$; so nimmt diese Gleichung folgende Form an:

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \begin{array}{l} \text{Cos.}\alpha(x-x') - \text{Cos.}\alpha(x-x'-\frac{\pi}{2}) - \text{Cos.}\alpha(x-x'-\frac{2\pi}{2}) + \text{Cos.}\alpha(x-x'-\frac{3\pi}{2}) \\ + \text{Cos.}\alpha(x-x'-\frac{4\pi}{2}) - \text{Cos.}\alpha(x-x'-\frac{5\pi}{2}) - \text{Cos.}\alpha(x-x'-\frac{6\pi}{2}) + \text{Cos.}\alpha(x-x'-\frac{7\pi}{2}) \\ + \text{Cos.}\alpha(x-x'-\frac{8\pi}{2}) - \text{Cos.}\alpha(x-x'-\frac{9\pi}{2}) - \text{Cos.}\alpha(x-x'-\frac{10\pi}{2}) + \text{Cos.}\alpha(x-x'-\frac{11\pi}{2}) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\} \text{Sin.}x'\,dx'\,d\alpha.$$

Um die inner den Klammern enthaltene Reihe zu summiren, denken wir uns solche vor der Hand bis zum Gliede:

$$\text{Cos.}\alpha\left(x-x'-\frac{4n\pi}{2}\right)$$

fortgesetzt, wo n eine ganze positive Zahl vorstellt, und bezeichnen die Summe derselben durch $U_{4n}$; wenn nun die Summe der ganz analogen Sinusreihe, die sonach mit:

$$\text{Sin.}\alpha\left(x-x'-\frac{4n\pi}{2}\right)$$

abbricht, durch $V_{4n}$ vorgestellt wird: so erhält man, wenn in bekannter Weise verfahren wird, die Gleichung:

$$U_{4n}+\sqrt{-1}\,V_{4n}=$$

$$=e^{\alpha(x-x')\sqrt{-1}}\left\{1-e^{-\frac{\alpha\pi}{2}\sqrt{-1}}-e^{-\frac{2\alpha\pi}{2}\sqrt{-1}}+e^{-\frac{3\alpha\pi}{2}\sqrt{-1}}+e^{-\frac{4\alpha\pi}{2}\sqrt{-1}}\right.$$
$$\left.-e^{-\frac{5\alpha\pi}{2}\sqrt{-1}}-\ldots+e^{-\frac{(4n-1)\alpha\pi}{2}\sqrt{-1}}+e^{-\frac{4n\alpha\pi}{2}\sqrt{-1}}\right\}.$$

Behuf der Summation der innerhalb dieser Klammern enthaltenen Gliederreihe, setzen wir:

$$y=1-z-z^2+z^3+z^4-z^5-z^6+\ldots+z^{4n-1}+z^{4n},$$

so ergiebt sich:

$$y+\frac{y-1}{z}=\frac{2z(z^{4n}-1)}{z^2+1}+z^{4n},$$

woraus:

$$y=\frac{1-z+(1+z)z^{4n+1}}{1+z^2} \qquad \text{(B)}$$

gefolgert wird. Wendet man dieses Ergebniß auf die obige Reihe an, so stellt sich folgende Gleichung heraus:

$$U_{4n}+\sqrt{-1}\,V_{4n}=$$

$$=e^{\alpha(x-x')\sqrt{-1}}\,\frac{e^{\frac{\alpha\pi}{2}\sqrt{-1}}-1+\left(e^{\frac{\alpha\pi}{2}\sqrt{-1}}+1\right)e^{-\frac{4n+1}{2}\alpha\pi\sqrt{-1}}}{2\,\text{Cos.}\frac{\alpha\pi}{2}},$$

aus der:

$$U_{4n}=\frac{\text{Cos.}\alpha\frac{\pi}{4}\,\text{Cos.}\alpha\left(x-x'-\frac{8n+1}{4}\pi\right)-\text{Sin.}\alpha\frac{\pi}{4}\,\text{Sin.}\alpha\left(x-x'+\frac{\pi}{4}\right)}{\text{Cos.}\alpha\frac{\pi}{2}},$$

$$V_{4n} = \frac{\text{Cos.}\alpha\frac{\pi}{4}\,\text{Sin.}\alpha\left(x - x' - \frac{8n+1}{4}\pi\right) + \text{Sin.}\alpha\frac{\pi}{4}\,\text{Cos.}\alpha\left(x - x' + \frac{\pi}{4}\right)}{\text{Cos.}\frac{\alpha\pi}{2}}$$

gefolgert wird.

Da uns gegenwärtig bloß um $U_{4n}$ zu thun ist, so verlassen wir die zweite der zuletzt aufgestellten Gleichungen und wenden uns lediglich der erstern zu, aus der, wie es auch die allgemeine Lösung des vorliegenden Problems verlangt, nicht nur $U_{4n}$, sondern auch $U_{4n+1}$, $U_{4n+2}$, $U_{4n+3}$ bald herzustellen ist, wenn man nämlich:

$$U_{4n+1} = U_{4n} - \text{Cos.}\alpha\left(x - x' - \frac{4n+1}{2}\pi\right),$$

$$U_{4n+2} = U_{4n+1} - \text{Cos.}\alpha\left(x - x' - \frac{4n+2}{2}\pi\right),$$

$$U_{4n+3} = U_{4n+2} + \text{Cos.}\alpha\left(x - x' - \frac{4n+3}{2}\pi\right)$$

annimmt. Man hat sonach:

$$U_{4n} = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\text{Cos.}\alpha(x-x')}{\text{Cos.}\frac{\alpha}{2}\pi}\right\}\left\{-1 + \text{Cos.}\frac{\alpha\pi}{2} + \text{Cos.}2n\alpha\pi + \text{Cos.}\frac{4n+1}{2}\alpha\pi\right\}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\text{Sin.}\alpha(x-x')}{\text{Cos.}\frac{\alpha}{2}\pi}\right\}\left\{-\text{Sin.}\frac{\alpha\pi}{2} + \text{Sin.}2n\alpha\pi + \text{Sin.}\frac{4n+1}{2}\alpha\pi\right\},$$

$$U_{4n+1} = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\text{Cos.}\alpha(x-x')}{\text{Cos.}\frac{\alpha}{2}\pi}\right\}\left\{-1 + \text{Cos.}\frac{\alpha\pi}{2} + \text{Cos.}\frac{4n+1}{2}\alpha\pi - \text{Cos.}(2n+1)\alpha\pi\right\}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\text{Sin.}\alpha(x-x')}{\text{Cos.}\frac{\alpha}{2}\pi}\right\}\left\{-\text{Sin.}\frac{\alpha\pi}{2} + \text{Sin.}\frac{4n+1}{2}\alpha\pi - \text{Sin.}(2n+1)\alpha\pi\right\},$$

$$U_{4n+2} = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\text{Cos.}\alpha(x-x')}{\text{Cos.}\frac{\alpha}{2}\pi}\right\}\left\{-1 + \text{Cos.}\frac{\alpha\pi}{2} - \text{Cos.}(2n+1)\alpha\pi - \text{Cos.}\frac{4n+3}{2}\alpha\pi\right\}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\text{Sin.}\alpha(x-x')}{\text{Cos.}\frac{\alpha}{2}\pi}\right\}\left\{-\text{Sin.}\frac{\alpha\pi}{2} - \text{Sin.}(2n+1)\alpha\pi - \text{Sin.}\frac{4n+3}{2}\alpha\pi\right\},$$

$$U_{4n+3} = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\text{Cos.}\alpha(x-x')}{\text{Cos.}\frac{\alpha}{2}\pi}\right\}\left\{-1 + \text{Cos.}\frac{\alpha\pi}{2} - \text{Cos.}\frac{4n+3}{2}\alpha\pi + \text{Cos.}(2n+2)\alpha\pi\right\}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\text{Sin.}\alpha(x-x')}{\text{Cos.}\frac{\alpha}{2}\pi}\right\}\left\{-\text{Sin.}\frac{\alpha\pi}{2} - \text{Sin.}\frac{4n+3}{2}\alpha\pi + \text{Sin.}(2n+2)\alpha\pi\right\},$$

und die obige $F(x)$ darstellende Gleichung nimmt, je nachdem die inner den Klammern dieser Gleichung enthaltene Reihe mit einem der folgenden vier Glieder abbricht:

$$\text{Cos.}\alpha\left(x-x'-\frac{4n}{2}\pi\right), -\text{Cos.}\alpha\left(x-x'-\frac{4n+1}{2}\pi\right),$$

$$-\text{Cos.}\alpha\left(x-x'-\frac{4n+2}{2}\pi\right), \text{Cos.}\alpha\left(x-x'-\frac{4n+3}{2}\pi\right),$$

in derselben Ordnung auch eine der folgenden vier Formen an:

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} U_{4n}\,\text{Sin.}x'\,dx'\,d\alpha\,,$$

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} U_{4n+1}\,\text{Sin.}x'\,dx'\,d\alpha\,,$$

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} U_{4n+2}\,\text{Sin.}x'\,dx'\,d\alpha\,,$$

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} U_{4n+3}\,\text{Sin.}x'\,dx'\,d\alpha\,.$$

In diesen Gleichungen sind die auf $x'$ Bezug habenden angedeuteten Integrationen leicht vollziehbar; so daß nach Vollziehung derselben die verlangte gemischte Function bloß noch von einer einzigen Integration nach $\alpha$ abhängig sich herausstellt, wie aus dem Folgenden hervorgehen wird.

Man hat nämlich die Integralgleichungen:

$$\int \text{Sin.}x'\text{Cos.}\alpha(x-x')dx' = -\frac{1}{2}\frac{\text{Cos.}[\alpha x+(1-\alpha)x']}{1-\alpha} - \frac{1}{2}\frac{\text{Cos.}[\alpha x-(1+\alpha)x']}{1+\alpha} + \text{Const.},$$

$$\int \text{Sin.}x'\text{Sin.}\alpha(x-x')dx' = -\frac{1}{2}\frac{\text{Sin.}[\alpha x+(1-\alpha)x']}{1-\alpha} - \frac{1}{2}\frac{\text{Sin.}[\alpha x-(1+\alpha)x']}{1+\alpha} + \text{Const.},$$

aus denen folgende gezogen werden:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin.}x'\,\text{Cos.}\alpha\,(x-x')\,dx' = \frac{\text{Cos.}\alpha x+\alpha\,\text{Sin.}\alpha(x-\frac{\pi}{2})}{1-\alpha^2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin.}x'\,\text{Sin.}\alpha\,(x-x')\,dx' = \frac{\text{Sin.}\alpha x-\alpha\text{Cos.}\alpha(x-\frac{\pi}{2})}{1-\alpha^2};$$

daher gehen, beachtend die Bedeutungen von $U_{4n}$, $U_{4n+1}$, $U_{4n+2}$, $U_{4n+3}$, die vorigen vier Gleichungen in derselben Ordnungsfolge über in:

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos.}\,\alpha(x-n\pi)+\alpha\,\mathrm{Sin.}\,\alpha\left(x-\frac{2n+1}{2}\pi\right)}{(1-\alpha^2)\,\mathrm{Cos.}\frac{\alpha\pi}{2}}\,\mathrm{Cos.}\,\frac{2n+1}{2}\alpha\pi\,d\alpha$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin.}\,\alpha(x-n\pi)-\alpha\,\mathrm{Cos.}\,\alpha\left(x-\frac{2n+1}{2}\pi\right)}{(1-\alpha^2)\,\mathrm{Cos.}\,\frac{\alpha\pi}{2}}\,\mathrm{Sin.}\,n\alpha\pi\,d\alpha\,,$$

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos.}\,\alpha(x-n\pi)+\alpha\,\mathrm{Sin.}\,\alpha\left(x-\frac{2n+1}{2}\pi\right)}{(1-\alpha^2)\,\mathrm{Cos.}\,\frac{\alpha\pi}{2}}\,\mathrm{Cos.}\,\frac{2n+1}{2}\alpha\pi\,d\alpha$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos.}\,\alpha\left(x-\frac{2n+1}{2}\pi\right)+\alpha\,\mathrm{Sin.}\,\alpha(x-(n+1)\pi)}{(1-\alpha^2)\,\mathrm{Cos.}\,\frac{\alpha\pi}{2}}\,\mathrm{Cos.}\,\frac{2n+1}{2}\alpha\pi\,d\alpha\,,$$

$$F(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos.}\,\alpha\left(x-\frac{2n+1}{2}\pi\right)+\alpha\,\mathrm{Sin.}\,\alpha(x-(n+1)\pi)}{(1-\alpha^2)\,\mathrm{Cos.}\,\frac{\alpha\pi}{2}}\,\mathrm{Cos.}\,\frac{2n+1}{2}\alpha\pi\,d\alpha$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin.}\,\alpha\left(x-\frac{2n+1}{2}\pi\right)-\alpha\,\mathrm{Cos.}\,\alpha(x-(n+1)\pi)}{(1-\alpha^2)\,\mathrm{Cos.}\,\frac{\alpha\pi}{2}}\,\mathrm{Sin.}\,(n+1)\,\alpha\pi\,d\alpha\,,$$

$$F(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin.}\,\alpha\left(x-\frac{2n+1}{2}\pi\right)-\alpha\,\mathrm{Cos.}\,\alpha(x-(n+1)\pi)}{(1-\alpha^2)\,\mathrm{Cos.}\,\frac{\alpha\pi}{2}}\,\mathrm{Sin.}\,(n+1)\,\alpha\pi\,d\alpha$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin.}\,\alpha(x-(n+1)\pi)-\alpha\,\mathrm{Cos.}\,\alpha\left(x-\frac{2n+3}{2}\pi\right)}{(1-\alpha^2)\,\mathrm{Cos.}\,\frac{\alpha\pi}{2}}\,\mathrm{Sin.}\,(n+1)\,\alpha\pi\,d\alpha\,,$$

die, wenn $\alpha$ in $\frac{2\alpha}{\pi}$ umgesetzt wird, in derselben Ordnungsfolge in folgende übergehen:

$$F(x) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos.}\frac{2\alpha}{\pi}(x-n\pi)+\frac{2\alpha}{\pi}\mathrm{Sin.}\frac{2\alpha}{\pi}\left(x-\frac{2n+1}{2}\pi\right)}{1-\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^2}\frac{\mathrm{Cos.}(2n+1)\alpha}{\mathrm{Cos.}\alpha}\,d\alpha$$

$$+\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin.}\frac{2\alpha}{\pi}(x-n\pi)-\frac{2\alpha}{\pi}\mathrm{Cos.}\frac{2\alpha}{\pi}\left(x-\frac{2n+1}{2}\pi\right)}{1-\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^2}\frac{\mathrm{Sin.}2n\alpha}{\mathrm{Cos.}\alpha}\,d\alpha, \quad (a)$$

$$F(x) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos.}\frac{2\alpha}{\pi}(x-n\pi)+\frac{2\alpha}{\pi}\mathrm{Sin.}\frac{2\alpha}{\pi}\left(x-\frac{2n+1}{2}\pi\right)}{1-\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^2}\frac{\mathrm{Cos.}(2n+1)\alpha}{\mathrm{Cos.}\alpha}\,d\alpha$$

$$-\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos.}\frac{2\alpha}{\pi}\left(x-\frac{2n+1}{2}\pi\right)+\frac{2\alpha}{\pi}\mathrm{Sin.}\frac{2\alpha}{\pi}(x-(n+1)\pi)}{1-\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^2}\frac{\mathrm{Cos.}(2n+1)\alpha}{\mathrm{Cos.}\alpha}\,d\alpha, \quad (b)$$

$$F(x) = -\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos.}\frac{2\alpha}{\pi}\left(x-\frac{2n+1}{2}\pi\right)+\frac{2\alpha}{\pi}\mathrm{Sin.}\frac{2\alpha}{\pi}(x-(n+1)\pi)}{1-\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^2}\frac{\mathrm{Cos.}(2n+1)\alpha}{\mathrm{Cos.}\alpha}\,d\alpha$$

$$-\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin.}\frac{2\alpha}{\pi}\left(x-\frac{2n+1}{2}\pi\right)-\frac{2\alpha}{\pi}\mathrm{Cos.}\frac{2\alpha}{\pi}(x-(n+1)\pi)}{1-\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^2}\frac{\mathrm{Sin.}(2n+2)\alpha}{\mathrm{Cos.}\alpha}\,d\alpha, \quad (c)$$

$$F(x) = -\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin.}\frac{2\alpha}{\pi}\left(x-\frac{2n+1}{2}\pi\right)-\frac{2\alpha}{\pi}\mathrm{Cos.}\frac{2\alpha}{\pi}(x-(n+1)\pi)}{1-\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^2}\frac{\mathrm{Sin.}(2n+2)\alpha}{\mathrm{Cos.}\alpha}\,d\alpha$$

$$+\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin.}\frac{2\alpha}{\pi}(x-(n+1)\pi)-\frac{2\alpha}{\pi}\mathrm{Cos.}\frac{2\alpha}{\pi}\left(x-\frac{2n+3}{2}\pi\right)}{1-\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^2}\frac{\mathrm{Sin.}(2n+2)\alpha}{\mathrm{Cos.}\alpha}\,d\alpha. \quad (d)$$

Jede dieser vier Gleichungen stellt die am Eingange verlangte Function von x vor. Die Function F(x) aus der ersten Gleichung ist, wegen $\mathrm{Sin.}0=0$, für alle Werthe von $x=0$ bis in die Nähe von $x=\frac{\pi}{2}$ identisch mit Sin.x; in der Umgebung von $x=\frac{\pi}{2}$ geht F(x) eine endliche Discontinuität ein, indem dieselbe alsdann,

anstatt des Werthes 1, den Werth $\frac{1}{2}$ annimmt; innerhalb der Werthe von $x=\frac{\pi}{2}$ und $x=\pi$ ist $F(x)$ identisch mit Cos.x; in der nächsten Umgebung von $x=\pi$ tritt abermals eine endliche Discontinuität derselben ein, deren Werth ist alsdann $-\frac{1}{2}$; innerhalb der Werthe von $x=\pi$ und $x=\frac{3\pi}{2}$ ist $F(x)$ abermals mit Sin.x identisch und erleidet bei $x=\frac{3\pi}{2}$ eine endliche Discontinuität, es ist alsdann deren Werth $-\frac{1}{2}$; innerhalb $x=\frac{3\pi}{2}$ und $x=2\pi$ ist $F(x)$ mit Cos.x identisch, und da solche für $x=2\pi$ den Werth $\frac{1}{2}$ annimmt, so schließen wir abermals auf eine endliche Discontinuität derselben in der Umgebung dieses Werthes von x. Dieses angedeutete Gesetz beobachtet die Function $F(x)$ aus der ersten Gleichung bis in die nächste Nähe von $x=(4n+1)\frac{\pi}{2}$; so daß dieselbe zuletzt, nämlich innerhalb der Werthe $4n\frac{\pi}{2}$ und $(4n+1)\frac{\pi}{2}$ identisch mit Sin.x ist, und an der Grenze selbst, nämlich bei $x=(4n+1)\frac{\pi}{2}$, abermals eine endliche Discontinuität eingeht, indem alsdann deren Werth $\frac{1}{2}$ ist. Für alle Werthe von x, die größer als $(4n+1)\frac{\pi}{2}$, wie für alle negativen Werthe von x geht dieselbe Function in Null über.

Die Function $F(x)$ aus der zweiten Gleichung, unterscheidet sich von der unmittelbar besprochenen darin, daß dieselbe innerhalb der Werthe:

$$(4n+1)\frac{\pi}{2} \text{ und } (4n+2)\frac{\pi}{2}$$

von x nicht gleich Null, sondern mit Cos.x übereinstimmend ist; an der äußersten Grenze, nämlich bei $x=(4n+2)\frac{\pi}{2}$, geht solche eine endliche Discontinuität ein, besagte gemischte Function $F(x)$ nimmt dann den Werth $-\frac{1}{2}$ an.

Die Function $F(x)$ der dritten dieser Gleichungen unterscheidet sich von der so eben besprochenen darin, daß dieselbe auch inner den Werthen:

$$(4n+2)\frac{\pi}{2} \text{ und } (4n+3)\frac{\pi}{2}$$

von x eine Function von x verbleibt, und zwar stellt solche alsdann die Function Sin.x vor; an der äußersten Grenze, bei $x=(4n+3)\frac{\pi}{2}$, geht auch diese Function eine endliche Discontinuität ein, indem dann solche den Werth $-\frac{1}{2}$ annimmt.

Endlich stimmt die gemischte Function F(x) aus der vierten und letzten der obigen Gleichungen mit der so eben betrachteten dritten dieses Systems überein, und weicht lediglich darin von derselben ab, für alle zwischen:

$$(4n+3)\frac{\pi}{2} \text{ und } (4n+4)\frac{\pi}{2}$$

fallenden Werthe von x mit Cos.x übereinstimmende Resultate darzubieten; auch diese geht an der an dem äußersten Grenzwerthe von x, bei $x=(4n+4)\frac{\pi}{2}$, eine endliche Discontinuität ein, nämlich, statt 1, den Werth $\frac{1}{2}$ vorzustellen.

409. Eine gemischte Function, die sich der in den Gleichungen (a), (b), (c) und (d) vorangehender Nr. durch F(x) dargestellten anschließt, ist folgende:

Für alle Zwischenwerthe zu 0 und $-\frac{\pi}{2}$ von x stimmt dieselbe mit Cos.x, für die zu $-\frac{\pi}{2}$ und $-\pi$ fallenden Zwischenwerthe von x stimmt solche mit Sin.x überein, wieder mit Cos.x für die Zwischenwerthe zu $-\pi$ und $-\frac{3\pi}{2}$, wie mit Sin.x für die zu $-\frac{3\pi}{2}$ und $-2\pi$ gehörenden Zwischenwerthe von x u. s. w.

Wird dieselbe durch F'(x) vorgestellt, so hat man nach dem in Nr. 391 begründeten Theoreme folgende mit der Gleichung (A) vorangehender Nr. ganz analoge Gleichung:

$$F'(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\text{Cos.}x'\text{Cos.}\alpha(x-x')dx'd\alpha+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\text{Sin.}x'\,\text{Cos.}\alpha(x-x')\,dx'\,d\alpha$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\pi}\text{Cos.}x'\text{Cos.}\alpha(x-x')dx'd\alpha+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-2\pi}^{-\frac{3\pi}{2}}\text{Sin.}x'\,\text{Cos.}\alpha(x-x')\,dx'\,d\alpha$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\frac{5\pi}{2}}^{-2\pi}\text{Cos.}x'\,\text{Cos.}\alpha\,(x-x')\,dx'\,d\alpha+\ldots\ldots\ldots$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \quad (A')$$

werden auch hier alle auf $x'$ bezüglichen Integrationen auf die Integrationsgrenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gebracht: so hat man auch folgende Bestimmungsgleichung für $F'(x)$:

$$F'(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\begin{array}{l}\mathrm{Cos}.\alpha(x+x')-\mathrm{Cos}.\alpha(x+x'+\frac{\pi}{2})-\mathrm{Cos}.\alpha(x+x'+\frac{2\pi}{2})\\ +\mathrm{Cos}.\alpha(x+x'+\frac{3\pi}{2})+\mathrm{Cos}.\alpha(x+x'+\frac{4\pi}{2})-\mathrm{Cos}.\alpha(x+x'+\frac{5\pi}{2})\\ -\mathrm{Cos}.\alpha(x+x'+\frac{6\pi}{2})+\mathrm{Cos}.\alpha(x+x'+\frac{7\pi}{2})+\ldots\ldots\end{array}\right\}\mathrm{Cos}.x'\,dx'\,d\alpha.$$

Bricht man die innerhalb der Klammern enthaltene Gliederreihe mit dem Gliede:

$$\mathrm{Cos}.\alpha\left(x+x'+\frac{4n\pi}{2}\right)$$

ab, und stellt dann die Summe derselben durch $U'_{4n}$ vor, so gewinnt man, wenn die Summe der analogen Sinusreihe durch $V'_{4n}$ vorgestellt wird, folgende Gleichung:

$$U'_{4n}+\sqrt{-1}\,V'_{4n}=$$

$$=e^{\alpha(x+x')\sqrt{-1}}\left\{\begin{array}{l}1-e^{\frac{\alpha\pi}{2}\sqrt{-1}}-e^{\frac{2\alpha\pi}{2}\sqrt{-1}}+e^{\frac{3\alpha\pi}{2}\sqrt{-1}}+e^{\frac{4\alpha\pi}{2}\sqrt{-1}}\\ -e^{\frac{5\alpha\pi}{2}\sqrt{-1}}-\ldots+e^{\frac{(4n-1)\alpha\pi}{2}\sqrt{-1}}+e^{\frac{4n\alpha\pi}{2}\sqrt{-1}}\end{array}\right\},$$

aus der mit Zuziehung der Gleichung (B) vorangehender Nr. folgende gezogen wird:

$$U'_{4n}+\sqrt{-1}\,V'_{4n}=$$

$$=e^{\alpha(x+x')\sqrt{-1}}\,\frac{e^{-\frac{\alpha\pi}{2}\sqrt{-1}}-1+\left(e^{-\frac{\alpha\pi}{2}\sqrt{-1}}+1\right)e^{\frac{4n+1}{2}\alpha\pi\sqrt{-1}}}{2\,\mathrm{Cos}.\frac{\alpha\pi}{2}},$$

aus welcher endlich folgende Bestimmung gezogen wird:

$$U'_{4n}=\tfrac{1}{2}\,\frac{\mathrm{Cos}.\alpha(x+x')}{\mathrm{Cos}.\frac{\alpha\pi}{2}}\left\{-1+\mathrm{Cos}.\frac{\alpha\pi}{2}+\mathrm{Cos}.2n\,\alpha\pi+\mathrm{Cos}.\frac{4n+1}{2}\,\alpha\pi\right\}$$

$$+\tfrac{1}{2}\,\frac{\mathrm{Sin}.\alpha(x+x')}{\mathrm{Cos}.\frac{\alpha\pi}{2}}\left\{+\mathrm{Sin}.\frac{\alpha\pi}{2}-\mathrm{Sin}.2n\,\alpha\pi-\mathrm{Sin}.\frac{4n+1}{2}\,\alpha\pi\right\};$$

und mithin zur Bestimmung der fraglichen gemischten Function $F'(x)$ die Gleichung:

$$F'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} U'_{4n}\,\mathrm{Cos}.x'\,dx'\,d\alpha\,,$$

in der, im Ausdrucke zur Rechten, wir noch die Integration nach $x'$ zu vollziehen haben.

Berücksichtiget man nämlich folgende zwei Gleichheiten:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Cos}.\alpha(x+x')\,\mathrm{Cos}.x'\,dx' = \frac{\mathrm{Cos}.\alpha(x+\frac{\pi}{2})+\alpha\,\mathrm{Sin}.\alpha x}{1-\alpha^2}\,,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Sin}.\alpha(x+x')\,\mathrm{Cos}.x'\,dx' = \frac{\mathrm{Sin}.\alpha(x+\frac{\pi}{2})-\alpha\,\mathrm{Cos}.\alpha x}{1-\alpha^2}\,,$$

wie auch die obige Bestimmung für $U'_{4n}$; so hat man:

$$F'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{Cos}.\alpha\left(x+\frac{2n+1}{2}\pi\right)+\alpha\,\mathrm{Sin}.\alpha\,(x+n\pi)}{(1-\alpha^2)\mathrm{Cos}.\frac{\alpha\pi}{2}}\,\mathrm{Cos}.\frac{2n+1}{2}\,\alpha\pi\,d\alpha$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{Sin}.\alpha\left(x+\frac{2n+1}{2}\pi\right)-\alpha\,\mathrm{Cos}.\alpha\,(x+n\pi)}{(1-\alpha^2)\mathrm{Cos}.\frac{\alpha\pi}{2}}\,\mathrm{Sin}.n\alpha\pi\,d\alpha\,,$$

oder auch, wenn $\alpha$ in $\frac{2\alpha}{\pi}$ umgesetzt wird, folgende Bestimmung der gegenwärtig in Rede stehenden gemischten Function:

$$F'(x) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{Cos}.\frac{2\alpha}{\pi}\left(x+\frac{2n+1}{2}\pi\right)+\frac{2\alpha}{\pi}\,\mathrm{Sin}.\frac{2\alpha}{\pi}(x+n\pi)}{1-\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^2}\,\frac{\mathrm{Cos}.(2n+1)\alpha}{\mathrm{Cos}.\alpha}\,d\alpha$$

$$-\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{Sin}.\frac{2\alpha}{\pi}\left(x+\frac{2n+1}{2}\pi\right)-\frac{2\alpha}{\pi}\mathrm{Cos}.\frac{2\alpha}{\pi}(x+n\pi)}{1-\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^2}\,\frac{\mathrm{Sin}.2n\alpha}{\mathrm{Cos}.\alpha}\,d\alpha\,,\quad (a')$$

welche die analoge zur Gleichung (a) vorangehender Nr. ist.

Diese Function $F'(x)$ nimmt für sämmtliche positiven Werthe

von x, wie für jene negativen Werthe diese allgemeine Größe, welche numerisch größer als $\frac{4n+1}{2}\pi$ sind, den Nullwerth an; sonach hört dieselbe auch, für diese Werthe von x, dem engern Begriffe einer Function zu entsprechen auf (Einleitung Nr. 6). Für die negativen Werthe von x, die im Bereiche der Grenzen:

$$0 \text{ und } -\frac{4n+1}{2}\pi$$

fallen, stellt F′(x) abwechselnd die Functionen Cos.x und Sin.x, in der am Eingange angedeuteten Weise dar; beim jeweiligen Uebergange von Cos.x zu Sin.x, und umgekehrt, erleidet solche eine endliche Discontinuität. In der Umgebung von $x = -\frac{\pi}{2}$ nimmt dieselbe den Werth $-\frac{1}{2}$, in der Umgebung von $-\pi$ den Werth $-\frac{1}{2}$, in der Umgebung von $-\frac{3\pi}{2}$ den Werth $\frac{1}{2}$ u. s. w. an.

**410.** Stellt f(x) die Summe der gemischten Functionen F(x) und F′(x) aus den Gleichungen (a) und (a′) beider vorangehenden Nrn. vor, dann ist f(x) sowohl für positive als für negative Werthe von x eine Function von x; und man hat folgende Bestimmungsgleichung dieser gemischten Function:

$$f(x)=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\text{Cos.}\frac{2\alpha}{\pi}(x+\frac{\pi}{4})+\frac{2\alpha}{\pi}\text{Sin.}\frac{2\alpha}{\pi}(x-\frac{\pi}{4})}{1-\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^2}\text{Cos.}\frac{4n+1}{2}\alpha\,\frac{\text{Cos.}(2n+1)\alpha}{\text{Cos.}\alpha}\,d\alpha$$

$$-\frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\text{Cos.}\frac{2\alpha}{\pi}(x+\frac{\pi}{4})+\frac{2\alpha}{\pi}\text{Sin.}\frac{2\alpha}{\pi}(x-\frac{\pi}{4})}{1-\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^2}\text{Sin.}\frac{4n+1}{2}\alpha\,\frac{\text{Sin.}2n\alpha}{\text{Cos.}\alpha}\,d\alpha,$$

oder, nach Zusammenziehung beider bestimmten Integralien, folgende:

$$f(x)=$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\text{Cos.}\frac{2\alpha}{\pi}(x+\frac{\pi}{4})+\frac{2\alpha}{\pi}\text{Sin.}\frac{2\alpha}{\pi}(x-\frac{\pi}{4})}{1-\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^2}\cdot\frac{\text{Cos.}\frac{8n+3}{2}\alpha+\text{Cos.}\frac{8n+1}{2}\alpha}{\text{Cos.}\alpha}\,d\alpha,$$

oder endlich:

$$f(x)=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\left\{\text{Cos.}\frac{2\alpha}{\pi}(x+\frac{\pi}{4})+\frac{2\alpha}{\pi}\text{Sin.}\frac{2\alpha}{\pi}(x-\frac{\pi}{4})\right\}\text{Cos.}\frac{\alpha}{2}}{1-\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^2}\,\frac{\text{Cos.}(2n+1)\alpha}{\text{Cos.}\alpha}\,d\alpha. \quad (e)$$

Diese gemischte Function von x, f(x), stellt im Bereiche der Werthe von x, so zwischen:

$$-\frac{4n+1}{2}\pi \text{ und } \frac{4n+1}{2}\pi$$

enthalten sind, wo n eine ganze positive Zahl vorstellt, in abwechselnden Intervallen zu je $\frac{\pi}{2}$, die Functionen Cos.x und Sin.x vor. Es giebt nämlch diese Function von x für sämmtliche Werthe von x, so innerhalb der Grenzen:

$$-\frac{4n+1}{2}\pi \text{ und } -\frac{4n}{2}\pi$$

fallen, einerlei Resultate mit Cos.x; für sämmtliche Werthe von x hingegen, die innerhalb der Grenzen:

$$-\frac{4n}{2}\pi \text{ und } -\frac{4n-1}{2}\pi$$

enthalten sind, bietet dieselbe Function einerlei Werthe mit Sin.x dar; wieder einerlei Werthe mit Cos.x bietet dieselbe für alle Zwischenwerthe zu:

$$-\frac{4n-1}{2}\pi \text{ und } -\frac{4n-2}{2}\pi,$$

und einerlei Werthe mit Sin.x für alle Zwischenwerthe zu:

$$-\frac{4n-2}{2}\pi \text{ und } -\frac{4n-3}{2}\pi$$

von x dar u. s. w. Wird in dieser Weise der abwechselnde Zustand der Function f(x) verfolgt; dann wird solche, für die Zwischenwerthe:

$$-\tfrac{3}{2}\pi \text{ und } -\tfrac{1}{2}\pi$$

von x, gleiche Werthe mit Sin.x darbieten, für die Zwischenwerthe von x zu:

$$-\tfrac{1}{2}\pi \text{ und } 0$$

gleiche Werthe mit Cos.x, ferner für die Zwischenwerthe von x zu:

$$0 \text{ und } \tfrac{1}{2}\pi$$

gleiche Werthe mit Sin.x, und für die Zwischenwerthe zu:

$$\tfrac{1}{2}\pi \text{ und } \tfrac{2}{2}\pi$$

von x gleiche Werthe mit Cos.x u. s. w., am Schlusse endlich oder für die Werthe von x, so inner den Grenzen:

$$\frac{4n}{2}\pi \text{ und } \frac{4n+1}{2}\pi$$

enthalten sind, wird die in Rede stehende gemischte Function einerlei Resultate wie Sin.x darbieten.

Bei jedem Uebergange aus dem Zustande des Cosinus in den des Sinus und umgekehrt, wie auch in der nächsten Umgebung des zweiten äußersten Grenzwerthes von x, nämlich bei $x=\frac{4n+1}{2}\pi$, geht die fragliche gemischte Function f(x) eine endliche Discontinuität ein; für diese Zustände bestehen nämlich folgende Gleichungen:

$$f\left(-\frac{4n}{2}\pi\right)=\tfrac{1}{2}, f\left(-\frac{4n-1}{2}\pi\right)=\tfrac{1}{2}, f\left(-\frac{4n-2}{2}\pi\right)=-\tfrac{1}{2}, f\left(-\frac{4n-3}{2}\pi\right)=-\tfrac{1}{2}, f\left(-\frac{4n-4}{2}\pi\right)=\tfrac{1}{2},$$

$$\ldots f(-\tfrac{2}{2}\pi)=-\tfrac{1}{2}, f(-\tfrac{1}{2}\pi)=-\tfrac{1}{2}, f(0)=\tfrac{1}{2}, f(\tfrac{1}{2}\pi)=\tfrac{1}{2}, f(\tfrac{2}{2}\pi)=-\tfrac{1}{2}, \ldots.$$

$$f\left(\frac{4n}{2}\pi\right)=\tfrac{1}{2}, f\left(\frac{4n+1}{2}\pi\right)=\tfrac{1}{2}.$$

Unter der Annahme endlich, die ganze positive Zahl n ist endlich, hört diese gemischte Function auch für endliche Werthe von x, nämlich für die, so außer dem Bereiche der oben festgestellten äußersten Grenzen:

$$-\frac{4n+1}{2}\pi \text{ und } +\frac{4n+1}{2}\pi$$

fallen, eine Function von x zu sein auf; dieselbe nimmt alsdann beständig den Nullwerth an.

**411.** Die in vorangehender Nr. durch Gleichung (e) dargestellte gemischte Function f(x) wollen wir noch unter der Voraussetzung bestimmen: es stellt n eine unendlich großwerdende ganze Zahl vor. Unter dieser Voraussetzung sind wir nämlich die daselbst auf $\alpha$ Bezug habende Integration zu vollziehen im Stande, wodurch die fragliche Function frei von jeder Integrationsoperation erhalten wird.

Stellen wir folgende Gleichungen fest:

$$\varphi(\alpha) = \frac{\text{Cos.}\frac{2\alpha}{\pi}(x+\frac{\pi}{4}) + \frac{2\alpha}{\pi}\text{Sin.}\frac{2\alpha}{\pi}(x-\frac{\pi}{4})}{1-\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^2}\,\text{Cos.}\frac{\alpha}{2}\,,$$

$$k = 2n\,,$$

so geht die Gleichung (e) in folgende über:

$$f(x) = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty \varphi(\alpha)\,\frac{\text{Cos.}(2k+1)\alpha}{\text{Cos.}\alpha}\,d\alpha\,;$$

und da die Function $\varphi(\alpha)$ im Bereiche der Integrationsgrenzen, oder für alle positiven Werthe von $\alpha$ continuirlich verbleibt: so sind wir, weil k die unendlich groß werdende ganze Zahl 2n vorstellt, die Gleichung (88) Nr. 178 des ersten Theiles auf den vorliegenden Fall anzuwenden berechtiget, und wir erhalten zufolge dieser Gleichung:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left\{\varphi(\tfrac{\pi}{2}) + \varphi\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \varphi\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \varphi\left(\frac{7\pi}{2}\right) + \ldots\right\},$$

wo die einzelnen Glieder der innerhalb der Klammern enthaltenen ohne Ende fortlaufenden Reihe aus der vorigen, durch $\varphi(\alpha)$ angedeuteten, Function von $\alpha$ zu ermitteln sind.

Zuerst erhält man:

$$\varphi(\tfrac{\pi}{2}) = \tfrac{0}{0}\,,$$

und wenn diese Unbestimmtheit nach bekannter Weise gehoben wird, ergiebt sich:

$$\varphi(\tfrac{\pi}{2}) = \tfrac{1}{4}\left\{\text{Cos.}x - \text{Sin.}x + \tfrac{\pi}{2}(\text{Cos.}x + \text{Sin.}x)\right\}.$$

Stellt ferner r was immer für eine positive ganze Zahl vor, so findet man:

$$\varphi\left(\frac{2r+1}{2}\,\pi\right) =$$

$$= \frac{1}{8r(r+1)}\left\{[(2r+1)\text{Sin.}\frac{2r+1}{2}\pi - 1]\,\text{Cos.}(2r+1)x - [2r+1 - \text{Sin.}\frac{2r+1}{2}\pi]\,\text{Sin.}(2r+1)x\right\};$$

und je nachdem r eine gerade oder ungerade Zahl vorstellt, erhält man die eine oder andere der nun folgenden zwei Bestimmungsgleichungen:

$$\varphi\left(\frac{4r+1}{2}\pi\right) = \frac{1}{4(2r+1)}\{\text{Cos.}(4r+1)x - \text{Sin.}(4r+1)x\}\ ,$$

$$\varphi\left(\frac{4r+3}{2}\pi\right) = \frac{-1}{4(2r+1)}\{\text{Cos.}(4r+3)x + \text{Sin.}(4r+3)x\}\ ,$$

in welcher für r jede ganze positive Zahl, Null mitbegriffen, gesetzt werden darf.

Werden diese Ergebnisse in die obige f(x) darstellende Gleichung gesetzt; so erhält man:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(\text{Cos.}x + \text{Sin.}x)$$
$$+ \tfrac{1}{\pi}\{\text{Cos.}x - \text{Cos.}3x + \tfrac{1}{3}(\text{Cos.}5x - \text{Cos.}7x) + \tfrac{1}{5}(\text{Cos.}9x - \text{Cos.}11x) + \ldots\}$$
$$- \tfrac{1}{\pi}\{\text{Sin.}x + \text{Sin.}3x + \tfrac{1}{3}(\text{Sin.}5x + \text{Sin.}7x) + \tfrac{1}{5}(\text{Sin.}9x + \text{Sin.}11x) + \ldots\}\ ,$$

oder auch:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(\text{Sin.}x + \text{Cos.}x)$$
$$+ \tfrac{2}{\pi}(\text{Sin.}x - \text{Cos.}x)\{\text{Sin.}2x + \tfrac{1}{3}\text{Sin.}6x + \tfrac{1}{5}\text{Sin.}10x + \tfrac{1}{7}\text{Sin.}14x + \ldots\}\ . \quad (f)$$

Diese gemischte Function f(x) ist folgender Beschaffenheit:

1) Hat man:

$$f(x) = \text{Sin.}x\ ,$$

für alle Werthe von x, die zwischen $r\pi$ und $r\pi + \frac{\pi}{2}$ enthalten sind, wo r aller ganzen positiven Zahlen, Null mitbegriffen, fähig ist.

2) Hat man:

$$f(x) = \text{Cos.}x\ ,$$

für alle Werthe von x, die zwischen $r\pi + \frac{\pi}{2}$ und $(r+1)\pi$ liegen, wo auch hier r jeden ganzen und positiven Zahlenwerth, mitbegriffen den Nullwerth, vorstellen kann.

3) Hat man:

$$f(x) = \text{Cos.}x\ ,$$

für alle Werthe von x, die zwischen $r\pi$ und $r\pi - \frac{\pi}{2}$ liegen, wo r, den Nullwerth mitbegriffen, jeden ganzen negativen Zahlenwerth vorstellt.

4) Hat man:

$$f(x) = \text{Sin.}x\ ,$$

für alle Werthe von x, die zwischen $r\pi - \frac{\pi}{2}$ und $(r-1)\pi$

zu liegen kommen, wo r den Nullwerth und auch jeden ganzen negativen Zahlenwerth vorstellen kann.

5) Beim jedesmaligen Uebergange dieser gemischten Function aus dem Zustande des Sinus in den des Cosinus und umgekehrt tritt eine endliche Discontinuität derselben ein; es treten sonach diese Discontinuitätszustände bei:

$$x = 4r\tfrac{\pi}{2}\,,\quad x = (4r+1)\tfrac{\pi}{2}\,,$$
$$x = (4r+2)\tfrac{\pi}{2}\,,\quad x = (4r+3)\tfrac{\pi}{2}$$

ein, wo r jeden positiven oder negativen ganzen Zahlenwerth, Null mitbegriffen, vorstellt; man hat nämlich:

$$f((4r\tfrac{\pi}{2}) = \tfrac{1}{2}\,,\quad f((4r+1)\tfrac{\pi}{2}) = \tfrac{1}{2}\,,$$
$$f((4r+2)\tfrac{\pi}{2}) = -\tfrac{1}{2}\,,\quad f((4r+3)\tfrac{\pi}{2}) = -\tfrac{1}{2}\,,$$

wo, wie eben erwähnt wurde, r jede ganze positive oder negative Zahl und auch gleich Null sein kann.

412) Eine besondere Angabe der Beschaffenheit jener gemischten Function von x, die der Ausdruck zur Rechten vom Gleichheitszeichen in (f) vorangehender Nr., beim Umsetzen von x in $ax+b$, darbieten würde, wo a und b beliebige reelle Zahlenwerthe vorstellen, erachten wir, nach dem was daselbst über die gemischte Function f(x) mitgetheilt ward, als unnöthig; hingegen dürfte die Angabe einiger Folgerungen der verschiedenen Eigenthümlichkeiten der gemischten Function f(x) in Gleichung (f) nicht ganz ohne Interesse sein, mit deren Mittheilung wir das durch die letzten vier Nrn. fortgezogene zusammengesetzte Problem beschließen wollen.

Die 1te und 4te Eigenthümlichkeit der Function f(x) führen auf die Gleichheit:

$$\mathrm{Sin.x} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{Sin.x} + \mathrm{Cos.x})$$
$$+ \tfrac{2}{\pi}\big(\mathrm{Sin.x} - \mathrm{Cos.x})(\mathrm{Sin.2x} + \tfrac{1}{3}\mathrm{Sin.6x} + \tfrac{1}{5}\mathrm{Sin.10x} + \tfrac{1}{7}\mathrm{Sin.14x} + ..\big)\,,$$

die mit der folgenden gleichbedeutend ist:

$$\tfrac{\pi}{4} = \mathrm{Sin.2x} + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Sin.6x} + \tfrac{1}{5}\,\mathrm{Sin.10x} + \tfrac{1}{7}\,\mathrm{Sin.14x} + \ldots\,,$$

für sämmtliche daselbst festgestellten Werthe von x; läßt man nun hier x in $\frac{x}{2}$ übergehen: so stellt sich als eine der angekündigten Folgerungen folgende Summationsgleichung heraus:

$$\tfrac{\pi}{4} = \mathrm{Sin.x} + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Sin.3x} + \tfrac{1}{5}\,\mathrm{Sin.5x} + \tfrac{1}{7}\,\mathrm{Sin.7x} + \ldots\,, \qquad (g)$$

die für alle Werthe von x, so zwischen $2r\pi$ und $(2r+1)\pi$ wie zwischen $-(2r+1)\pi$ und $-(2r+2)\pi$ enthalten sind, wo r, mitbegriffen den Nullwerth, jede ganze und positive Zahl vorstellen darf, als Gleichheit Bestand hat.

Ganz in analoger Weise führen die 2te und 3te der Eigenthümlichkeiten der Function f(x) in Gleichung (f) auf folgende Gleichheit:

$$-\tfrac{\pi}{4} = \text{Sin.x} + \tfrac{1}{3}\,\text{Siu.3x} + \tfrac{1}{5}\,\text{Sin.5x} + \tfrac{1}{7}\,\text{Sin.7x} + \ldots, \quad \text{(h)}$$

die für alle Werthe von x Bestand hat, welche entweder innerhalb der Grenzen $(2r+1)\pi$ und $(2r+2)\pi$ oder innerhalb $-2r\pi$ und $-(2r+1)\pi$ enthalten sind, wo r, wie im vorigen Falle, mitbegriffen den Nullwerth, aller ganzen und positiven Zahlenwerthe fähig ist.

Umsetzt man ferner in den so eben aufgestellten zwei Gleichheiten

$$x \text{ in } x - \tfrac{\pi}{2},$$

so bieten solche nach der Ordnung ihrer Folge die beiden folgenden dar:

$$-\tfrac{\pi}{4} = \text{Cos.x} - \tfrac{1}{3}\,\text{Cos.3x} + \tfrac{1}{5}\,\text{Cos.5x} - \tfrac{1}{7}\,\text{Cos.7x} + \ldots, \quad \text{(i)}$$

$$\tfrac{\pi}{4} = \text{Cos.x} - \tfrac{1}{3}\,\text{Cos.3x} + \tfrac{1}{5}\,\text{Cos.5x} - \tfrac{1}{7}\,\text{Cos.7x} + \ldots, \quad \text{(k)}$$

erstere findet für alle positiven oder negativen Werthe von x Statt, die numerisch inner den Grenzen $(4r+1)\frac{\pi}{2}$ und $(4r+3)\frac{\pi}{2}$ zu liegen kommen, letztere für positive und negative Werthe von x, die numerisch innerhalb der Grenzen $(4r-1)\frac{\pi}{2}$ und $(4r+1)\frac{\pi}{2}$ liegen, und in beiden Fällen stellt r, mitbegriffen den Nullwerth, jede ganze und positive Zahl vor.

413. Nachdem wir die Möglichkeit der analytischen Darstellung gemischter Functionen an einigen besondern Fällen dargethan, und hinlänglich beleuchtet zu haben vermeinen, wenden wir uns dem allgemeinen Problem zu: irgend eine gemischte Function einer allgemeinen Größe x analytisch auszudrücken.

Es stelle F(x) eine gemischte Function von x, von folgender Beschaffenheit vor.

Dieselbe sei, erstens, für alle Zwischenwerthe zu a und A von x mit irgend einer Function von x, $\varphi(x)$, die wir eindeutig voraussetzen oder auf eine solche (nach Nr. 131 des ersten Theiles) zurück gebracht uns denken, gleichbedeutend; zweitens, für alle Zwischen-

werthe zu a′ und A′ von x stimme dieselbe mit einer andern, gleichfalls eindeutig gedachten, Function von x, $\varphi'(x)$, überein; für die zu a″ und A″ gehörenden Zwischenwerthe von x stimme dieselbe, drittens, mit der abermals eindeutigen Function von x, $\varphi''(x)$, überein u. s. w.; endlich und zuletzt biete diese gemischte Function für alle Zwischenwerthe zu $a^{(n)}$ und $A^{(n)}$ von x einerlei Resultate mit der eindeutig gedachten Function von x, $\varphi^{(n)}(x)$, dar.

Damit die verlangte gemischte Function, die nach dem getroffenen Uebereinkommen gleichfalls eine eindeutige Function in Bezug auf x sein wird, keinerlei Unbestimmtheit darbiete, ist unerläßlich, daß jedes System zusammenhängender Zwischenwerthe von x, das inner zweien zusammengehörenden Grenzwerthen, wie etwa $a^{(k)}$ und $A^{(k)}$, enthalten ist, sämmtliche Zwischenwerthe der übrigen Systeme ausschließe. Dieses wird erreicht, wenn die äußersten Grenzen dieser Systeme zusammengehörender Zwischenwerthe folgenden Bedingungen nachkommen:

$$A - a = +,\ a' - A = \overset{+}{0},\ A' - a' = +,\ a'' - A' = \overset{+}{0},\ A'' - a'' = +,\ \ldots$$
$$\ldots\ A^{(n-1)} - a^{(n-1)} = +,\ a^{(n)} - A^{(n-1)} = \overset{+}{0},\ A^{(n)} - a^{(n)} = +;$$

jene dieser Bedingungsgleichungen, die das Zeichen + rechterhand haben, zeigen an, daß die Ausdrücke linkerhand der Gleichheitszeichen positive Zahlenwerthe vorstellen; jene aber mit dem Doppelzeichen $\overset{+}{0}$ deuten an, je nachdem nämlich das obere + oder das untere 0 gilt, daß die betreffenden Ausdrücke linkerhand entweder angebbare positive Werthe vorstellen oder der Null gleich sind.

Dieses vorausgeschickt hat man, nach den Nrn. 391 und 393 des vorausgehenden Paragraphen, folgende Bestimmungsgleichung für die verlangte gemischte Function F(x):

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_a^{A} \varphi(x')\,\mathrm{Cos.}\alpha(x-x')\,dx'\,d\alpha$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{a'}^{A'} \varphi'(x')\,\mathrm{Cos.}\alpha(x-x')\,dx'\,d\alpha$$
$$+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{a''}^{A''}\varphi''(x')\,\mathrm{Cos}.\alpha\,(x-x')\,dx'\,d\alpha$$

$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{a^{(n)}}^{A^{(n)}}\varphi^{(n)}(x')\,\mathrm{Cos}.\alpha\,(x-x')\,dx'\,d\alpha\ . \qquad (A)$$

Diese gemischte Function $F(x)$ entspricht den am Eingange gestellten Anforderungen, und bietet überdieß noch folgende Eigenthümlichkeiten dar:

1) Für $x=a$ stellt solche die Hälfte des Werthes der Function $\varphi(x)$, gleichfalls für $x=a$, dar, d. h. man hat:

$$F(a)=\tfrac{1}{2}\varphi(a)\ .$$

2) Bei $x=A$ hängt der Werth derselben von dem gegenseitigen arithmetischen Verhalten der beiden Zahlenwerthe von A und $a'$ ab; je nachdem man:

$$a'-A=+\ ,\quad \text{oder } a'-A=0$$

hat, erhält man auch:

$$F(A)=\tfrac{1}{2}\varphi(A)\ ,\quad \text{oder } F(A)=\tfrac{1}{2}\varphi(A)+\tfrac{1}{2}\varphi'(A)\ .$$

3) Von demselben gegenseitigen arithmetischen Verhalten der beiden Zahlenwerthe von A und $a'$ hängen auch die Werthe der gemischten Function $F(x)$ ab, wenn in derselben $x>A$ angenommen wird; bei der Annahme:

$$a'-A=+\ ,$$

stellt solche für alle Werthe von x, die größer als A und kleiner als $a'$ sind, den Nullwerth dar, und hört sonach für diese Werthe von x eine Function von x darzustellen auf; bei der zweiten Annahme hingegen, wenn man nämlich:

$$a'-A=0$$

hat, geht die gemischte Function $F(x)$ aus dem Zustande der Function $\varphi(x)$ in den der Function $\varphi'(x)$ über, und verbleibt in demselben bis in die Nähe des Werthes $A'$ von x.

4) Dasselbe gegenseitige arithmetische Verhalten der beiden Zahlenwerthe von A und $a'$ influenzirt gleichfalls noch auf den Werth der gemischten Function für $x=a'$; je nachdem nämlich:

$$a'-A=+\ ,\quad \text{oder } a'-A=0$$

ist, erhält man auch:

$F(a') = \frac{1}{2} q'(a')$, oder $F(a') = \frac{1}{2} q(a') + \frac{1}{2} q'(a')$.

5) Bei der Annahme $x = A'$ hat es mit der gemischten Function ein analoges Bewenden, wie bei der Annahme $x = A$ in 2); je nachdem nämlich die eine oder die andere der folgenden zwei Gleichungen:

$$a'' - A' = +, \text{ oder } a'' - A' = 0$$

Bestand hat, hat man auch:

$$F(A') = \frac{1}{2} q'(A'), \text{ oder } F(A') = \frac{1}{2} q'(A') + \frac{1}{2} q''(A').$$

6) Mit dem Zustande der gemischten Function $F(x)$ für Werthe von $x$, die größer als $A'$ sind, hat es ein ähnliches Verhalten wie in 3).

7) Wenn $x = a''$ wird, dann erfährt man das Verhalten der gemischten Function aus 4), wenn daselbst $A$ und $a'$ respective in $A'$ und $a''$ umgetauscht werden.

8) Wird endlich $x = A^{(n)}$ gesetzt, so erhält man:

$$F(A^{(n)}) = \frac{1}{2} q^{(n)}(A^{(n)}).$$

9) Für Werthe von $x$, die größer als $A^{(n)}$ und für solche, die kleiner als $a$ sind, stellt $F(x)$ keine Function von $x$ vor, und nimmt für alle diese Werthe von $x$ den Nullwerth an.

10) Unter der Voraussetzung, sämmtliche Functionen:

$$q(x), \; q'(x), \; q''(x), \ldots . \; q^{(n)}(x)$$

sind inner den Grenzwerthen $a$ und $A^{(n)}$ von $x$ continuirliche Functionen von $x$, welche Voraussetzung allen bisher gemachten Aussagen über die gemischte Function $F(x)$ zu Grunde liegt, unter dieser Voraussetzung nun, kann die in Rede stehende gemischte Function nur noch endliche Discontinuitäten eingehen, und zwar einzig in den Momenten ihres Ueberganges aus dem einen Zustande in den andern. So geht dieselbe bei $x = a$ eine endliche Discontinuität ein, wenn, wie aus der Zusammenstellung der in 1) und 9) aufgeführten Eigenthümlichkeiten derselben hervorgeht, $\varphi(a)$ einen von Null verschiedenen Werth darbietet. Eben so tritt, bei der Annahme $a' - A = +$, für $x = A$ eine Discontinuität ein, wenn nicht $\varphi(A) = 0$ ist, beim Statthaben dieser ist aber noch das Eintreffen der Gleichung $\varphi'(a') = 0$

unerläßlich, damit nicht in dem Momente des Ueberganges der gemischten Function aus dem Zustande der Function $\varphi(x)$ in den der Function $\varphi'(x)$ eine endliche Discontinuität eintrete; bei der Annahme $a' - A = 0$ oder $A = a'$ kann nur dann für $x = A$ oder $a'$ eine endliche Discontinuität umgangen werden, wenn man $\varphi(A) = \varphi'(A)$ hat. Ein gleiches Bewenden, wie in dem eben betrachteten Falle, hat es mit der gemischten Function $F(x)$ in dem Uebergangsmomente derselben aus dem Zustande der Function $\varphi'(x)$ in den von $\varphi''(x)$, nämlich, bei der Annahme $x = A'$; eben so ist das Verhalten derselben bei der Annahme $x = A''$, oder in dem Momente ihres Uebertrittes aus dem Zustande von $\varphi''(x)$ in dem von $\varphi'''(x)$ u. s. w. Endlich tritt, bei der Annahme $x = A^{(n)}$ der letzte endliche Discontinuitätszustand der gemischten Function $F(x)$ ein, falls man nicht $\varphi^{(n)}(A^{(n)}) = 0$ hat.

**414.** Was die gemischten Functionen zweier und mehrerer Variabeln betrifft, werden dieselben in ähnlicher Weise, wie die gemischten Functionen einer Variabeln, in Nr. 405, erklärt; daher dürfte auch, nach den in den vorausgeschickten Nrn. gemachten Mittheilungen über die Darstellung gemischter Functionen einer Variabeln, und mit Zuziehung dessen, so im vorausgehenden Paragraphen über die Darstellung von Functionen zweier und mehrerer Variabeln mitgetheilt ward, keine Schwierigkeit mehr zu gewärtigen sein, gemischte Functionen zweier und mehrerer Variabeln gleichfalls analytisch darzustellen.

Zur Erläuterung und Unterstützung dieser Aussage legen wir uns folgende gemischte Function zweier Variabeln zur analytischen Darstellung vor.

Es stelle $F(x,y)$ eine Function von $x$ und $y$ vor, die mit der Function:

$$x^2 + y^2$$

für alle negativen Werthe von $x$ und $y$ übereinstimme; für alle positiven Werthe von $x$ und $y$ dagegen soll dieselbe Function mit der folgenden:

$$x^3 + y^3$$

übereinstimmende Resultate darbieten.

Diese Function F(x,y) wird eine gemischte Function von x und y genannt, zu deren Darstellung wir sofort übergehen.

Nach dem in Nr. 400 mitgetheilten Theoreme stellt der Ausdruck:

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}(x'^2+y'^2)\,\mathrm{Cos}.\alpha(x-x')\,\mathrm{Cos}.\beta(y-y')\,dx'\,dy'\,d\alpha\,d\beta\,,$$

der, durchs Umsetzen von $x'$ in $-x'$ und von $y'$ in $-y'$ und mit Zuziehung der Gleichheit (7) Nr. 312, mit folgendem:

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}(x'^2+y'^2)\,\mathrm{Cos}.\alpha(x+x')\,\mathrm{Cos}.\beta(y+y')\,dx'dy'd\alpha d\beta \quad (a)$$

gleichbedeutend ist, die Function:

$$x^2+y^2 \quad (b)$$

für alle negativen Werthe von x und y, wie auch noch für $x=0$ und $y=0$ dar, indem die Function (b) für diese letztern Werthe von x und y in Null übergeht; wird aber entweder $x=0$ angenommen mit Beibehaltung der negativen Werthe von y, oder wird, mit Beibehaltung der negativen Werthe von x, $y=0$ angenommen, so stellt in dem einen wie in dem andern Falle der Ausdruck in (a) nur die Hälfte der Function in (b) vor; derselbe Ausdruck in (a) geht endlich jedesmal in Null über, wenn in demselben eine der Variabeln x oder y oder auch beide zugleich positive Werthe vorstellen.

Ferner stellt der Ausdruck:

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}(x'^3+y'^3)\,\mathrm{Cos}.\alpha(x-x')\,\mathrm{Cos}.\beta(y-y')\,dx'dy'd\alpha\,d\beta\,, \quad (a')$$

die Function:

$$x^3+y^3 \quad (b')$$

für sämmtliche positiven Werthe von x und y sowohl, als auch noch für $x=0$ und $y=0$ dar; bei der Annahme $x=0$ aber, falls y eine positive Größe verbleibt, wie auch, wenn man $y=0$ und x als positive Größe behandelt, stellt der Ausdruck in (a') nur die Hälfte der Function in (b') vor; derselbe Integralausdruck in (a') geht endlich in Null über, wenn die Variabeln x und y in demselben negative Werthe vorstellen.

Dieses vorausgesetzt, stellt folgende Gleichung die Lösung des uns gestellten Problems einer gemischten Function von x und y vor:

$$F(x,y) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty (x'^2+y'^2) \operatorname{Cos}.\alpha(x+x') \operatorname{Cos}.\beta(y+y') \, dx' \, dy' \, d\alpha \, d\beta$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty (x'^3+y'^3) \operatorname{Cos}.\alpha(x-x') \operatorname{Cos}.\beta(y-y') \, dx' \, dy' \, d\alpha \, d\beta \, .$$

Auch diese gemischte Function F(x,y) geht endliche Discontinuitäten ein — erstens, bei der Annahme $x=0$, für alle angebbaren reellen Werthe von y und zweitens, bei der Annahme $y=0$, wenn dann x irgend einen angebbaren reellen Werth vorstellt.

---

## §. III.

### Darstellung der Werthe bestimmter Integralien nach der Ableitungsmethode, wenn solche als Functionen der in denselben vorkommenden allgemeinen Größen angesehen werden.

**415.** Nach dem Geiste der Ableitungsmethode, wie wir solche im ersten Bande mehrfach zur Anwendung gebracht haben, gelangt man bei Zugrundelegung einer Gleichheit durch analytische Umformungen derselben auf neue Gleichheiten, die entweder zur Kenntniß der Werthe nener Integralien oder auf interessante Relationen unter denselben führen. Im vorliegenden Paragraphen soll nun gezeigt werden, wie, wenn ein bestimmtes Integrale als Function einer in demselben vorkommenden allgemeinen Größe angesehen und nach §. I vorliegenden Kapitels in der Form eines zwei- oder mehrfachen Integrals dargestellt wird, durch Herunterbringung dieser mehrfachen Integralien auf die möglichst kleinste Anzahl noch auszuführender Integrationsoperationen Relationen herbei geführt werden, die entweder noch nicht ermittelte Integralien von andern bereits bekannten in Abhängigkeit setzen und daher erstere bestimmen, oder, wenn diese auch unbekannt sind, wenigstens Beziehungen unter Integralien verschiedener Formen begründen, von denen bei Gelegenheit Nutzen gezogen werden kann.

**416.** Das bestimmte Integrale:

$$\int_0^\infty e^{-xz^m} dz \, ,$$

das nur dann einen endlichen Werth darbieten kann, wenn x als positive Größe auftritt, kann auch als Function von x angesehen und demnach nach dem in Nr. 391 begründeten Theorem für alle noch angebbaren positiven Werthe von x dargestellt werden.

Man hat nämlich nach der Gleichheit (VII) an angeführtem Orte folgende:

$$\int_0^\infty e^{-xz^m}\,dz = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \left\{\int_0^\infty e^{-x'z^m}\,dz\right\} \mathrm{Cos}.\alpha(x-x')\,dx'\,d\alpha\,,$$

welche für alle positiven Werthe von x gleichfalls als Gleichheit Bestand hat; hingegen geht der Ausdruck rechterhand in Null über, wenn in demselben x als negative Zahlengröße auftritt.

Da die Integrationsgrenzen nach z, x und $\alpha$ zur Rechten vom Gleichheitszeichen von diesen Variabeln unabhängig sind, so ist auch die Ordnungsfolge der Integrationsverrichtungen nach diesen dreien Variabeln willkührlich; zeigen wir dieselben nach der Ordnung der Variabeln x', z, $\alpha$ an, so hat man auch die Gleichheit:

$$\int_0^\infty e^{-xz^m}\,dz = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x'z^m}\,\mathrm{Cos}.\alpha(x-x')\,dx'\,dz\,d\alpha\,,$$

in der die Integration nach x' eine leicht vollziehbare ist. Man hat nämlich:

$$\int_0^\infty e^{-x'z^m}\,\mathrm{Cos}.\alpha(x-x')\,dx' = \mathrm{Cos}.\alpha x\int_0^\infty e^{-x'z^m}\,\mathrm{Cos}.\alpha x'\,dx' + \mathrm{Sin}\alpha x\int_0^\infty e^{-x'z^m}\,\mathrm{Sin}.\alpha x'\,dx';$$

werden die Integrationen rechterhand nach den Gleichungen (53) in Nr. 159 des ersten Theiles vorgenommen, so hat man:

$$\int_0^\infty e^{-x'z^m}\,\mathrm{Cos}.\alpha(x-x')\,dx' = \frac{z^m\,\mathrm{Cos}.\alpha x + \alpha\,\mathrm{Sin}.\alpha x}{\alpha^2 + z^{2m}}\,,$$

welches Ergebniß in die vorige Gleichheit gesetzt, dieselbe in folgende umsetzt:

$$\int_0^\infty e^{-xz^m}\,dz = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\alpha\,\mathrm{Sin}.\alpha x + z^m\,\mathrm{Cos}.\alpha x}{\alpha^2 + z^{2m}}\,dz\,d\alpha\,.$$

Der Ausdruck zur Rechten in dieser Gleichheit geht, wie am Eingange erwähnt wurde, in Null über, wenn x einen negativ reel=

len Zahlenwerth annimmt; folglich besteht zugleich mit der eben aufgestellten auch folgende Gleichheit:

$$0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{-\alpha\,\mathrm{Sin.}\alpha x + z^m\,\mathrm{Cos.}\alpha x}{\alpha^2 + z^{2m}}\,dz\,d\alpha\,,$$

gleichfalls für sämmtliche positiven Werthe von x; durch Addition wie durch Subtraktion dieser zwei Gleichheiten endlich ergeben sich die beiden folgenden:

$$\int_0^\infty e^{-xz^m}dz = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{z^m}{\alpha^2 + z^{2m}}\,\mathrm{Cos.}\alpha x\,dz\,d\alpha\,,$$

$$\int_0^\infty e^{-xz^m}dz = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\alpha}{\alpha^2 + z^{2m}}\,\mathrm{Sin.}\alpha x\,dz\,d\alpha\,,$$

die ebenfalls nur für positive Werthe von x Bestand haben.

In diesen Gleichheiten sind ferner die Integrationen nach z, rechterhand der Gleichheitszeichen, leicht vollziehbar — denn man hat:

$$\int_0^\infty \frac{z^m dz}{\alpha^2 + z^{2m}} = \frac{\sqrt[m]{\alpha}}{\alpha}\int_0^\infty \frac{z^m dz}{1 + z^{2m}}\,,$$

und

$$\int_0^\infty \frac{dz}{\alpha^2 + z^{2m}} = \frac{\sqrt[m]{\alpha}}{\alpha^2}\int_0^\infty \frac{dz}{1 + z^{2m}}\,,$$

daher hat man vermöge der Gleichung (13) Nr. 141:

$$\int_0^\infty \frac{z^m dz}{\alpha^2 + z^{2m}} = \frac{\sqrt[m]{\alpha}}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2m\,\mathrm{Cos.}\frac{\pi}{2m}}\,,$$

$$\int_0^\infty \frac{dz}{\alpha^2 + z^{2m}} = \frac{\sqrt[m]{\alpha}}{\alpha^2}\cdot\frac{\pi}{2m\,\mathrm{Sin.}\frac{\pi}{2m}}\,;$$

sonach gehen die obigen Gleichheiten über in:

$$\int_0^\infty e^{-xz^m}\,dz = \frac{1}{m\,\mathrm{Cos.}\frac{\pi}{2m}}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos.}x\alpha}{\sqrt[m]{\alpha^{m-1}}}\,d\alpha\,,$$

$$\int_0^\infty e^{-xz^m}\,dz = \frac{1}{m\,\mathrm{Sin.}\frac{\pi}{2m}}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin.}x\alpha}{\sqrt[m]{\alpha^{m-1}}}\,d\alpha\,.$$

Das bestimmte Integrale linkerhand der Gleichheitszeichen haben wir im ersten Theile durch das Euler'sche Integrale, oder durch die Function mit dem Zeichen $\Gamma$ dargestellt; folglich erscheinen die bestimmten Integralien rechterhand gleichfalls bestimmt, und wir haben, da man nach Gleichung (35) Nr. 216 für alle positiven Werthe von x:

$$\int_0^\infty e^{-xz^m}\,dz = \frac{1}{m\sqrt[m]{x}}\,\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)$$

hat, folgende zwei Integralbestimmungen:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos.}ax}{\sqrt[m]{x^{m-1}}}\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}{\sqrt[m]{a}}\,\mathrm{Cos.}\,\frac{\pi}{2m}\,,$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin.}ax}{\sqrt[m]{x^{m-1}}}\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}{\sqrt[m]{a}}\,\mathrm{Sin.}\,\frac{\pi}{2m}\,,$$

welche für alle positiven Werthe von a und, vermöge der oben zugezogenen Gleichung (13), für jene positiven Werthe von m bestehen, die größer als die Einheit sind, welche aber auch noch für $m=1$ als bestehend erkannt werden.

Aus diesen zwei Gleichheiten wollen wir nun mittelst der folgenden Betrachtungen zwei viel allgemeinere Integralbestimmungen ziehen.

Läßt man in denselben vorerst m in $\frac{1}{m}$ übergehen, so erhält man:

$$\int_0^\infty x^{m-1}\,\mathrm{Cos.}ax\,dx = \frac{\Gamma(m)}{a^m}\,\mathrm{Cos.}\,\frac{m\pi}{2}\,,$$

$$\int_0^\infty x^{m-1}\,\text{Sin.}ax\,dx = \frac{\Gamma(m)}{a^m}\,\text{Sin.}\frac{m\pi}{2},$$

die, wie aus deren Deduction hervorgeht, nur für jene positiven Werthe von m Bestand haben, welche die Einheit nicht übertreffen; allein, wenn der Umstand zugezogen wird, daß dieselben auch in Bezug auf a, für alle positiven Werthe derselben, als Gleichheiten bestehen, so sind wir die allgemeine Gültigkeit dieser Integralbestimmungen für jedweden positiven Werth von m nachzuweisen im Stande.

Differenzirt man nämlich diese Gleichheiten n mal hintereinander in Bezug auf a, berücksichtiget hiebei folgende Gleichheiten:

$$\text{Cos.}\frac{m\pi}{2} = \text{Sin.}\frac{(m+1)\pi}{2} = -\text{Cos.}\frac{(m+2)\pi}{2} = -\text{Sin.}\frac{(m+3)\pi}{2} = \text{Cos.}\frac{(m+4)\pi}{2}\text{ u.s.w.},$$

$$\text{Sin.}\frac{m\pi}{2} = -\text{Cos.}\frac{(m+1)\pi}{2} = -\text{Sin.}\frac{(m+2)\pi}{2} = \text{Cos.}\frac{(m+3)\pi}{2} = \text{Sin.}\frac{(m+4)\pi}{2}\text{ u.s.w.},$$

so gelangt man auf:

$$\int_0^\infty x^{m+n-1}\,\text{Cos.}ax\,dx = m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)\,\Gamma(m)\frac{\text{Cos.}\frac{m+n}{2}\pi}{a^{m+n}},$$

$$\int_0^\infty x^{m+n-1}\,\text{Sin.}ax\,dx = m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)\,\Gamma(m)\frac{\text{Sin.}\frac{m+n}{2}\pi}{a^{m+n}};$$

zieht man nun die die Function $\Gamma$ beschlagende Relation $(\gamma)$ in Nr. 220 des ersten Theiles in Betracht, so gehen diese Gleichheiten in folgende über:

$$\int_0^\infty x^{m+n-1}\,\text{Cos.}ax\,dx = \frac{\Gamma(m+n)}{a^{m+n}}\,\text{Cos.}\frac{(m+n)\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty x^{m+n-1}\,\text{Sin.}ax\,dx = \frac{\Gamma(m+n)}{a^{m+n}}\,\text{Sin.}\frac{(m+n)\pi}{2};$$

und da n jedwede ganze und positive Zahl, mitbegriffen Null, vorstellen kann, so stellt m+n was immer für einen positiven Zahlenwerth vor, welcher durch m vorgestellt und in diese eben gewon-

nenen Gleichheiten eingeführt, diese dann die Richtigkeit unserer vorigen Behauptung darthun. Es bestehen diesem nach folgende zwei Integralbestimmungen:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty x^{a-1}\,\mathrm{Cos.}bx\,dx &= \frac{\Gamma(a)}{b^a}\,\mathrm{Cos.}\,\frac{a\pi}{2}\,,\\ \int_0^\infty x^{a-1}\,\mathrm{Sin.}bx\,dx &= \frac{\Gamma(a)}{b^a}\,\mathrm{Sin.}\,\frac{a\pi}{2}\,,\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

für sämmtliche positiven Werthe von a und b. Ueberdieß entnehmen wir hieraus, daß die in Nr. 216 des ersten Theiles aufgestellte Integralbestimmung (33) dann noch Bestand hat, wenn der allgemeinen Zahlengröße m daselbst auch die imaginäre Einheit zu Grunde gelegt wird.

Aus diesen Integralbestimmungen in (1) theilen wir hier noch nach der „Ableitungsmethode" einige Folgerungen mit.

Läßt man in denselben die Integrationsvariable x in $x^c$ übergehen, so verbleiben die Integrationsgrenzen dieselben, falls man nämlich c als positive Größe erklärt; gehen wir nun von dieser Annahme aus und umsetzen überdieß noch ac in a, also a in $\frac{a}{c}$: so stellen sich auch folgende zwei Integralbestimmungen heraus:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty x^{a-1}\,\mathrm{Cos.}(bx^c)\,dx &= \frac{\Gamma\left(\frac{a}{c}\right)}{c\sqrt[c]{b^a}}\,\mathrm{Cos.}\,\frac{a\pi}{2c}\,,\\ \int_0^\infty x^{a-1}\,\mathrm{Sin.}(bx^c)\,dx &= \frac{\Gamma\left(\frac{a}{c}\right)}{c\sqrt[c]{b^a}}\,\mathrm{Sin.}\,\frac{a\pi}{2c}\,,\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

die für alle positiven Werthe von a, b, c als Gleichheiten bestehen.

Eben so gewinnt man durch successives Differenziren der Gleichheiten in (1) nach der allgemeinen, jedoch positiven Größe a manche beachtenswerthe Integralbestimmung. So bietet das Ergebniß einer ersten Differenziation die folgenden dar:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty x^{a-1}\,\mathrm{Cos.}bx\,\log.x\,dx &= \frac{\Gamma_1(a)\mathrm{Cos.}\frac{a\pi}{2}-\Gamma(a)\left[\mathrm{Cos.}\frac{a\pi}{2}\log.b+\frac{\pi}{2}\mathrm{Sin.}\frac{a\pi}{2}\right]}{b^a},\\ \int_0^\infty x^{a-1}\,\mathrm{Sin.}bx\,\log.x\,dx &= \frac{\Gamma_1(a)\mathrm{Sin.}\frac{a\pi}{2}-\Gamma(a)\left[\mathrm{Sin.}\frac{a\pi}{2}\log.b-\frac{\pi}{2}\mathrm{Cos.}\frac{a\pi}{2}\right]}{b^a},\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

die, wie die Gleichheiten in (1), für alle positiven Werthe von a und b Bestand haben. Durch fortgesetztes Differenziren dieser Gleichheiten nach a ist man auch die bestimmten Integralien:

$$\int_0^\infty x^{a-1}\,\mathrm{Cos.}bx\,(\log.x)^n\,dx\,,\quad \int_0^\infty x^{a-1}\,\mathrm{Sin.}bx\,(\log.x)^n\,dx\,,$$

für jedes ganze und positive n herzustellen in der Lage.

417. Das bestimmte Integrale:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin.}az}{z}\,e^{-xz}\,dz\,,$$

das nur für positive Werthe von x, wie auch noch für einen unendlich kleinwerdenden Werth dieser Größe eine endliche Größe darstellt, können wir im Bereiche dieser Werthe von x, als Function von x ansehen und nach dem Theoreme in Nr. 391, wie folgt, darstellen:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin.}az}{z}\,e^{-xz}dz=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-x'z}\frac{\mathrm{Sin.}az}{z}\,dz\right)\mathrm{Cos.}\alpha(x-x')dx'd\alpha\,,$$

oder auch wie folgt:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin.}az}{z}\,e^{-xz}dz=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x'z}\,\mathrm{Cos.}\alpha\,(x-x')\,\frac{\mathrm{Sin.}az}{z}\,dx'\,dz\,d\alpha\,.$$

Der Ausdruck zur Rechten ist nach dem citirten Theoreme der Repräsentant des zur Linken für sämmtliche noch angebbaren und positiven Werthe von x, für einen unendlich kleinwerdenden Werth von von x stellt ersterer bloß die Hälfte des letztern dar, für negativ angebbare Werthe von x endlich geht ersterer jedesmal in Null über; schließen wir den unendlich kleinwerdenden Werth von x von

jeder Betrachtnahme aus und integriren rechterhand nach x′ inner den angezeigten Grenzen: so ergeben sich, beachtend die Gleichung (5) Nr. 388, folgende zwei Gleichheiten:

$$\text{Arctang.}\frac{a}{x} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{z\text{Cos.}\alpha x + \alpha\text{Sin.}\alpha x}{\alpha^2+z^2}\cdot\frac{\text{Sin.}az}{z}\,dz\,d\alpha\,,$$

$$0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{z\text{Cos.}\alpha x - \alpha\text{Sin.}\alpha x}{\alpha^2+z^2}\cdot\frac{\text{Sin.}az}{z}\,dz\,d\alpha\,,$$

aus denen die folgenden gezogen werden:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\text{Cos.}\alpha x\text{Sin.}az}{\alpha^2+z^2}\,dz\,d\alpha &= \tfrac{\pi}{2}\,\text{Arctang.}\frac{a}{x}\,,\\ \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\text{Sin.}\alpha x\text{Sin.}az}{\alpha^2+z^2}\,\frac{\alpha}{z}\,dz\,d\alpha &= \tfrac{\pi}{2}\,\text{Arctang.}\frac{a}{x}\,,\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

die für alle angebbaren positiven Werthe von x und für sämmtliche reellen Werthe von a Bestand haben.

Aus der ersteren dieser Gleichheiten läßt sich noch ein interessanter Zusammenhang zweier einfachen bestimmten Integralien, in folgender Weise, ableiten.

Vorerst stellen wir dieselbe, wie folgt:

$$\int_0^\infty\left(\int_0^\infty \frac{\text{Sin.}az}{\alpha^2+z^2}\,dz\right)\text{Cos.}x\alpha\,d\alpha = \tfrac{\pi}{2}\,\text{Arctang.}\frac{a}{x}\,,$$

die, durch Vertauschung von $\alpha$ mit x, in folgende:

$$\int_0^\infty\left(\int_0^\infty \frac{\text{Sin.}az}{x^2+z^2}\,dz\right)\text{Cos.}\alpha x\,dx = \tfrac{\pi}{2}\,\text{Arctang.}\frac{a}{\alpha}$$

übergeht, und für alle angebbaren positiven Werthe von $\alpha$ Bestand hat; ferner stellt der innerhalb der Parenthesen linkerhand vom Gleichheitszeichen enthaltene Ausdruck für sämmtliche positiven oder negativen Werthe von x eine continuirliche Function dieser Größe vor: daher zieht man aus derselben mit Zuziehung des Ausgangs der Nr. 388 begründeten Theorems folgende Gleichheit:

$$\int_0^\infty \text{Arctang.}\frac{a}{x}\,\text{Cos.}\alpha x\,dx = \int_0^\infty \frac{\text{Sin.}az}{\alpha^2+z^2}\,dz\,,$$

in der nothwendig $\alpha$ vor Null verschieden gedacht sein muß. Halten wir nun diese Voraussetzung fest und ersetzen im Ausdrucke zur Linken

$$\text{Arctang.}\frac{a}{x} \quad \text{durch} \quad \frac{\pi}{2} - \text{Arctang.}\frac{x}{a}\,,$$

berücksichtigen den Umstand, daß dann

$$\int_0^\infty \text{Cos.}\alpha x\,dx = 0$$

ist; so gelangen wir auf die Gleichheit:

$$\int_0^\infty \text{Arctang.}\frac{x}{a}\,\text{Cos.}\alpha x\,dx = -\int_0^\infty \frac{\text{Sin.}az}{\alpha^2+z^2}\,dz\,,$$

aus der, wenn zuerst

$$a \text{ in } \frac{1}{b}\,, \quad \alpha \text{ in } a\,,$$

und hierauf dann

$$z \text{ in } az$$

vertauscht wird, die folgende gezogen wird:

$$\int_0^\infty \text{Arctang.}bx\,\text{Cos.}ax\,dx = -\frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{\text{Sin.}\frac{a}{b}z}{1+z^2}\,dz\,. \qquad (5)$$

Diese Gleichung drückt das bestimmte Integrale linkerhand durch ein im ersten Theile, in Nr. 204, bereits ermitteltes bestimmte Integrale aus, und kann auch als complentäre zur Gleichung (80) Nr. 170 desselben Theiles angesehen werden. Auf dieselbe Gleichung (5) gelangt man übrigens auch, wenn der eine oder der andere bestimmte Integralausdruck derselben nach der sogenannten theilweisen Integration behandelt und dabei die Grenzgleichungen:

$$\text{Lim: Sin.}\alpha x = 0\,, \quad \text{Lim: Cos.}\alpha x = 0\,,$$

wo $\alpha$ nicht unendlich kleinwerdend, x aber unendlich großwerdend ist, berücksichtiget wird.*)

---

*) Die Grenzgleichungen:

$$\text{Lim}: \text{Sin}.x = 0 \text{ nnd } \text{Lim}: \text{Cos}.x = 0,$$

die in dem ersten Theile öfters zur Anwendung gebracht worden sind, haben den größten Widerspruch von mancher beachtenswerthen Seite erfahren. Indem wir von unserer Seite allerdings zugeben, daß die in Nr. 151 mitgetheilte Begründung dieser Grenzgleichungen nicht frei von jedem Einwurfe dasteht; von unsern geehrten Gegnern aber gleichwohl die Anerkennung gewärtigen, daß die mittelst dieser Grenzgleichungen von uns gewonnenen durchaus richtigen Ergebnisse mit aller mathemathischen Strenge und ohne irgend eine fremdartige Zugabe durchgeführt worden sind: so ergreifen wir den gegenwärtigen Anlaß, besagte Grenzgleichungen in vorliegender Anmerkung, einer abermaligen Begründung zu unterziehen. — Nach dem in Nr. 115 des ersten Theiles vorgeführten Satze sind wir folgende Aussage zu machen berechtiget. „Wenn eine eindeutige Function von x, beim unbestimmten unendlichen „Wachsen von x die Eigenschaft der Continuität beibehält, d. h. weder eines „unendlich großwerdenden Werthes fähig ist, noch bei unendlich kleinwerdenden „Aenderungen von x endliche oder gar unendlich großwerdende Aenderungen „erfährt; so ist besagte Function bei jeder Verfügung über den unendlich groß„werdenden Werth von x eines einzigen und völlig bestimmten Werthes fähig." Da nun die Function $e^{xi} = \text{Cos}.x + i\,\text{Sin}.x$ (wo $i = \sqrt{-1}$ ist) sämmtlichen Anforderungen dieser Aussage nachkömmt, so sind wir zur Folgerung berechtiget, daß die Functionen Cos.x und Sin.x, bei einem unbestimmten unendlichen Wachten von x, jede nur eines einzigen und völlig bestimmten Werthes fähig ist. — Dieses zugegeben, fällt uns nicht mehr schwer, die Null für diesen einzigen Werth festzustellen. Wäre nämlich dieser einzige Werth, dessen Cos.x z. B. fähig ist, von Null verschieden, also angebbar oder endlich und mit einem bestimmten Vorzeichen versehen; dann würde, nach dem in Nr. 116 des ersten Theiles begründeten Satze, auch ein endlicher Werth für x existiren, den wir, wie im citirten Satze geschah, durch r darstellen wollen, für welchen und für alle noch größern bis in's Unendliche wachsenden Werthe von x die Function Cos.x einerlei Vorzeichen beibehielt; für eine ununterbrochene und unbestimmte Reihe endlicher Werthe von x ist dieses mit den allgemein bekannten Eigenschaften der Function Cos.x durchaus im Widerspruche — daher sind wir zur einzigen noch möglichen Annahme $\text{Lim}: \text{Cos}.x = 0$ bemüßiget, welches zu zeigen wir uns vorgesetzt. Ganz in ähnlicher Weise wird auch $\text{Lim}: \text{Sin}.x = 0$ nachgewiesen und daher die Grenzgleichung $\text{Lim}: e^{xi} = 0$, wo das Grenzzeichen auf das unbestimmte unendliche Wachsen von x Bezug hat, gerechtfertiget.

418. Legen wir uns ferner das bestimmte Integrale:

$$\int_1^\infty e^{-xz}\frac{dz}{z},$$

welches wir im ersten Theile (Integralrechnung IV, Nr. 201, Gleichung 17) bereits ermittelt haben, zur Umformung nach dem in Nr. 391 begründeten Theoreme vor.

Da in diesem bestimmten Integrale, damit dasselbe einen endlichen Werth zulasse, die allgemeine Größe x nothwendig einen positiven Werth vorstellt, so bietet besagtes Theorem folgende Gleichheit

$$\int_1^\infty e^{-xz}\frac{dz}{z} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\left(\int_1^\infty e^{-x'z}\frac{dz}{z}\right)\mathrm{Cos}.\alpha(x-x')\,dx'\,d\alpha,$$

für alle irgendwie noch angebbaren positiven Werthe von x dar; behandelt man diese, wie die analogen in den beiden vorausgehenden Nrn., so ergiebt sich für dieselben Werthe von x auch folgende:

$$\int_1^\infty e^{-xz}\frac{dz}{z} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_1^\infty\frac{z\mathrm{Cos}.\alpha x+\alpha\mathrm{Sin}.\alpha x}{\alpha^2+z^2}\,\frac{dz}{z}\,d\alpha.$$

Wird rechterhand vom Gleichheitszeichen

z durch $\frac{1}{z}$

ersetzt, so hat man auch die Gleichheit:

$$\int_1^\infty e^{-xz}\frac{dz}{z} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^1\frac{\mathrm{Cos}.\alpha x+\alpha z\,\mathrm{Sin}.\alpha x}{1+\alpha^2z^2}\,dz\,d\alpha,$$

für alle angebbaren positiven Werthe von x; und da nach demselben allgemeinen Theoreme in Nr. 391 der Ausdruck rechterhand in Null übergeht, wenn in demselben für x irgend ein angebbarer negativer Werth gesetzt wird, so besteht auch die Gleichheit:

$$0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^1\frac{\mathrm{Cos}.\alpha x-\alpha z\,\mathrm{Sin}.\alpha x}{1+\alpha^2z^2}\,dz\,d\alpha,$$

gleichfalls für alle angebbar positiven Werthe von x.

Werden nun diese zwei Gleichheiten, die für dieselben Werthe von x bestehen, zu einander addirt und von einander subtrahirt, so erhält man:

$$\int_0^\infty \int_0^1 \frac{\mathrm{Cos.}\alpha x}{1+\alpha^2 z^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\alpha = \tfrac{\pi}{2}\int_1^\infty \mathrm{e}^{-xz}\,\frac{\mathrm{d}z}{z}\,,$$

$$\int_0^\infty \int_0^1 \frac{\alpha z\,\mathrm{Sin.}\alpha z}{1+\alpha^2 z^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\alpha = \tfrac{\pi}{2}\int_1^\infty \mathrm{e}^{-xz}\,\frac{\mathrm{d}z}{z}\,;$$

werden zur Linken der Gleichheitszeichen die Integrationen nach z vollzogen, so hat man auch, wegen:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{1+\alpha^2 z^2} = \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{Arctang.}\alpha \quad \text{und} \quad \int_0^1 \frac{z\mathrm{d}z}{1+\alpha^2 z^2} = \frac{1}{2\alpha^2}\log.(1+\alpha^2)\,,$$

folgende zwei Gleichheiten:

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}x\alpha\,\mathrm{Arctang.}\alpha\,\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha} = \tfrac{\pi}{2}\int_1^\infty \mathrm{e}^{-xz}\,\frac{\mathrm{d}z}{z}\,,$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Sin.}x\alpha\,\log.(1+\alpha^2)\,\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha} = \pi\int_1^\infty \mathrm{e}^{-xz}\,\frac{\mathrm{d}z}{z}\,,$$

für alle angebbar positiven Werthe von x.

Vertauscht man hier:

$$x \text{ in } a\,,\ \alpha \text{ in } bx \text{ und hierauf } a \text{ in } \frac{a}{b},$$

so gehen folgende zwei Integralbestimmungen hervor:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{Arctang.}bx\,\mathrm{Cos.}ax\,\frac{\mathrm{d}x}{x} &= \tfrac{\pi}{2}\int_1^\infty \mathrm{e}^{-\frac{a}{b}z}\,\frac{\mathrm{d}z}{z}\,,\\ \int_0^\infty \log.(1+b^2x^2)\,\mathrm{Sin.}ax\,\frac{\mathrm{d}x}{x} &= \pi\int_1^\infty \mathrm{e}^{-\frac{a}{b}z}\,\frac{\mathrm{d}z}{z}\,,\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

indem das bestimmte Integrale zur Rechten der Gleichheitszeichen, wie am Eingange bemerkt wurde, im ersten Bande in Nr. 201 be-

reits ermittelt worden ist. Es bestehen jedoch diese Gleichheiten nur für angebbare positive Werthe von a und b.

419. Aus den eben gewonnenen Gleichheiten in (6) lassen sich, da die Functionen:

$$\frac{\text{Arctang.bx}}{x} \text{ und } \frac{\log.(1+b^2x^2)}{x},$$

für alle Werthe von $x=0$ bis $x=\infty$ continuirlich verbleiben, zwei nicht uninteressante bestimmte Integralien ermitteln, die wir hier noch mittheilen wollen.

Man setze in dieselben statt a der Reihe nach die Zahlenwerthe:

$$1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, \ldots$$

so bieten die Summen der entsprechenden unter denselben die zwei folgenden dar:

$$\int_0^\infty \frac{\text{Arctang.bx}}{x} (\text{Cos.x} + \text{Cos.5x} + \text{Cos.9x} + \text{Cos.13x} + \ldots)\, dx =$$

$$= \tfrac{\pi}{2} \int_1^\infty \left( e^{-\frac{z}{b}} + e^{-\frac{5z}{b}} + e^{-\frac{9z}{b}} + e^{-\frac{13z}{b}} + \ldots \right) \frac{dz}{z},$$

$$\int_0^\infty \frac{\log.(1+b^2x^2)}{x} (\text{Sin.x} + \text{Sin.5x} + \text{Sin.9x} + \text{Sin.13x} + \ldots)\, dx =$$

$$= \pi \int_1^\infty \left( e^{-\frac{z}{b}} + e^{-\frac{5z}{b}} + e^{-\frac{9z}{b}} + e^{-\frac{13z}{b}} + \ldots \right) \frac{dz}{z};$$

in dieselben Gleichheiten (6) setze man ferner statt a der Reihe nach die Zahlenwerthe:

$$3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, \ldots$$

und addire die Ergebnisse in ähnlicher Weise wie bei der vorhergehenden Annahme über a, so werden folgende zwei Gleichheiten erhalten:

$$\int_0^\infty \frac{\text{Arctang.bx}}{x} (\text{Cos.3x} + \text{Cos.7x} + \text{Cos.11x} + \text{Cos.15x} + \ldots)\, dx =$$

$$= \tfrac{\pi}{2} \int_1^\infty \left( e^{-\frac{3z}{b}} + e^{-\frac{7z}{b}} + e^{-\frac{11z}{b}} + e^{-\frac{15z}{b}} + \ldots \right) \frac{dz}{z},$$

$$\int_0^\infty \frac{\log.(1+b^2x^2)}{x}\,(\mathrm{Sin.}3x+\mathrm{Sin.}7x+\mathrm{Sin.}11x+\mathrm{Sin.}15x+\ldots)\,dx=$$

$$=\pi\int_1^\infty\left(e^{-\frac{3z}{b}}+e^{-\frac{7z}{b}}+e^{-\frac{11z}{b}}+e^{-\frac{15z}{b}}+\ldots\right)\frac{dz}{z}\,;$$

wird nun die erste dieser zur ersten der vorhergehenden zwei Gleichheiten addirt, die zweite dieser hingegen von der zweiten der obigen subtrahirt: so gewinnen wir, wenn überdieß nach b in $\frac{1}{b}$ umgesetzt wird, folgende zwei Gleichheiten:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Arctang.}\frac{x}{b}}{x}\,(\mathrm{Cos.}x+\mathrm{Cos.}3x+\mathrm{Cos.}5x+\ldots+\mathrm{Cos.}(2k-1)x)\,dx=$$

$$=\tfrac{\pi}{2}\int_1^\infty\left(e^{-bz}+e^{-3bz}+e^{-5bz}+\ldots+e^{-(2k-1)bz}\right)\frac{dz}{z}\,,$$

$$\int_0^\infty \frac{\log.\left(1+\frac{x^2}{b^2}\right)}{x}(\mathrm{Sin.}x-\mathrm{Sin.}3x+\mathrm{Sin.}5x-\ldots+(-1)^{k-1}\,\mathrm{Sin.}(2k-1)x)\,dx=$$

$$=\pi\int_1^\infty\left(e^{-bz}-e^{-3bz}+e^{-5bz}-\ldots+(-1)^{k-1}e^{-(2k-1)bz}\right)\frac{dz}{z}\,,$$

oder auch, wenn die inner den Klammern befindlichen Ausdrücke summirt werden, folgende:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Arctang.}\frac{x}{b}}{x}\,\frac{\mathrm{Sin.}2kx}{\mathrm{Sin.}x}\,dx=\tfrac{\pi}{2}\int_1^\infty\frac{e^{-bz}(1-e^{-2bkz})}{1-e^{-2bz}}\,\frac{dz}{z}\,,$$

$$\tfrac{1}{2}(-1)^{k-1}\int_0^\infty \frac{\log.\left(1+\frac{x^2}{b^2}\right)}{x}\,\frac{\mathrm{Sin.}2kx}{\mathrm{Cos.}x}\,dx=\pi\int_1^\infty\frac{e^{-bz}(1-(-1)^k e^{-2bkz})}{1+e^{-2bz}}\,\frac{dz}{z}\,.$$

Erklären wir in diesen Gleichungen, die für alle angebbar positiven Werthe von b identisch bestehen, die ganze und positive Zahl k, als unendlich großwerdend; so gehen dieselben, mit Zuziehung der Gleichung (89) Nr. 178 und der Gleichung (96) Nr. 179 des ersten Bandes, in folgende über:

$$\int_1^\infty \frac{1}{e^{bz} - e^{-bz}} \frac{dz}{z} =$$

$$= \frac{1}{2b} - \frac{1}{\pi}\left\{\text{Arctang.}\frac{\pi}{b} - \tfrac{1}{2}\,\text{Arctang.}\frac{2\pi}{b} + \tfrac{1}{3}\,\text{Arctang.}\frac{3\pi}{b} - \tfrac{1}{4}\,\text{Arctang.}\frac{4\pi}{b} + \ldots\right\},$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{e^{bz} + e^{-bz}} \frac{dz}{z} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\log.\left[1+\left(\frac{\pi}{2b}\right)^2\right] - \tfrac{1}{3}\log.\left[1+\left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2\right] + \tfrac{1}{5}\log.\left[1+\left(\frac{5\pi}{2b}\right)^2\right] - \ldots\right\}.$$

Wird hier ferner:

$$z \text{ in } \frac{x}{m} \text{ und } b \text{ in } \tfrac{1}{2}bm$$

umgesetzt, so erhält man die folgenden angekündigten zwei Integralbestimmungen:

$$\int_m^\infty \frac{1}{e^{\frac{b}{2}x} - e^{-\frac{b}{2}x}} \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{1}{mb} - \frac{2}{\pi}\left\{\tfrac{1}{2}\,\text{Arctang.}\frac{2\pi}{mb} - \tfrac{1}{4}\,\text{Arctang.}\frac{4\pi}{mb} + \tfrac{1}{6}\,\text{Arctang.}\frac{6\pi}{mb} - \ldots\right\}, \quad (7)$$

$$\int_m^\infty \frac{1}{e^{\frac{b}{2}x} + e^{-\frac{b}{2}x}} \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\log\left[1+\left(\frac{\pi}{mb}\right)^2\right] - \tfrac{1}{3}\log.\left[1+\left(\frac{3\pi}{mb}\right)^2\right] + \tfrac{1}{5}\log.\left[1+\left(\frac{5\pi}{mb}\right)^2\right] - \ldots\right\}, \quad (8)$$

die für alle angebbar positiven Werthe von m und für alle angebbaren positiven sowohl als negativen Werthe von b Bestand haben. Durch Addition derselben erhält man auch folgende Integralbestimmung:

$$\int_m^\infty \frac{e^{\frac{b}{2}x}}{e^{bx} - e^{-bx}} \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{1}{2mb} - \frac{1}{\pi}\left\{\tfrac{1}{2}\,\text{Arctang.}\frac{2\pi}{mb} - \tfrac{1}{4}\,\text{Arctang.}\frac{4\pi}{mb} + \tfrac{1}{6}\,\text{Arctang.}\frac{6\pi}{mb} - \ldots\right\}$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\left\{\log.\left[1+\left(\frac{\pi}{mb}\right)^2\right] - \tfrac{1}{3}\log.\left[1+\left(\frac{3\pi}{mb}\right)^2\right] + \tfrac{1}{5}\log.\left[1+\left(\frac{5\pi}{mb}\right)^2\right] - \ldots\right\}, \quad (9)$$

die für dieselben Werthe von a und b, als die beiden vorausgehenden Bestand hat.

Daß die ohne Ende fortlaufenden Reihen in diesen Bestimmungen zu den convergenten gehören, entnimmt man aus der Abwechslung der Zeichen ihrer Glieder, die zuletzt ohne Ende abnehmen (Integralrechnung IV Nr. 191).

420. Die bis jetzt im vorliegenden Paragraphen behandelten besondern Fälle können auch als Folgerungen des nun mitzutheilenden allgemeinen Falles angesehen werden.

Wenn $\varphi(z)$ eine Function von z vorstellt, von der Beschaffenheit, daß das bestimmte Integrale:

$$\int_a^b \varphi(z)\, e^{-xz}\, dz\,,$$

für positive Werthe von x noch Gegenstand einer analytischen Untersuchung sein kann (Nr. 105 und 106 des ersten Theiles), d. h. daß die unbestimmte Integralfunction der Differenzialformel:

$$\varphi(z)\, e^{-xz}\, dz\,,$$

bei der Annahme x sei positiv, für alle Werthe von $z = a$ bis $z = b$ continuirlich verbleibt; dann können wir dieses bestimmte Integrale als Function von x ansehen und solches, nach dem in Nr. 391 begründeten Theoreme, für sämmtliche angebbar positiven Werthe von x durch folgende Gleichheit darstellen:

$$\int_a^b \varphi(z)\, e^{-xz}\, dz = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \left(\int_a^b \varphi(z)\, e^{-x'z}\, dz\right) \mathrm{Cos}.\alpha\,(x - x')\, dx'\, d\alpha\,,$$

oder auch, wenn nämlich a und b von den Integrationsvariabeln unabhängig sind, durch folgende:

$$\int_a^b \varphi(z)\, e^{-xz}\, dz = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_a^b\int_0^\infty \varphi(z)\, e^{-x'z}\, \mathrm{Cos}.\alpha\,(x - x')\, dx'\, dz\, d\alpha\,.$$

Vollzieht man rechts vom Gleichheitszeichen die Integration nach $x'$ innerhalb der angezeigten Grenzen 0 und $\infty$, so geht diese Gleichheit über in:

$$\int_a^b \varphi(z)\, e^{-xz}\, dz = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_a^b \frac{z\,\mathrm{Cos}.\alpha x + \alpha\,\mathrm{Sin}.\alpha x}{\alpha^2 + z^2}\, \varphi(z)\, dz\, d\alpha\,, \qquad (A)$$

welche für alle angebbaren positiven Werthe von x Bestand hat; für negativ angebbare Werthe von x hingegen geht der Ausdruck rech-

terhand in Null über, nämlich, zugleich mit dieser besteht auch folgende Gleichheit:

$$0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_a^b \frac{z\,\mathrm{Cos}.\alpha x - \alpha\,\mathrm{Sin}.\alpha x}{\alpha^2+z^2}\,\varphi(z)\,dz\,d\alpha\,,$$

die, wie die vorhergehende, gleichfalls für alle angebbaren positiven Werthe von x Bestand hat.

Durch Addition und Subtraktion dieser Gleichheiten ergeben sich die zwei folgenden:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{\infty}\int_a^b \frac{z\varphi(z)}{\alpha^2+z^2}\,\mathrm{Cos}.x\alpha\,dz\,d\alpha &= \tfrac{\pi}{2}\int_a^b \varphi(z)\,e^{-xz}\,dz\,,\\ \int_0^{\infty}\int_a^b \frac{\alpha\varphi(z)}{\alpha^2+z^2}\,\mathrm{Sin}.x\alpha\,dz\,d\alpha &= \tfrac{\pi}{2}\int_a^b \varphi(z)\,e^{-xz}\,dz\,,\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

die gleichfalls für alle noch angebbaren positiven Werthe von x Statt haben. Die erste dieser Gleichheiten besteht sogar noch für $x=0$ oder $=\omega$, wo $\omega$ eine unendlich kleinwerdende Größe repräsentirt, wenn man nämlich den Umstand in Betracht zieht, daß, bei der Annahme $x=0$, der Ausdruck zur Rechten in Gleichheit (A) nur die Hälfte des zur Linken derselben Gleichheit darstellt; d. h. es besteht auch folgende Gleichung:

$$\int_0^{\infty}\int_a^b \frac{z\varphi(z)}{\alpha^2+z^2}\,dz\,d\alpha = \tfrac{\pi}{2}\int_a^b \varphi(z)\,dz\,, \quad (\mathrm{II})$$

als Folgerung der ersten der Gleichheiten in (I).

Vertauscht man ferner in den Gleichheiten in (I) $\alpha$ mit x und setzt solche dann, wie folgt:

$$\int_0^{\infty}\left(\int_a^b \frac{z\varphi(z)dz}{x^2+z^2}\right)\mathrm{Cos}.\alpha x\,dx = \tfrac{\pi}{2}\int_a^b \varphi(z)\,e^{-\alpha z}\,dz\,,$$

$$\int_0^{\infty}\left(\int_a^b \frac{x\varphi(z)dz}{x^2+z^2}\right)\mathrm{Sin}.\alpha x\,dx = \tfrac{\pi}{2}\int_a^b \varphi(z)\,e^{-\alpha z}\,dz\,,$$

so hat man, da die inner den Parenthesen zur Linken der Gleich-

heitszeichen enthaltenen bestimmten Integralien, als continuirliche Functionen von x sofort erkannt werden, mit Zuziehung der in den Nrn. 388 und 389 begründeten Sätze auch folgende zwei Gleichheiten:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty \int_a^b \varphi(z)\, e^{-\alpha z}\, \mathrm{Cos.}x\alpha\, dz\, d\alpha &= \int_a^b \frac{z\varphi(z)}{x^2+z^2}\, dz\,, \\ \int_0^\infty \int_a^b \varphi(z)\, e^{-\alpha z}\, \mathrm{Sin.}x\alpha\, dz\, d\alpha &= \int_a^b \frac{x\varphi(z)}{x^2+z^2}\, dz\,, \end{aligned}\right\} \quad \text{(III)}$$

welche für alle positiven Werthe von x zwar abgeleitet, jedoch noch für alle denkbaren reellen Werthe dieser allgemeinen Größe sehr leicht zu verificiren sind.

Aus diesen in (I) und (III) zusammengestellten Ergebnissen können, unter verschiedenen Verfügungen über die Function $\varphi(z)$, sämmtliche Integralbestimmungen und Relationen der vorausgehenden Nrn. gezogen werden. Aus der Gleichung (II) lassen sich noch einige interessante Bestimmungen und Relationen ziehen, die wir in den folgenden Nrn. mittheilen werden.

421. Nimmt man, mit einem einfachen Fall den Anfang zu machen,

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

an, so geht die allgemeine Gleichung (II) vorangehender Nr. in folgende über:

$$\int_0^\infty \int_a^b \frac{z\,dz\,d\alpha}{(\alpha^2+z^2)\sqrt{1-z^2}} = \tfrac{\pi}{2} \int_a^b \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}};$$

wird hier, zur Linken vom Gleichheitszeichen, $z^2$ in z umgesetzt, so hat man auch:

$$\int_0^\infty \int_{a^2}^{b^2} \frac{dz\,d\alpha}{(\alpha^2+z)\sqrt{1-z}} = \pi \int_a^b \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}. \qquad (\alpha)$$

Nach Gleichung (30) Nr. 46 des ersten Theiles hat man:

$$\int \frac{dz}{(\alpha^2+z)\sqrt{1-z}} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \log. \left( \frac{2+\alpha^2-z-2\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1-z}}{\alpha^2+z} \right),$$

oder:

$$\int \frac{dz}{(\alpha^2+z)\sqrt{1-z}} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \log. \left( \frac{\sqrt{1+\alpha^2}-\sqrt{1-z}}{\sqrt{\alpha^2+z}} \right)^2 ,$$

folglich hat man:

$$\int_{a^2}^{b^2} \frac{dz}{(\alpha^2+z)\sqrt{1-z}} = \frac{2}{\sqrt{1+\alpha^2}} \log. \frac{(\sqrt{1+\alpha^2}-\sqrt{1-b^2})\sqrt{\alpha^2+a^2}}{(\sqrt{1+\alpha^2}-\sqrt{1-a^2})\sqrt{\alpha^2+b^2}} ;$$

diese Gleichung ist aber auch mit der folgenden gleichbedeutend:

$$\int_{a^2}^{b^2} \frac{dz}{(\alpha^2+z)\sqrt{1-z}} = \frac{2}{\sqrt{1+\alpha^2}} \log. \frac{(\sqrt{1+\alpha^2}+\sqrt{1-a^2})\sqrt{\alpha^2+b^2}}{(\sqrt{1+\alpha^2}+\sqrt{1-b^2})\sqrt{\alpha^2+a^2}} ,$$

daher zieht man aus der Summe dieser beiden Gleichungen auch folgende:

$$\int_{a^2}^{b^2} \frac{dz}{(\alpha^2+z)\sqrt{1-z}} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \log. \left( \frac{\sqrt{1+\alpha^2}+\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}+\sqrt{1-b^2}} \right) \left( \frac{\sqrt{1+\alpha^2}-\sqrt{1-b^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}-\sqrt{1-a^2}} \right) , \quad (\beta)$$

die wir bei der Ermittelung zweier bestimmten Integralien zu Grunde legen.

Nimmt man, erstens, $a=0$ und $b \leqq 1$ an, so hat man:

$$\int_0^{b^2} \frac{dz}{(\alpha^2+z)\sqrt{1-z}} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \log. \left( \frac{\sqrt{1+\alpha^2}+1}{\sqrt{1+\alpha^2}-1} \right) \left( \frac{\sqrt{1+\alpha^2}-\sqrt{1-b^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}+\sqrt{1-b^2}} \right) ,$$

wodurch die obige Gleichung ($\alpha$), unter derselben Verfügung über a und b, in folgende übergeht:

$$\int_0^{\infty} \log. \left( \frac{\sqrt{1+\alpha^2}+1}{\sqrt{1+\alpha^2}-1} \right) \frac{d\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} + \int_0^{\infty} \log. \left( \frac{\sqrt{1+\alpha^2}-\sqrt{1-b^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}+\sqrt{1-b^2}} \right) \frac{d\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \pi \int_0^b \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} ;$$

wird hier $b=1$ gesetzt, so hat man:

$$\int_0^{\infty} \log. \left( \frac{\sqrt{1+\alpha^2}+1}{\sqrt{1+\alpha^2}-1} \right) \frac{d\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \pi \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} ,$$

daher erhält man aus der vorhergehenden Integralgleichung folgende:

$$\int_0^{\infty} \log.\left(\frac{\sqrt{1+\alpha^2}-\sqrt{1-b^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}+\sqrt{1-b^2}}\right)\frac{d\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} = -\pi\int_b^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

aus der endlich, wenn namentlich die Gleichheit:

$$\text{Arcsin. } b + \text{Arcsin. } \sqrt{1-b^2} = \tfrac{\pi}{2}$$

berücksichtiget wird, die erste der vorhin erwähnten Integralbestimmungen gezogen wird, nämlich:

$$\int_0^{\infty} \log.\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-b^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-b^2}}\right)\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \pi \text{ Arcsin. } \sqrt{1-b^2}\,. \quad (\gamma)$$

Wird in derselben Gleichung $(\beta)$, zweitens, $a = 1$ und $b \geqq 1$ angenommen, so stellt sich solche zunächst, wie folgt, dar:

$$\int_1^{b^2} \frac{dz}{(\alpha^2+z)\sqrt{1-z}} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \log.\frac{\sqrt{1+\alpha^2}-\sqrt{1-b^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}+\sqrt{1+b^2}},$$

und da wir $b \geqq 1$ angenommen haben, geht solche über in:

$$\int_1^{b^2} \frac{dz}{(\alpha^2+z)\sqrt{1-z}} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \log.\frac{\sqrt{1+\alpha^2}-\sqrt{-1}\sqrt{b^2-1}}{\sqrt{1+\alpha^2}+\sqrt{-1}\sqrt{b^2-1}},$$

oder auch in:

$$\int_1^{b^2} \frac{dz}{(\alpha^2+z)\sqrt{1-z}} = -\frac{2\sqrt{-1}}{\sqrt{1+\alpha^2}} \text{ Arctang. } \frac{\sqrt{b^2-1}}{\sqrt{1+\alpha^2}};$$

vermöge dieses Ergebnisses nun geht die obige Gleichung. $(\alpha)$ in folgende:

$$-2\sqrt{-1}\int_0^{\infty} \text{Arctang. } \frac{\sqrt{b^2-1}}{\sqrt{1+\alpha^2}}\frac{d\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \pi\int_1^b \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

oder auch in:

$$\int_0^{\infty} \text{Arctang. } \frac{\sqrt{b^2-1}}{\sqrt{1+\alpha^2}}\frac{d\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \tfrac{\pi}{2}\int_1^b \frac{dz}{\sqrt{-1+z^2}}$$

über; vollzieht man endlich die Integration zur Rechten, so stellt

sich folgende zweite angekündigte Integralbestimmung heraus:

$$\int_0^\infty \text{Arctang.}\,\frac{\sqrt{b^2-1}}{\sqrt{1+x^2}}\,\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \tfrac{\pi}{2}\,\log.(b+\sqrt{-1+b^2})\,. \qquad (\delta)$$

Für $b=1$ bietet diese sowohl, als die Gleichung $(\gamma)$ die identische Gleichung $0=0$ dar.

Aus den Gleichungen $(\gamma)$ und $(\delta)$ zieht man auch folgende Integralbestimmungen:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \log.\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+a}{\sqrt{1+x^2}-a}\right)\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \pi\ \text{Arcsin. a}\,,\\ \int_0^\infty \text{Arctang.}\left(\frac{a}{\sqrt{1+x^2}}\right)\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \tfrac{\pi}{2}\,\log.\,(a+\sqrt{1+a^2})\,;\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

erstere findet für jene reellen Werthe von a Statt, die numerisch die Einheit nicht übertreffen, letztere hingegen für alle nur denkbaren reellen Werthe von a.

Vertauscht man in diesen Bestimmungen x in Tang.x, so erhält man folgende:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log.\left(\frac{1+a\,\text{Cos.x}}{1-a\,\text{Cos.x}}\right)\frac{dx}{\text{Cos.x}} &= \pi\ \text{Arcsin. a}\,,\\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Arctang.}\,(a\,\text{Cos.x})\,\frac{dx}{\text{Cos.x}} &= \tfrac{\pi}{2}\,\log.\,(a+\sqrt{1+a^2})\,,\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

die für dieselben Werthe von a, wie die entsprechenden in (10) identisch bestehen.

Wird ferner in diesen Sin.x durch x ersetzt, so hat man auch:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^1 \log.\left(\frac{1+a\sqrt{1-x^2}}{1-a\sqrt{1-x^2}}\right)\frac{dx}{1-x^2} &= \pi\ \text{Arcsin. a}\,,\\ \int_0^1 \text{Arctang.}\,(a\sqrt{1-x^2})\,\frac{dx}{1-x^2} &= \tfrac{\pi}{2}\,\log.(a+\sqrt{1+a^2})\,,\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

die wie die entsprechenden in (10) oder in (11) bezüglich auf a bestehen.

Wird endlich in diesen x durch Cos.x ersetzt, so ergeben sich auch folgende Integralbestimmungen:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log.\left(\frac{1+a\,\mathrm{Sin.x}}{1-a\,\mathrm{Sin.x}}\right)\frac{dx}{\mathrm{Sin.x}} &= \pi\,\mathrm{Arcsin.a}\,, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Arctang.}\,(a\,\mathrm{Sin.x})\,\frac{dx}{\mathrm{Sin.x}} &= \pi\log.(a+\sqrt{1+a^2})\,, \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

von denen ein Gleiches in Bezug auf a, was von den analogen vorausgehenden gilt.

422. Auch mancher beachtenswerthe Zusammenhang unter bestimmten Integralien wird aus der allgemeinen Gleichung (II) in Nr. 420 erzielt, wie wir solches in vorliegender und in den darauf folgenden Schlußnummern dieses Paragraphen zeigen werden.

Umformen wir zuerst besagte Gleichung (II), indem wir die in derselben vorkommende Function $\varphi(z)$, als Function von $z^2$ erklären, nämlich, setzen wir:

$$\varphi(z) = \psi(z^2)\,,$$

so nimmt solche zunächst folgende Form an:

$$\int_0^{\infty}\int_a^b \frac{z\psi(z^2)}{\alpha^2+z^2}\,dz\,d\alpha = \tfrac{\pi}{2}\int_a^b \psi(z^2)\,dz\,;$$

wird hier im Doppelintegralausdrucke linkerhand $z^2$ durch z ersetzt, so erhält man die allgemeine Gleichung:

$$\int_0^{\infty}\int_{b\,a^2}^{b^2} \frac{\psi(z)}{\alpha^2+z}\,dz\,d\alpha = \pi\int_a^b \psi(z^2)\,dz\,, \qquad (II')$$

die wir, statt der Gleichung (II), bei den folgenden Untersuchungen zu Grunde legen.

Wird in dieser allgemeinen Gleichung die Function $\psi(z)$ folgendermaßen angenommen:

$$\psi(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z}\sqrt{1-c^2z}}\,,$$

so hat man:

$$\int_0^{\infty}\int_{a^2}^{b^2} \frac{dz\,d\alpha}{(\alpha^2+z)\sqrt{1-z}\sqrt{1-c^2z}} = \pi\int_a^b \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}}. \quad (\alpha')$$

Nach Gleichung (30) Nr. 46 des ersten Theiles ist:

$$\int \frac{dz}{(\alpha^2+z)\sqrt{1-z}\sqrt{1-c^2z}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1+c^2\alpha^2}} \log.\left(\frac{\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1-c^2z} - \sqrt{1+c^2\alpha^2}\sqrt{1-z}}{\sqrt{\alpha^2+z}}\right),$$

aus welcher folgende gezogen wird:

$$\int_{a^2}^{b^2} \frac{dz}{(\alpha^2+z)\sqrt{1-z}\sqrt{1-c^2z}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1+c^2\alpha^2}} \log.\frac{(\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1-c^2b^2} - \sqrt{1+c^2\alpha^2}\sqrt{1-b^2})\sqrt{\alpha^2+a^2}}{(\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1-c^2a^2} - \sqrt{1+c^2\alpha^2}\sqrt{1-a^2})\sqrt{\alpha^2+b^2}},$$

und da diese auch mit folgender gleichbedeutend ist:

$$\int_{a^2}^{b^2} \frac{dz}{(\alpha^2+z)\sqrt{1-z}\sqrt{1-c^2z}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1+c^2\alpha^2}} \log.\frac{(\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1-c^2a^2} + \sqrt{1+c^2\alpha^2}\sqrt{1-a^2})\sqrt{\alpha^2+b^2}}{(\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1-c^2b^2} + \sqrt{1+c^2\alpha^2}\sqrt{1-b^2})\sqrt{\alpha^2+a^2}};$$

so erhält man nach vollzogener Addition derselben folgende:

$$\int_{a^2}^{b^2} \frac{dz}{(\alpha^2+z)\sqrt{1-z}\sqrt{1-c^2z}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1+c^2\alpha^2}} \left\{ \begin{array}{l} \log.\left(\dfrac{\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1-c^2b^2} - \sqrt{1+c^2\alpha^2}\sqrt{1-b^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1-c^2b^2} + \sqrt{1+c^2\alpha^2}\sqrt{1-b^2}}\right) \\ + \log.\left(\dfrac{\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1-c^2a^2} + \sqrt{1+c^2\alpha^2}\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1-c^2a^2} - \sqrt{1+c^2\alpha^2}\sqrt{1-a^2}}\right) \end{array} \right\}. \quad (\beta')$$

Diese Gleichung wollen wir nun unter zwei Verfügungen über a und b mit der obigen ($\alpha'$) combiniren, wodurch auch zwei Relationen unter bestimmten Integralien sich ergeben werden.

Wird zuerst:

$$b = 1 \text{ und } 0 \leqq a \leqq 1$$

vorausgesetzt, so bietet eine Verbindung dieser Gleichungen ($\alpha'$) und ($\beta'$), wenn dann $\alpha$ sowohl als z durch x ersetzt werden, folgende Gleichung dar:

$$\int_0^{\infty} \log.\left(\frac{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1-c^2a^2}+\sqrt{1+c^2x^2}\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1-c^2a^2}-\sqrt{1+c^2x^2}\sqrt{1-a^2}}\right)\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+c^2x^2}}=\pi\int_a^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}, \quad (\gamma')$$

wo wir, zur Vermeidung imaginärer Formen, die bis jetzt unbestimmt gelassene Zahlengröße c numerisch kleiner als die Einheit voraussetzen.

Wird zweitens in der Gleichung ($\beta'$) folgende Annahme getroffen:

$$a = 1\,,\quad b \geqq 1 \text{ und } bc \leqq 1\,,$$

so hat man:

$$\int_1^{b^2}\frac{dz}{(\alpha^2+z)\sqrt{1-z}\sqrt{1-c^2z}}=\frac{-2\sqrt{-1}}{\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1+c^2\alpha^2}}\text{Arctang.}\left(\sqrt{\frac{b^2-1}{1-c^2b^2}}\sqrt{\frac{1+c^2\alpha^2}{1+\alpha^2}}\right);$$

dieses Ergebniß in ($\alpha'$) gesetzt, erhält man, wenn auch gegenwärtig $\alpha$ und z durch x ersetzt werden, folgende zweite der angekündigten Relationsgleichungen:

$$-2\sqrt{-1}\int_0^{\infty}\text{Arctang.}\left(\sqrt{\frac{b^2-1}{1-c^2b^2}}\sqrt{\frac{1+c^2x^2}{1+x^2}}\right)\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+c^2x^2}}=\pi\int_1^b\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}},$$

die mit der folgenden gleichbedeutend ist:

$$\int_0^{\infty}\text{Arctang.}\left(\sqrt{\frac{b^2-1}{1-c^2b^2}}\sqrt{\frac{1+c^2x^2}{1+x^2}}\right)\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+c^2x^2}}=\frac{\pi}{2}\int_1^b\frac{dx}{\sqrt{-1+x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}, \quad (\delta')$$

in welcher, gleichwie in ($\gamma'$), die Zahlengröße c numerisch kleiner als die Einheit vorausgesetzt verbleibt.

Aus diesen beiden Relationen in ($\gamma'$) und ($\delta'$) ist noch manche interessante Folgerung zu ziehen, wie aus dem Folgenden wird entnommen werden.

I. Die Gleichung ($\gamma'$) kann zunächst auch folgendermaßen gestellt werden:

$$\int_0^{\infty}\log.\left\{\frac{1+\sqrt{\frac{1-a^2}{1-a^2c^2}}\sqrt{\frac{1+c^2x^2}{1+x^2}}}{1-\sqrt{\frac{1-a^2}{1-a^2c^2}}\sqrt{\frac{1+c^2x^2}{1+x^2}}}\right\}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+c^2x^2}}=\pi\int_a^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}},$$

oder, wenn

$$\sqrt{\frac{1-a^2}{1-a^2c^2}} \text{ mit } a$$

vertauscht wird, wie folgt:

$$\int_0^\infty \log.\left\{\frac{1+a\sqrt{\frac{1+c^2x^2}{1+x^2}}}{1-a\sqrt{\frac{1+c^2x^2}{1+x^2}}}\right\}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+c^2x^2}} = \pi\int_0^{\sqrt{\frac{1-a^2}{1-a^2c^2}}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}};$$

wird in dem bestimmten Integrale zur Linken

$$x \text{ durch } \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

in dem zur Rechten aber

$$x \text{ durch } \sqrt{\frac{1-x^2}{1-c^2x^2}}$$

ersetzt, so geht diese Gleichung in folgende über:

$$\int_0^1 \log.\left(\frac{1+a\sqrt{1-(1-c^2)x^2}}{1-a\sqrt{1-(1-c^2)x^2}}\right)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(1-c^2)x^2}} = \pi\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}};$$

wird hier endlich c in $\sqrt{1-c^2}$ umgesetzt: so stellt sich folgender Zusammenhang dar:

$$\int_0^1 \log.\left(\frac{1+a\sqrt{1-c^2x^2}}{1-a\sqrt{1-c^2x^2}}\right)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}} = \pi\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(1-c^2)x^2}}, \quad (14)$$

welcher für alle reellen Zahlenwerthe von a, die numerisch die Einheit nicht übertreffen und, wie man sich sehr bald überzeugt, auch für dieselben Werthe von c Bestand hat.

Wird ferner im bestimmten Integrale zur Linken dieser Gleichung (14)

$$x \text{ durch } \sqrt{\frac{1-x^2}{1-c^2x^2}}$$

ersetzt, wo also nothwendig c verschieden von 1 sein muß, so geht solche über in:

$$\int_0^1 \log.\left(\frac{\sqrt{1-c^2x^2}+a\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{1-c^2x^2}-a\sqrt{1-c^2}}\right)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}} = \pi\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(1-c^2)x^2}};$$

wird hier:

$a\sqrt{1-c^2}$ durch a', also a durch $\frac{a}{\sqrt{1-c^2}}$

ersetzt: dann stellt sich auch folgender Zusammenhang begründet heraus:

$$\int_0^1 \log.\left(\frac{\sqrt{1-c^2x^2}+a}{\sqrt{1-c^2x^2}-a}\right)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}} = \pi\int_0^{\frac{a}{\sqrt{1-c^2}}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(1-c^2)x^2}}\,, \quad (15)$$

in dem wir vermöge der eben getroffenen Umformung mit a, wie auch zur Vermeidung imaginärer Formen, $a < \sqrt{1-c^2}$ feststellen, wobei c der Ungleichheit $c^2 < 1$ nothwendig entsprechen muß.

II. Analoge zu diesen in (14) und (15) aufgestellten Relationen lassen sich auch aus der in ($\delta'$) ziehen.

Wird vorerst zur Rechten vom Gleichheitszeichen in ($\delta'$)

$$x \text{ durch } \frac{1}{\sqrt{1-(1-c^2)x^2}}$$

ersetzt, so hat man:

$$\int_0^\infty \text{Arctang.}\left(\frac{1}{b}\sqrt{\frac{b^2-1}{1-c^2}}\sqrt{\frac{1+c^2x^2}{1+x^2}}\right)\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+c^2x^2}} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(1-c^2)x^2}};$$

setzt man hier

$$\frac{b^2-1}{1-c^2b^2} = a^2\,,$$

so ist a, beachtend das getroffene Uebereinkommen über die Beschaffenheit von b und c, jedes reellen Zahlenwerthes von $-\infty$ bis $+\infty$ fähig, und die zuletzt aufgestellte Relation geht in folgende über:

$$\int_0^\infty \text{Arctang.}\left(a\sqrt{\frac{1+c^2x^2}{1+x^2}}\right)\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+c^2x^2}} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(1-c^2)x^2}}\,,$$

in welcher sonach a jedes reellen Zahlenwerthes und, wie man sich sehr bald überzeugt, die Größe c aller Zahlenwerthe, die nicht numerisch die Einheit übertreffen, fähig ist.

Wird ferner zur Linken vom Gleichheitszeichen dieser Gleichheit

$$x \text{ in } \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

umgesetzt, und hierauf dann überall

$$c \text{ in } \sqrt{1-c^2};$$

so stellt sich folgende heraus:

$$\int_0^1 \text{Arctang.}(a\sqrt{1-c^2x^2})\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}, \quad (16)$$

die eine analoge zu (14) in I ist und für dieselben Werthe von a und c als die vorhergehende, d. h. für alle reellen Werthe von a und für die reellen Werthe von c, die der Bedingung $c^2 \leqq 1$ entsprechen, Bestand hat.

In ähnlicher Weise, wie aus der Gleichheit (14) die in (15) abgeleitet wurde, zieht man auch aus dieser (16) eine Gleichheit, welche mit dieser verbunden, auf einen interessanten Zusammenhang unter bestimmten Integralien der Differenzialfunction:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}$$

führen. Umsetzt man nämlich zur Linken vom Gleichheitszeichen in (16)

$$x \text{ in } \sqrt{\frac{1-x^2}{1-c^2x^2}},$$

so stellt sich unmittelbar folgender Zusammenhang dar:

$$\int_0^1 \text{Arctang.}\left(\frac{a\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{1-c^2x^2}}\right)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}};$$

wird noch hier

$$a \text{ in } \frac{1}{a\sqrt{1-c^2}}$$

umgesetzt, so stellt sich folgende zu (15) analoge Relation dar:

$$\int_0^1 \text{Arctang.}\left(\frac{1}{a\sqrt{1-c^2x^2}}\right)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}} = \pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a^2(1-c^2)}}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}, \quad (17)$$

in der a gleichwie in (15) jedes reellen Zahlenwerthes fähig, c hingegen nunmehr der Bedingung $c^2 < 1$ nachkommen muß; denn für $c^2 = 1$ hört das bestimmte Integrale zur Rechten auf, Gegenstand mathematischer Betrachtung zu sein.

Durch Addition dieser in (16) und (17) aufgestellten Ergebnisse erhält man, nach Weglassung des gemeinschaftlichen Faktors $\frac{\pi}{2}$, den oben angekündigten interessanten Zusammenhang, den folgende Gleichung darstellt:

$$\int_0^{\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}} + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a^2(1-c^2)}}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}} = \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}},$$

d. h. man hat:

$$\int_0^{\alpha}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}} + \int_0^{\beta}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}} = \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}, \quad (18)$$

wo die positiven Größen $\alpha$ und $\beta$, von denen jede kleiner oder höchstens gleich der Einheit ist, durch folgende Gleichung:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 + c^2\alpha^2\beta^2, \quad (19)$$

verbunden sind, und wo nothwendig $c^2 < 1$ angenommen werden muß.

423. Wird ferner in der allgemeinen Gleichung (II′) vorangehender Nr. folgende Annahme über die Function $\psi(z)$ getroffen:

$$\psi(z) = \frac{1}{1-c^2z}\sqrt{\frac{1-z}{1-c^2z}},$$

wo wir zur Vermeidung imaginärer Formen, vor der Hand, $c^2 < 1$ voraussetzen; so stellt sich folgende Gleichung heraus:

$$\int_0^{\infty}\int_{a^2}^{b^2}\frac{1}{(\alpha^2+z)(1-c^2z)}\sqrt{\frac{1-z}{1-c^2z}}\,dz\,d\alpha = \pi\int_a^b\frac{1}{1-c^2z^2}\sqrt{\frac{1-z^2}{1-c^2z^2}}dz. \quad (\alpha'')$$

Um zur Linken vom Gleichheitszeichen die Integration nach z zu vollziehen, berücksichtige man die Gleichheit:

$$\int \frac{1}{(\alpha^2+z)(1-c^2z}\sqrt{\frac{1-z}{1-c^2z}}\,dz = \int \frac{1-z}{(\alpha^2+z)(1-c^2z)}\,\frac{dz}{\sqrt{1-z}\sqrt{1-c^2z}},$$

die mit folgender gleichbedeutend ist:

$$\int \frac{1}{(\alpha^2+z)(1-c^2z)}\sqrt{\frac{1-z}{1-c^2z}}\,dz = -\frac{1-c^2}{1+c^2\alpha^2}\int \frac{dz}{(1-c^2z)\sqrt{1-z}\sqrt{1-c^2z}}$$

$$+\frac{1+\alpha^2}{1+c^2\alpha^2}\int \frac{dz}{(\alpha^2+z)\sqrt{1-z}\sqrt{1-c^2z}};$$

nun hat man:

$$\int \frac{dz}{(1-c^2z)\sqrt{1-z}\sqrt{1-c^2z}} = -\frac{2}{1-c^2}\sqrt{\frac{1-z}{1-c^2z}},$$

daher stellt sich mit Zuziehung der Gleichung ($\beta'$) vorangehender Nr. folgende Integralbestimmung dar:

$$\int_{a^2}^{b^2} \frac{1}{(\alpha^2+z)(1-c^2z)}\sqrt{\frac{1-z}{1-c^2z}}\,dz =$$

$$= \frac{2}{1+c^2\alpha^2}\left\{\sqrt{\frac{1-b^2}{1-c^2b^2}} - \sqrt{\frac{1-a^2}{1-c^2a^2}}\right\}$$

$$+\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{(1+c^2\alpha^2)\sqrt{1+c^2\alpha^2}}\left\{\begin{array}{l}\log.\left(\dfrac{\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1-c^2b^2}-\sqrt{1+c^2\alpha^2}\sqrt{1-b^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1-c^2b^2}+\sqrt{1+c^2\alpha^2}\sqrt{1-b^2}}\right)\\ +\log.\left(\dfrac{\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1-c^2a^2}+\sqrt{1+c^2\alpha^2}\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1-c^2a^2}-\sqrt{1+c^2\alpha^2}\sqrt{1-a^2}}\right)\end{array}\right\}; \quad (\beta'')$$

Behandeln wir dieses Ergebniß unter denselben zwei Annahmen über a und b, wie das in Gleichung ($\beta'$) vorangehender Nr. dargestellte analoge, verbinden dann die sich ergebenden Resultate mit der oben aufgestellten Gleichung in ($\alpha''$); so stellen sich die folgenden zu ($\gamma'$) und ($\delta'$) der vorangehenden Nr. analogen Relationen dar:

$$\int_0^\infty \log.\left(\frac{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1-c^2a^2}+\sqrt{1+c^2x^2}\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1-c^2a^2}-\sqrt{1+c^2x^2}\sqrt{1-a^2}}\right)\sqrt{\frac{1+x^2}{1+c^2x^2}}\cdot\frac{dx}{1+c^2x^2} =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{c}\sqrt{\frac{1-a^2}{1-c^2a^2}} + \int_a^1 \sqrt{\frac{1-x^2}{1-c^2x^2}}\cdot\frac{dx}{1-c^2x^2}\right), \quad (\gamma'')$$

$$\int_0^{\infty} \text{Arctang.}\left(\sqrt{\frac{b^2-1}{1-c^2b^2}}\sqrt{\frac{1+c^2x^2}{1+x^2}}\right)\sqrt{\frac{1+x^2}{1+c^2x^2}}\cdot\frac{dx}{1+c^2x^2} =$$

$$= \tfrac{\pi}{2}\left(\frac{1}{c}\sqrt{\frac{b^2-1}{1-c^2b^2}} - \int_1^b \sqrt{\frac{-1+x^2}{1-c^2x^2}}\cdot\frac{dx}{1-c^2x^2}\right), \quad (\delta'')$$

in welchen die Größen a, b, c derselben Werthe fähig, als solche in den analogen zu denselben, in $(\gamma')$ und $(\delta')$ der vorhergehenden Nr., festgestellt worden sind, und die wir auch ähnlichen Umformungen wie diese unterziehen werden.

I. Wird nämlich in $(\gamma'')$

$$\sqrt{\frac{1-a^2}{1-a^2c^2}} \text{ durch } a$$

ersetzt, dann im bestimmten Integrale zur Linken

$$x \text{ in } \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

und in dem zur Rechten vom Gleichheitszeichen

$$x \text{ in } \sqrt{\frac{1-x^2}{1-c^2x^2}}$$

umgesetzt, dann geht solche in folgende über:

$$\int_0^1 \log.\left(\frac{1+a\sqrt{1-(1-c^2)x^2}}{1-a\sqrt{1-(1-c^2)x^2}}\right)\frac{dx}{[1-(1-c^2)x^2]\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(1-c^2)x^2}} =$$

$$= \pi\left(\frac{a}{c} + \int_0^a \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}\right);$$

wird hier noch c in $\sqrt{1-c^2}$ umgesetzt, so geht folgende analoge Relation zu (14) der vorangehenden Nr. hervor:

$$\int_0^1 \log.\left(\frac{1+a\sqrt{1-c^2x^2}}{1-a\sqrt{1-c^2x^2}}\right)\frac{dx}{(1-c^2x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}} =$$

$$= \pi\left(\frac{a}{\sqrt{1-c^2}} + \int_0^a \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(1-c^2)x^2}}\right), \quad (20)$$

die für alle reellen Zahlenwerthe von a, die numerisch die Einheit nicht übertreffen und für alle reellen Zahlenwerthe von c, die numerisch kleiner als die Einheit sind, Bestand hat.

Verfährt man mit dieser Relation (20) ganz in gleicher Weise, wie in der vorangehenden Nr. mit der in (14), so gewinnt man folgende analoge zu (15) derselben Nr.:

$$\int_0^1 \log.\left(\frac{\sqrt{1-c^2x^2}+a}{\sqrt{1-c^2x^2}-a}\right)\sqrt{\frac{1-c^2x^2}{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \pi\left(a+(1-c^2)\int_0^{\frac{a}{\sqrt{1-c^2}}}\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(1-c^2)x^2}}\right), \quad (21)$$

in der man:

$$a < \sqrt{1-c^2} \quad \text{und} \quad c^2 < 1$$

hat.

II. Wird mit der in ($\delta''$) aufgestellten Relation ganz in derselben Weise verfahren, wie mit der in ($\delta'$) vorangehender Nr., so stellt sich die analoge zu (16) derselben Nr. folgendermaßen dar:

$$\int_0^1 \text{Arctang.}(a\sqrt{1-c^2x^2})\,\frac{dx}{(1-c^2x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}} =$$

$$= \tfrac{\pi}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{1-c^2}} - \int_0^{\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}}\frac{x^2dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}\right), \quad (22)$$

welche für alle reellen Werthe von a und für die reellen Werthe von c Bestand hat, die numerisch kleiner als die Einheit sind.

Wenn hier endlich

$$x \text{ durch } \frac{1-x^2}{1-c^2x^2}$$

und hierauf dann $a\sqrt{1-c^2}$ durch a ersetzt wird, so geht folgende Relation hervor:

$$\int_0^1 \text{Arctang.}\left(\frac{a}{\sqrt{1-c^2x^2}}\right)\sqrt{\frac{1-c^2x^2}{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \tfrac{\pi}{2}\left(a-(1-c^2)\int_0^{\frac{a}{\sqrt{a^2+1-c^2}}} \frac{x^2dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}\right), \quad (23)$$

die für alle reellen Werthe von a und alle dergleichen Werthe von c, die aber numerisch die Einheit nicht übertreffen, Bestand hat.

Berücksichtiget man noch die Gleichheit:

$$\text{Arctang.}u + \text{Arctang.}\frac{1}{u} = \frac{\pi}{2},$$

so zieht man aus den eben aufgestellten Relationen (22) und (23) auch die zwei folgenden:

$$\int_0^1 \text{Arctang.}\left(\frac{1}{a\sqrt{1-c^2x^2}}\right)\frac{dx}{(1-c^2x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}} =$$

$$= \tfrac{\pi}{2}\left\{-\frac{a}{\sqrt{1-c^2}} + \int_0^{\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}} \frac{dx}{(1-c^2x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}} + \int_0^{\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}} \frac{x^2dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}\right\}, \quad (24)$$

$$\int_0^1 \text{Arctang.}\left(\frac{\sqrt{1-c^2x^2}}{a}\right)\sqrt{\frac{1-c^2x^2}{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \tfrac{\pi}{2}\left\{-a + \int_0^1 \sqrt{\frac{1-c^2x^2}{1-x^2}}\,dx + (1-c^2)\int_0^{\frac{a}{\sqrt{a^2+1-c^2}}} \frac{x^2dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}\right\}, \quad (25)$$

die für dieselben Werthe von a und c, als die respectiven denselben zu Grunde liegenden, (22) und (23), bestehen.

424. Durch Verbindung der Ergebnisse beider vorausgehenden Nrn. gelangt man auf eine kleine Anzahl von Relationsgleichungen, die diese Ergebnisse sowohl, wie auch noch viele andere, als specielle Fälle darbieten.

Um jedoch die Endergebnisse in den möglichst einfachen Formen jedesmal dargestellt zu erhalten, lassen wir noch einige Reductionsgleichungen vorausgehen.

Da man durch einfache Differenziation folgende Gleichheit hat:

$$\mathrm{d}\,.\,\frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-c^2x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-c^2x^2}}\,\mathrm{d}x - (1-c^2)\,\frac{x^2\mathrm{d}x}{(1-c^2x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}\,,$$

die mit folgender:

$$\mathrm{d}\,.\,\frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-c^2x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-c^2x^2}}\,\mathrm{d}x + \frac{1-c^2}{c^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}$$

$$- \frac{1-c^2}{c^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{(1-c^2x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}\,,$$

oder endlich mit folgender:

$$\mathrm{d}\,.\,\frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-c^2x^2}} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\sqrt{1-c^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x - \frac{1-c^2}{c^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{(1-c^2x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}$$

gleichbedeutend ist; so zieht man, durch Integration dieser, folgende erste Reductionsgleichung:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-c^2x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}} = \frac{1}{1-c^2}\int \frac{\sqrt{1-c^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x - \frac{c^2}{1-c^2}\,\frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-c^2x^2}}\,. \quad (\alpha)$$

Wird ferner folgender Ausdruck:

$$\frac{x\sqrt{1-c^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

differenzirt, und verfährt man wie in dem so eben behandelten Falle; so gelangt man auf folgende zwei Reductionsgleichungen:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}} - \frac{1}{1-c^2}\int \frac{\sqrt{1-c^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{1-c^2}\,\frac{x\sqrt{1-c^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\beta)$$

$$\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}} = -\frac{1}{1-c^2}\int \frac{\sqrt{1-c^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{1-c^2}\,\frac{x\sqrt{1-c^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,. \quad (\gamma)$$

Diese drei Reductionsgleichungen werden uns wesentliche Dienste bei der Vereinfachung der combinirten Ergebnisse beider vorausgehenden Nrn. leisten, zu deren Mittheilung wir sofort übergehen.

Multiplicirt man die Gleichung in (14) mit A und die in (20) mit B, nimmt hierauf deren Summe, dividirt dann die Ergebnißgleichung durch A + B und ersetzt endlich

$\frac{Ac^2}{A+B}$ durch A, folglich $\frac{Bc^2}{A+B}$ durch $c^2-A$;

so geht folgende Relation hervor:

$$\int_0^1 \log.\left(\frac{1+a\sqrt{1-c^2x^2}}{1-a\sqrt{1-c^2x^2}}\right)\frac{1-Ax^2}{(1-c^2x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{c^2}\left\{\frac{a(c^2-A)}{\sqrt{1-c^2}} + \int_0^a \frac{A+(c^2-A)x^2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(1-c^2)x^2}}\,dx\right\}, \quad (26)$$

welche, je nachdem man $A=c^2$ oder $A=0$ annimmt, die Relation (14) oder die (20) ersetzt, und überdieß noch für jede andere Verfügung über A Bestand hat. Die Größen a und c sind hier gleichwie in den eben citirten Gleichungen aller reellen Zahlenwerthe fähig, die numerisch die Einheit nicht übertreffen.

Werden, zweitens, ganz in derselben Weise die Relationen in (15) und (21) verbunden, und ersetzt man hierauf

$$\frac{Bc^2}{A+B} \text{ durch } A, \text{ folglich } \frac{Ac^2}{A+B} \text{ durch } c^2-A;$$

so geht folgende Relation hervor:

$$\int_0^1 \log.\left(\frac{\sqrt{1-c^2x^2}+a}{\sqrt{1-c^2x^2}-a}\right)\frac{1-Ax^2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{c^2}\left\{aA + \int_0^{\frac{a}{\sqrt{1-c^2}}} \frac{c^2-A+A(1-c^2)x^2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(1-c^2)x^2}}\,dx\right\}, \quad (27)$$

welche, je nachdem man $A=0$ oder $A=c^2$ annimmt, die Relationen in (15) und (21) ersetzt, und außerdem auch noch für jeden andern Werth von A als Gleichheit Bestand hat, wenn man nur $c^2 < 1$ und $a^2 < 1-c^2$ annimmt.

Verbindet man, drittens, die Relationen in (16) und (22) in derselben Weise, ersetzt hierauf

$$\frac{Ac^2}{A+B} \text{ durch } A, \text{ folglich } \frac{Bc^2}{A+B} \text{ durch } c^2-A,$$

so erhält man unmittelbar folgende Relation:

$$\int_0^1 \text{Arctang.}(a\sqrt{1-c^2x^2})\,\frac{1-Ax^2}{(1-c^2x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2c^2}\left\{\frac{a(c^2-A)}{\sqrt{1-c^2}} + \int_0^{\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}} \frac{A-c^2x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}\,dx\right\},$$

die für $A=c^2$ und für $A=0$ respective die Relationen in (16) und (22) ersetzt und auch für jeden sonstigen Werth von A besteht, wobei a reell und $c^2<1$ verbleibt; wird nun das bestimmte Integrale zur Rechten mit Hülfe der oben aufgestellten Reductionsgleichungen ($\beta$) und ($\gamma$) umgeformt, so stellt sich folgende Reductionsgleichung heraus:

$$\int_0^1 \text{Arctang.}(a\sqrt{1-c^2x^2})\,\frac{1-Ax^2}{(1-c^2x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2c^2}\left\{\frac{a(c^2-A)}{\sqrt{1-c^2}}\left(1-\frac{\sqrt{1+(1-c^2)a^2}}{\sqrt{1-c^2}\sqrt{1+a^2}}\right) + A\int_0^{\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}} + \frac{c^2-A}{1-c^2}\int_0^{\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}} \frac{\sqrt{1-c^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx\right\}, \quad (28)$$

die für alle Werthe von A, für alle reellen Werthe von a und für jene reellen Werthe von c besteht, für die man $c^2<1$ hat.

Wird, viertens, in der Relation (17) a in $\frac{1}{a}$ umgesetzt, verbindet dieselbe hierauf, wie in den drei vorausgeschickten Fällen, mit der Relation in (23), umsetzt dann

$$\frac{Bc^2}{A+B} \text{ in } A \text{ und folglich } \frac{Ac^2}{A+B} \text{ in } c^2-A,$$

so erhält man:

$$\int_0^1 \text{Arctang.}\left(\frac{a}{\sqrt{1-c^2x^2}}\right)\,\frac{1-Ax^2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2c^2}\left\{aA + \int_0^{\frac{a}{\sqrt{a^2+1-c^2}}} \frac{c^2-A-(1-A)c^2x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}\,dx\right\},$$

die für alle Werthe von A Bestand hat und überdieß für $A=0$ und $A=c^2$ respective die Relationen in (17) und (23) ersetzt; umformt man nun das bestimmte Integrale rechterhand mittelst der Reductionsgleichungen in ($\beta$) und ($\gamma$), so hat man auch folgende:

$$\int_0^1 \text{Arctang.}\left(\frac{a}{\sqrt{1-c^2x^2}}\right)\frac{1-Ax^2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}\,dx =$$

$$=\frac{\pi}{2c^2}\Bigg\}aA\left(1-\frac{\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1-c^2}}\right)+(c^2-A)\int_0^{\frac{a}{\sqrt{a^2+1-c^2}}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}+A\int_0^{\frac{a}{\sqrt{a^2+1-c^2}}}\frac{\sqrt{1-c^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx\Bigg\}, \quad (29)$$

welche Relation für alle Werthe von A, für alle reellen Werthe von a und für jene reellen Werthe von c Bestand hat, die der Ungleichheit $c^2<1$ nachkommen.

Combinirt man aber, fünftens, die unveränderte Relation in (17) mit der in (24), ersetzt hierauf

$$\frac{Ac^2}{A+B} \text{ durch } A, \text{ folglich } \frac{Bc^2}{A+B} \text{ durch } c^2-A,$$

so ergiebt sich unmittelbar folgendes Resultat:

$$\int_0^1 \text{Arctang.}\left(\frac{1}{a\sqrt{1-c^2x^2}}\right)\frac{1-Ax^2}{(1-c^2x^2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}\,dx =$$

$$=\frac{\pi(c^2-A)}{2c^2}\Bigg\{-\frac{a}{\sqrt{1-c^2}}+\frac{A}{c^2-A}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a^2+1-c^2}}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}$$

$$+\int_0^{\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}}\frac{x^2dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}+\int_0^1\frac{dx}{(1-c^2x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}\Bigg\},$$

das für die Annahmen $A=c^2$ und $A=0$ die combinirten Relationen selbst ersetzt; wird aber dasselbe mittelst der Reductionsgleichungen ($\alpha$) und ($\gamma$) umgeformt, so hat man auch:

$$\int_0^1 \text{Arctang.}\left(\frac{1}{a\sqrt{1-c^2x^2}}\right)\frac{1-Ax^2}{(1-c^2x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}\,dx =$$

$$=\frac{\pi(c^2-A)}{2c^2}\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{a}{\sqrt{1-c^2}}\left(1-\dfrac{\sqrt{1+(1-c^2)a^2}}{\sqrt{1-c^2}\sqrt{1+a^2}}\right)\\ +\dfrac{A}{c^2-A}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a^2+1-c^2}}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}+\frac{1}{1-c^2}\int_{\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}}^1\frac{\sqrt{1-c^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx\end{array}\right\},\quad (30)$$

die für alle Werthe von A, für alle reellen Werthe von a und für die rellen Werthe von c besteht, die numerisch kleiner als die Einheit sind.

Verbindet man endlich die Relation in (16), nachdem man in derselben a in $\frac{1}{a}$ vertauscht hat, mit der in (25), ersetzt hierauf

$$\frac{Bc^2}{A+B} \text{ durch } A, \text{ folglich } \frac{Ac^2}{A+B} \text{ durch } c^2-A,$$

so hat man:

$$\int_0^1 \text{Arctang.}\left(\frac{\sqrt{1-c^2x^2}}{a}\right)\frac{1-Ax^2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}\,dx =$$

$$=\frac{\pi}{2c^2}\left\{\begin{array}{l}-aA+(c^2-A)\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}\\ +A(1-c^2)\displaystyle\int_0^{\frac{a}{\sqrt{a^2+1-c^2}}}\frac{x^2dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}+A\int_0^1\frac{\sqrt{1-c^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx\end{array}\right\};$$

umformt man auch diese mittelst der Reductionsgleichung in (γ), so hat man:

$$\int_0^1 \text{Arctang.}\left(\frac{\sqrt{1-c^2x^2}}{a}\right)\frac{1-Ax^2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2c^2} \Big\} - aA\left(1 - \frac{\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1-c^2}}\right) + (c^2-A)\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}} + A\int_{\frac{a}{\sqrt{a^2+1-c^2}}}^{1} \frac{\sqrt{1-c^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx \Big\}, \quad (31)$$

welche Relation für jeden Werth von A, für alle reellen Werthe von a und für die reellen Werthe von c Statt hat, die numerisch die Einheit nicht übertreffen.

Diese Relationsgleichungen leisten bei der Bestimmung von zwei- und mehrfachen Integralien zweier und mehrerer Variabeln wesentliche Dienste, wie wir solches im folgenden Paragraphen, in Nr. 431, eigens zeigen werden.

---

## §. IV.

## Ueber zwei- und mehrfache Integralien mit variabeln Integrationsgrenzen.

**425.** Im zweiten Paragraphen der Integralrechnung **VI**, namentlich in den Nrn. **312—335**, allwo wir ganz ausschließlich zwei- und dreifache Integralien zweier und dreier Variabeln behandelt haben, setzten wir die Integrationsgrenzen unabhängig von den Integrationsvariabeln oder als constante Größen voraus; zur Vervollständigung dieses Theiles der Integralrechnung erübriget uns sonach, jene Fälle gleichfalls noch in Betracht zu ziehen, in denen diese Integrationsgrenzen als Functionen der Integrationsvariabeln und sonach als Variable auftreten. Die Vorführung solcher Fälle nun, und die Reduction derselben auf jene der zuerst erwähnten Art wird den Inhalt des vorliegenden Schlußparagraphen der ersten Abtheilung der Integralrechnung mit mehreren Variabeln ausmachen, wo wir, wie solches bis jetzt beständig geschah, mit den einfachsten Fällen beginnen, und nach und nach zusammengesetztere Fälle in den Kreis unserer Betrachtungen ziehen werden.

426. Der einfachste Fall eines Doppelintegrals zweier Variabeln mit variabeln Grenzen ist folgender.

Wenn X und X′ beliebige Functionen von x vorstellen, soll das Doppelintegrale:

$$\int\int \varphi(x,y)\,dy\,dx,$$

zuerst partiell nach y, von $y=X$ bis $y=X'$ und hierauf nach x, von $x=a$ bis $x=A$ vollzogen werden, wo a und A constante Größen sind.

Wenn der Werth dieses Doppelintegrals durch u angedeutet wird, so hat man:

$$u = \int_a^A \int_X^{X'} \varphi(x,y)\,dy\,dx\,; \qquad (1)$$

und wir haben nun das Doppelintegrale zur Rechten in ein mit constanten Integrationsgrenzen begabtes umzusetzen. — Da während der Integration nach y die zweite Integrationsvariable, x, als Constante zu behandeln ist, so ist man für y jede Function von y und der nunmehr als Constante zu behandelnden Größe x zu setzen berechtiget; wählt man diese Function von y und x dergestalt, daß die nunmehr auf y Bezug habenden Integrationgrenzen independent von x hervorgehen, so hat man die verlangte Umformung von u erzielt, und das vorgelegte Doppelintegrale fällt in die Klasse jener, deren am Eingange der vorangehenden Nr. Erwähnung geschah. Die einfachste Function mit der das eben erwähnte Ziel erreicht wird, ist folgende:

$$\tfrac{1}{2}(X'+X)+\tfrac{1}{2}(X'-X)\,y\,,$$

d. h., wenn in die obige u darstellende Gleichung diese Function an die Stelle der Integrationsvariabeln y, folglich

$$\tfrac{1}{2}(X'-X)\,dy$$

statt dy gesetzt wird, dann gehen die Integrationsgrenzen von y in $-1$ und $+1$, also in constante Größen über; so daß nunmehr statt der Gleichung (1) auch folgende:

$$u = \tfrac{1}{2}\int_a^A \int_{-1}^{+1} \varphi\{x,\ \tfrac{1}{2}(X'+X)+\tfrac{1}{2}(X'-X)y\}(X'-X)\,dy\,dx\,,$$

die mit folgender gleichbedeutend ist:

$$u = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\int_{a}^{A} \varphi\{x,\ \tfrac{1}{2}(X'+X) + \tfrac{1}{2}(X'-X)\,y\}\,(X'-X)\,dx\,dy\,, \quad (2)$$

zur Bestimmung von u unterlegt werden darf. — Kennt man sonach jene Function von x und y, die durch F(x,y) dargestellt sein mag, die zweimal nach einander partiell differenzirt, einmal nach x und nach y, folgende Function von x und y:

$$\tfrac{1}{2}\varphi\{x,\ \tfrac{1}{2}(X'+X) + \tfrac{1}{2}(X'-X)\,y\}\,(X'-X)$$

als Differenzialquotienten darbietet, d. h. hat man:

$$\frac{d^2F(x,y)}{dx\,dy} = \tfrac{1}{2}\varphi\{x,\ \tfrac{1}{2}(X'+X) + \tfrac{1}{2}(X'-X)\,y\}\,(X'-X)\,;$$

dann bietet die in Nr. 310 aufgestellte Gleichung (3), auf den vorliegenden Fall angewandt, den Werth von u dar. Eben so finden sämmtliche in den Nrn. 309—324 aufgestellten Gleichungen Statt, wenn in denselben $b=-1$, $B=+1$ angenommen, und

$\varphi(x,y)$ durch $\tfrac{1}{2}\varphi\{x,\ \tfrac{1}{2}(X'+X) + \tfrac{1}{2}(X'-X)\,y\}\,(X'-X)$

ersetzt wird. Man wird sonach alles daselbst Mitgetheilte zur Ausmittelung des fraglichen Doppelintegrals in (1), nach dem man solches mittelst der Gleichung (2) umgeformt haben wird, in Anspruch nehmen und zur Benutzung bringen können.

427. Zur Beleuchtung der allgemein gehaltenen Mittheilung vorhergehender Nr. legen wir uns hier noch zwei besondere Fälle zur Umformung vor.

I. Bei der Annahme:

$$u = \int_{-c}^{+c}\int_{-\sqrt{c^2-x^2}}^{+\sqrt{c^2-x^2}} \varphi(x,y)\,dy\,dx\,,$$

stellt sich nach der Gleichung (2) folgende Bestimmungsgleichung für u heraus:

$$u = \int_{-1}^{+1}\int_{-c}^{+c} q(x, y\sqrt{c^2-x^2})\sqrt{c^2-x^2}\,dx\,dy\,.$$

Wird überdieß noch folgende Bestimmung über die Function $\varphi(x,y)$ getroffen:

$$q(x,y) = \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,,$$

so hat man:

$$u = \int_{-1}^{+1} \int_{-c}^{+c} \sqrt{a^2-x^2-(c^2-x^2)y^2}\ \sqrt{c^2-x^2}\ dx\,dy\,,$$

welche Gleichung mit folgender gleichbedeutend ist:

$$u = 4 \int_{0}^{1} \int_{0}^{c} \sqrt{a^2-x^2-(c^2-x^2)y^2}\ \sqrt{c^2-x^2}\ dx\,dy\,;$$

das bestimmte Doppelintegrale in dieser Gleichung haben wir in Nr. 322, I. transformirt und bestimmt: folglich gilt dieselbe Bestimmung auch für das mit den variabeln Integrationsgrenzen versehene Doppelintegrale:

$$\int_{-c}^{+c} \int_{-\sqrt{c^2-x^2}}^{+\sqrt{c^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\ dy\,dx\,,$$

wenn die am citirten Orte gewonnene Bestimmung mit 4 multiplicirt wird.

II. Sei ferner für eine zweite besondere Annahme:

$$u = \int_{0}^{a} \int_{0}^{b\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^m\right]^{\frac{1}{n}}} \varphi(x,y)\,dy\,dx\,, \qquad (1')$$

so bietet die allgemeine Gleichung (2) folgende Bestimmung für u dar:

$$u = \frac{b}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{0}^{a} \varphi\left\{x\,,\ \tfrac{1}{2}\,b(1+y)\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^m\right]^{\frac{1}{n}}\right\} \left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^m\right]^{\frac{1}{n}} dx\,dy\,;$$

ersetzt man hier:

x durch ax und y durch $2y-1$,

so ergiebt sich folgende einfachere Bestimmungsgleichung:

$$u = ab \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} \varphi\left\{ax\,,\ by(1-x^m)^{\frac{1}{n}}\right\} (1-x^m)^{\frac{1}{n}}\,dx\,dy\,, \qquad (2')$$

wo diese Gleichungen (1′) und (2′) respective die analogen zu den allgemeinen (1) und (2) sind.

Trifft man hier noch folgende besondere Verfügung über die Function $\varphi(x,y)$:

$$\varphi(x,y) = x^{\alpha-1}y^{\beta-1}\,,$$

so geht die Gleichung (2′) über in:

$$u = a^{\alpha} b^{\beta} \int_0^1 \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x^m)^{\frac{\beta}{n}} y^{\beta-1} dx\, dy ,$$

die mit folgender gleichbedeutend ist:

$$u = a^{\alpha} b^{\beta} \int_0^1 y^{\beta-1} dy \cdot \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x^m)^{\frac{\beta}{n}} dx ,$$

oder auch, wegen:

$$\int_0^1 y^{\beta-1}\, dy = \frac{1}{\beta} \text{ und } \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x^m)^{\frac{\beta}{n}}\, dx = \frac{1}{m} \int_0^1 x^{\frac{\alpha}{m}-1} (1-x)^{\frac{\beta}{n}}\, dx ,$$

mit folgender:

$$u = a^{\alpha} b^{\beta} \frac{1}{m\beta} \int_0^1 x^{\frac{\alpha}{m}-1} (1-x)^{\frac{\beta}{n}}\, dx ;$$

das bestimmte Integrale rechterhand haben wir im ersten Theile durch die Function $\Gamma$ ausgedrückt: folglich stellt sich nach Gleichung (37) Nr. 217 daselbst folgende Bestimmungsgleichung heraus:,

$$u = a^{\alpha} b^{\beta} \frac{1}{m\beta} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{m}\right) \Gamma\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}\right)} ,$$

oder auch wegen:

$$\Gamma\left(1+\frac{\beta}{n}\right) = \frac{\beta}{n} \Gamma\left(\frac{\beta}{n}\right) ,$$

folgende:

$$u = \frac{a^{\alpha} b^{\beta}}{mn} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{m}\right) \Gamma\left(\frac{\beta}{n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}\right)} ,$$

d. h. man hat:

$$\int_0^a \int_0^{b\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^m\right]^{\frac{1}{n}}} x^{\alpha-1} y^{\beta-1}\, dy\, dx = \frac{a^{\alpha} b^{\beta}}{mn} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{m}\right) \Gamma\left(\frac{\beta}{n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}\right)} , \qquad (a)$$

welches Resultat von Dirichlet zuerst mitgetheilt wurde und mit Erfolg dazu benutzt werden kann, die Größe u aus Gleichung (1′), nach dem man die Function $\varphi(x,y)$ in derselben nach aufsteigenden Potenzen von x und y aufgelöst hat, durch eine Reihe von Glie-

dern, die sämmtlich die Function $\Gamma$ impliciren, darzustellen. Es besteht diese Bestimmungsgleichung (a), vermöge der derselben zu Grunde gelegten Gleichung (37) in Nr. 217, für sämmtliche reellen positiven Werthe von $\alpha$, $\beta$, m und n.

428. Auf den ganz allgemein gehaltenen Fall der zweitvorhergehenden Nr. ist der folgende, in den Anwendungen der Integralrechnung am häufigsten vorkommende Fall, jedesmal zurück zu bringen. — In den Nrn. 313 — 315 haben wir nämlich gezeigt, daß jedes Doppelintegrale Repräsentant einer Doppelsumme sei, die alle inner gewissen Grenzen der Variabeln betreffenden Werthe der Differenzialfunction umfaßt; die Grenzen dieser doppelten Summe sind jedoch daselbst, gleichwie die des entsprechenden Doppelintegrals, unter den allereinfachsten Formen festgesetzt worden, nämlich, die Summations- oder Integrationsgrenzen der einen Variabeln x sind unabhängig von denen der zweiten Variabeln y, und umgekehrt, angenommen worden. Der Fall nun, wo dieses nicht mehr Statt findet und der, wie schon oben erwähnt wurde, am häufigsten vorkömmt, ist folgender:

Das Doppelintegrale:

$$\int\int q(x, y)\, dy\, dx,$$

als Doppelsumme aufgefaßt, soll über jene Werthe von x und y ausgedehnt werden, die einer vorgelegten Function von x und y, welche durch f(x, y) vorgestellt sein mag, Resultate mit positiven Zeichen beilegen, den Nullwerth mitbegriffen; oder auch umgekehrt, dasselbe Doppelintegrale, als Doppelsumme aufgefaßt, dehne man über jene Werthe von x und y aus, die derselben Function f(x, y), mitbegriffen den Nullwerth, Resultate mit negativen Zeichen beilegen.

Wie dieser Fall, in dem ersteren oder in dem letzteren Sinne aufgefaßt, auf dem in der zweitvorangehender Nr. behandelten zurück zu bringen sei, werden wir in den folgenden Nrn. bei einigen speciellen Verfügungen über die Beschaffenheit der Function f(x, y) zeigen.

429. Man bestimme das Doppelintegrale:

$$\int\int q(x, y)\, dy\, dx$$

dergestalt als Doppelsumme, daß die Variabeln x und y in $\varphi(x,y)$ sämmtliche reellen Werthe durchlaufen., die der Function:

$$f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 ,$$

negative Werthe beilegen, den Nullwerth mitbegriffen.

Da die reellen Werthe von x und y folgender Bedingung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leqq 0 \qquad (\alpha)$$

nachzukommen haben, und da hieraus entweder:

$$\frac{x^2}{a^2} \leqq 1 - \frac{y^2}{b^2} \text{ oder } \frac{y^2}{b^2} \leqq 1 - \frac{x^2}{a^2} \qquad (\beta)$$

gezogen wird; so folgt, wegen des Reellseins von x und y, daß man sowohl:

$$\frac{y^2}{b^2} \leqq 1 , \text{ als auch } \frac{x^2}{a^2} \leqq 1 \qquad (\gamma)$$

haben muß, d. h. die Variabeln y und x sind zunächst an bestimmten Grenzwerthen gebunden, erstere kann nämlich nie größer als b, und letztere nie größer als a sein.

Zur genauern Fixirung der die Variabeln x und y betreffenden Integrationsgrenzen fassen wir eine der in $(\beta)$ aufgestellten Bedingungen, zugleich aber auch die derselben entsprechende aus $(\gamma)$ ins Auge.

Nach der zweiten Bedingung in $(\beta)$ hat man:

$$y^2 \leqq b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) ,$$

und zugleich mit dieser die entsprechende aus $(\gamma)$, nämlich:

$$x^2 \leqq a^2 ,$$

welche letztere Bedingung für x irgend einen der innerhalb $-a$ und $+a$ enthaltenen Werthe, mitbegriffen diese Grenzwerthe, anzunehmen gestattet. Stellen wir sonach einen dieser Werthe für x durch $x_1$ vor, so ist man, nach der vorhergehenden Bedingung, für y jeden Werth anzunehmen berechtiget, der innerhalb der Grenzen:

$$-\sqrt{b^2\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right)} \text{ und } +\sqrt{b^2\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right)}$$

zu liegen kömmt oder mit einer derselben zusammenfällt, d. h., man ist für y jeden Werth von und mit:

$$-\,b\sqrt{1-\frac{x_1^2}{a^2}} \text{ bis und mit } +\,b\sqrt{1-\frac{x_1^2}{a^2}}$$

zu setzen berechtiget. Der gestellten Anforderung gemäß dürfen wir aber keinen dieser Werthe von y, wie keinen der zwischen — a und + a enthaltenen Werthe von x, diese Grenzwerthe mitbegriffen, ausschließen; daher wird dieser gedoppelten Anforderung nur alsdann ein Genüge geschehen, wenn das vorgelegte Doppelintegrale zuerst in Bezug auf y,

$$\text{von } y = -\,b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \text{ bis } y = +\,b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

und hierauf das gewonnene Ergebniß nach x,

$$\text{von } x = -\,a \text{ bis } x = +\,a,$$

integrirt wird. Diesem nach stellt der Ausdruck:

$$\int_{-a}^{+a}\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \varphi(x,y)\,dy\,dx\,, \qquad (\delta)$$

der nach Nr. 426 (Gleich. (1) und (2)) mit folgender gleichbedeutend ist:

$$b\int_{-1}^{+1}\int_{-a}^{+a} \varphi\left(x,\ by\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx\,dy\,, \qquad (A)$$

den Werth der hier verlangten Doppelsumme, oder des Doppelintegrals unter der gestellten Anforderung dar.

430. Für die besondere Annahme der Function $\varphi(x,y)$ vorangehender Nr., nämlich, für die Annahme:

$$\varphi(x,y) = 1\,,$$

geht der allgemeine Ausdruck (A) daselbst, wenn dessen Werth der Kürze wegen durch u angedeutet wird, in folgenden über:

$$u = b\int_{-1}^{+1}\int_{-a}^{+a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx\,dy = b\int_{-a}^{+a}\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dy\,dx\,.$$

Dieser Werth von u stellt den des Doppelintegrals:

$$\int\int dx\,dy\,,$$

vor, wenn in dessen Differenzialfunction für x und y alle jene Werthe gesetzt werden, die der Bedingung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leqq 0$$

entsprechen, und hierauf summirt werden. Bekanntlich stellt das Ergebniß dieser Summation den Flächeninhalt einer Ellipse vor, deren Gleichung, auf rechtwinkelige Coordinatenachsen bezogen, folgende:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

ist; daher stellt auch der Werth von u, aus obiger Gleichung gefolgert, den Flächeninhalt dieser Ellipse dar.

Wird nun im Doppelintegrale, das u vorstellt, zuerst die Integration nach y inner den angezeigten Grenzen vollzogen, so erhält man:

$$u = 2b\int_{-a}^{+a} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx\,;$$

diese Gleichung ist mit folgender gleichbedeutend:

$$u = 4ab\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx\,,$$

diese mit folgender:

$$u = 4ab\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - 4ab\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

diese endlich mit:

$$u = 2ab\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

aus welcher sofort

$$u = ab\pi$$

gezogen wird; welches Endresultat mit dem allgemein bekannten Ausdrucke des Flächengehaltes einer Ellipse in völliger Uebereinstimmung ist.

**431.** Bei einer zweiten besondern Annahme über die Beschaffenheit der Function $\varphi(x,y)$ aus Nr. 429, nämlich bei der:

$$\varphi(x,y) = \sqrt{\frac{1-\frac{a^2-c^2}{a^2}\frac{x^2}{a^2}-\frac{b^2-c^2}{b^2}\frac{y^2}{b^2}}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}},$$

hat man, wenn auch hier durch u der Werth des Doppelintegrals:

$$\int\int \varphi(x,y)\,dy\,dx,$$

unter der durch ($\alpha$) eben citirten Nr. ausgesprochenen Bedingung vorgestellt wird, folgende Bestimmungsgleichung dieser Größe

$$u = b\int_{-1}^{+1}\int_{-a}^{+a}\sqrt{1-\frac{a^2-c^2}{a^2}\frac{x^2}{a^2}-\frac{b^2-c^2}{b^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)y^2}\cdot\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

oder auch, wenn x in ax umgesetzt wird, folgende:

$$u = ab\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2-\frac{b^2-c^2}{b^2}(1-x^2)y^2}\cdot\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Dieser Werth von u doppelt genommen, stellt die Oberfläche eines Ellipsoids dar, dessen Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ist, und dessen durch die Coordinatenebne der x, y gebildeter Ellipsenschnitt die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

hat.

Stellt man durch O die Oberfläche des eben erwähnten Ellipsoids vor, so ergiebt sich nach einigen Reductionen:

$$O=4bc\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}+4ab\int_0^1\int_0^1\frac{\left(1-\frac{b^2-c^2}{b^2}y^2\right)dx\,dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-\frac{b^2-c^2}{b^2}y^2-\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}-\frac{b^2-c^2}{b^2}y^2\right)x^2}},$$

oder, wenn das einfache bestimmte Integrale durch $\frac{\pi}{2}$ ersetzt, und im bestimmten Doppelintegrale die Integration nach x vollzogen

wird, auch folgende Bestimmungsgleichung:

$$O=2bc\pi+4ab\int_0^1 \text{Arctang.}\left(\frac{a}{c}\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2}-\frac{b^2-c^2}{b^2}y^2}\right)\frac{\left(1-\frac{b^2-c^2}{b^2}y^2\right)}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2}-\frac{b^2-c^2}{b^2}y^2}}\,dy\,,$$

die behufs weiterer Reduction, wie folgt, gestellt werden kann:

$$O=2bc\pi+\frac{4ab}{\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}}\int_0^{\cdot} \text{Arctang}\left(\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1}\sqrt{\frac{1-\frac{c^2}{b^2}}{1-\frac{c^2}{a^2}}}\right)\frac{1-\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)y^2}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-\frac{1-\frac{c^2}{b^2}}{1-\frac{c^2}{a^2}}y^2}}\,dy\,.$$

Stellen wir nun unter den bis jetzt unbestimmt gehaltenen Größen a, b, c folgende Ungleichheiten fest:

$$a > b > c\,,$$

dann ist das bestimmte Integrale zur Rechten, vermöge der nunmehr bestehenden Ungleichheit:

$$\frac{1-\frac{c^2}{b^2}}{1-\frac{c^2}{a^2}} < 1\,,$$

einer Reduction fähig, welche die Darstellung des Gehaltes der Oberfläche eines dreiachsigen Ellipsoids unter den bekanntern Formen möglich macht.

In der That wird in der Reductionsgleichung (31) der Nr. 424

$$a \text{ in } \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1}},\quad c^2 \text{ in } \frac{1-\frac{c^2}{b^2}}{1-\frac{c^2}{a^2}} \text{ und } A \text{ in } 1-\frac{c^2}{b^2}$$

umgesetzt, so stellt der Ausdruck zur Linken vom Gleichheieszeichen daselbst genau das bestimmte Integrale in der zuletzt aufgestellten Bestimmungsgleichung für O dar; mit Beachtung ferner des durch die eben angedeutete Umsetzung sich herausstellenden Ergebnisses zur Rechten vom Gleichheitszeichen in (31) ergiebt sich nunmehr auch folgende Bestimmung für O:

$$O = 2b^2\pi + \frac{2bc^2}{\sqrt{a^2-c^2}}\pi\int_0^{\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}y^2}}$$

$$+ 2b\sqrt{a^2-c^2}\ \pi\int_{\frac{b}{a}}^{1} \frac{\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}y^2}}{\sqrt{1-y^2}}\,dy\,. \qquad (a)$$

Dieſe Beſtimmungsgleichung iſt mit Zuziehung der Gleichungen (18) und (19) in Nr. 422 auch mit der folgenden gleichbedeutend:

$$O = 2b^2\pi + \frac{2bc^2}{\sqrt{a^2-c^2}}\pi\int_{\frac{b}{a}}^{1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}y^2}}$$

$$+ 2b\sqrt{a^2-c^2}\ \pi\int_{\frac{b}{a}}^{1} \frac{\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}y^2}}{\sqrt{1-y^2}}\,dy\,, \qquad (a')$$

in welcher jedoch nothwendigerweiſe die Bedingung oder die Ungleichheit:

$$\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2} < 1$$

realiſirt werden muß, da die Hülfsgleichungen (18) und (19), die wir hier zu Grunde gelegt, nur unter dieſer Beſchränkung Beſtand haben; jede Specialiſirung ſonach die dieſer Ungleichheit widerſpricht, wie etwa die:

$$a = b\,,$$

ruft auch eine irrige Beſtimmung für O herbei.

Zur Verificirung dieſer Ergebniſſe, nehmen wir zuerſt in der Gleichung (a) die Specialiſirung $a = b$ vor, ſo wird dann O die Oberfläche eines abgeplatteten Rotationsellipſoids vorſtellen und durch folgenden Ausdruck beſtimmt ſein:

$$2a^2\pi + \frac{ac^2}{\sqrt{a^2-c^2}}\pi\log.\left(\frac{a+\sqrt{a^2-c^2}}{a-\sqrt{a^2-c^2}}\right); \qquad (b)$$

trifft man zweitens in der Gleichung (a′) die Verfügung $b = c$, so so stellt dann O die Oberfläche eines verlängerten Rotationsellipsoids vor, und wird durch folgenden Ausdruck bestimmt:

$$2\,c^2\pi + \frac{2c^3}{\sqrt{a^2-c^2}}\,\pi\,\text{Arcsin.}\left(\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}\right). \qquad (b')$$

Wenn also eine Elipse, deren Halbachsen a und c sind, wo $a > c$ ist, durch Rotation um eine ihrer Achsen eine Revolutionsfläche erzeugt; so stellt entweder der Ausdruck in (b) oder der in (b′) die Oberfläche dieses Rotationskörpers vor, je nachdem die Rotation um die kleine oder um die große Achse der Ellipse Statt findet.

Wird endlich in einem der Ausdrücke (b) oder (b′) die Annahme

$$a = c \text{ oder besser } a = c + \omega$$

getroffen, so geht jeder derselben in

$$4\,c^2\pi$$

über, welcher Ausdruck, wie bekannt, die Oberfläche einer Kugel von Halbmesser c repräsentirt.

**432.** Da wir für die Bestimmung der Integrationsgrenzen eines Doppelintegrals, wenn dasselbe einer in Nr. 428 gestellten Anforderung nachzukommen hat, keine uns befriedigende allgemeine Lösung kennen; so erachten wir es um so nothwendiger dem in Nr. 429 vollständig gelösten besondern Falle noch einige ähnliche Fälle, sammt deren Lösung beizugeben, um bei der analytischen Behandlung und Lösung anderer derartigen Probleme etwelchen Anhalt zu haben.

Einer dieser besondern Fälle, den man gewissermaßen als Ergänzung zu dem in Nr. 429 behandelten ansehen kann, umfaßt folgendes Doppelproblem.

Das Doppelintegrale:

$$\int\!\!\int \varphi(x,y)\,dy\,dx$$

soll in den zwei folgenden, gegenseitig sich ausschließenden Weisen, als Doppelsumme auftreten: In der Function $\varphi(x,y)$ durchlaufen, erstens, die Variabeln x und y sämmtliche reellen Werthe, die in die Function:

$$f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$$

gesetzt, derselben, mitbegriffen den Nullwerth, jedesmal positive Resultate beilegen; zweitens, die Variabeln x und y in Function $\varphi(x,y)$ durchlaufen die noch übrigen reellen Werthe von x und y mit Beibehaltung jener, die die Function f(x,y) in Null umsetzen, d. h., dieselben nehmen alle reellen Werthe von x und y an, die in die Function:

$$f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$$

gesetzt, mitbegriffen den Nullwerth, Resultate mit negativen Zeichen hervorrufen.

I. Die Lösung des ersten Theiles dieses Doppelproblems verlangt die Angabe jener Werthe von x und y, wie auch noch die äußersten Grenzen derselben, die folgender Bedingung:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 \geqq 0$$

nicht widersprechen; diese Bedingung ist mit folgender gleichbedeutend:

$$y^2 \leqq b^2 \left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right) ;$$

und da wir a und b als reelle Zahlengröße feststellen: so folgern wir zunächst, daß zum Reellsein von y die Variable x folgender Bedingung:

$$x^2 \geqq a^2$$

nachzukommen hat, welches so viel sagen will als, die numerischen Werthe von x erstrecken sich über alle Werthe von:

$$a \text{ bis } a + k ,$$

wo k gleichen Zeichens mit a und wie diese jedes reellen Werthes fähig ist, oder auch, die positiven sowohl als die negativen Werthe von x haben die numerischen Grenzen a und a + k. Stellt nun $x_1$ einen dieser Werthe von x vor, so bietet, für diese Annahme, die obige Bedingung folgende Grenzen für y dar:

$$-\,b\sqrt{\frac{x_1^2}{a^2}-1} \text{ und } +\,b\sqrt{\frac{x_1^2}{a^2}-1}\,,$$

d. h., bei der Annahme $x = x_1$ ist y aller reellen Werthe fähig, die innerhalb dieser Grenzen, diese mitbegriffen, zu liegen kommen. Zieht man nun sämmtliche Werthe, deren $x_1$ fähig ist, in Betracht, so ergiebt sich folgende Lösung für den ersten Theil unseres Doppelproblems. Das vorgelegte Doppelintegrale integrire man zuerst partiell nach y, von:

$$y = -\,b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1} \text{ bis } y = +\,b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\,;$$

die nunmehr sich ergebende, bloß x implicirende Differenzialfunction integrire man hierauf nach x, und zwar dehne man diese Integration über jene positiven und negativen Werthe von x aus, die innerhalb der Zahlenwerthe a und $a + k$ zu liegen kommen.

Stellen wir nun durch a und k nur positive Zahlengrößen vor, und bezeichnen der Kürze wegen den Werth des Doppelintegrals, wie solches im vorliegenden Falle aufzufassen ist, durch u; so stellt sich zunächst folgende Bestimmungsgleichung für u heraus:

$$u = \int_{-(a+k)}^{+(a+k)} \int_{-b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}}^{+b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}} \varphi(x,y)\,dy\,dx - \int_{-a}^{+a} \int_{-b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}}^{+b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}} \varphi(x,y)\,dy\,dx\,,$$

aus welcher, beachtend die Gleichung:

$$\int_{-(a+k)}^{+(a+k)} \psi(x)\,dx = \int_{-(a+k)}^{-a} \psi(x)\,dx + \int_{-a}^{+a} \psi(x)\,dx + \int_{a}^{a+k} \psi(x)\,dx\,,$$

wie auch die:

$$\int_{-(a+k)}^{-a} \psi(x)\,dx = \int_{a}^{a+k} \psi(-x)\,dx\,,$$

in denen $\psi(x)$ irgend eine Function von x vorstellt, folgende Bestimmungsgleichung für u gefolgert wird:

$$u = \int_{a}^{a+k} \int_{-b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}}^{+b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}} \Big\{ \varphi(x,y) + \varphi(-x,y) \Big\}\,dy\,dx\,; \qquad (\epsilon)$$

wird endlich der Ausdruck zur Rechten nach Nr. 426 umgeformt, so ergiebt sich:

$$u = b\int_{-1}^{+1}\int_{a}^{a+k}\left\{\varphi\left(x, by\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)+\varphi\left(-x, by\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)\right\}\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\,dx\,dy. \quad (B)$$

In dieser Gleichung sind wir für k jeden endlichen sowohl, als auch einen unendlich großwerdenden Werth zu setzen berechtiget, wenn wir solchen nur jedesmal positiv und reell voraussetzen. Stellt man hier k als reelle, positive unendlich großwerdende Größe fest, dann bietet der Ausdruck rechterhand vom Gleichheitszeichen den Werth des Doppelintegrals $\int\int \varphi(x, y)\,dy\,dx$ in der nach dem ersten Theile des Doppelproblems verlangten Weise dar. Auf dem Falle aber, wenn k endlich verbleibt, werden wir erst in der folgenden Nr. zu sprechen kommen.

II. Der zweite Theil des hier vorgelegten Doppelproblems verlangt die Angabe der Werthe von x und y, die der Bedingung:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 \leqq 0,$$

welche mit folgender gleichbedeutend ist:

$$\frac{x^2}{a^2} \leqq 1 + \frac{y^2}{b^2},$$

nachkommen. — Während wir in I. alle inner den Grenzen — a und + a fallenden Werthe der Integrationsvariabeln x auszuschließen angewiesen waren, fällt gegenwärtig auch diese Beschränkung weg; es ist nämlich dieser eben aufgestellten Bedingung bei jeder reellen Verfügung über x, wie bei jeder über y respective durch reelle Werthe von y, wie durch dergleichen Werthe von x jedesmal zu entsprechen möglich. Wird diesem nach durch $y_1$ irgend eine reelle Größe vorgestellt, dann ist man für x jeden Werth von:

$$-a\sqrt{1+\frac{y_1^2}{b^2}} \text{ bis } +a\sqrt{1+\frac{y_1^2}{b^2}}$$

zu setzen berechtiget und, nach der Stellung des vorliegenden Problems, hiezu auch bemüßiget. Man hat also zur vollständigen Lösung dieses Problems das vorgelegte Doppelintegrale zuerst partiell nach x, von:

$$x = -a\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2}} \text{ bis } x = +a\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2}}$$

zu integriren, und von der nunmehr sich herausstellenden Differenzialfunction von y hat man dann die Integration, von:

$$y = -k' \text{ bis } y = +k' ,$$

zu vollziehen, wo k' jede positive reelle Zahlengröße vorstellen kann.

Bezeichnet man sonach durch u' den Werth des fraglichen Doppelintegrals nach der gegenwärtig gestellten Anforderung, so hat man:

$$u' = \int_{-k'}^{+k'} \int_{-a\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2}}}^{+a\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2}}} \varphi(x, y)\, dx\, dy , \qquad (\varepsilon')$$

oder, nach Nr. 426,

$$u' = a\int_{-1}^{+1} \int_{-k'}^{+k'} q\left(ax\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2}},\ y\right)\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2}}\, dy\, dx , \qquad (B')$$

welche Gleichung die Lösung des zweiten Theiles des uns gesetzten Doppelproblems darstellt, in der k' positiv, reell und dabei endlich oder unendlich großwerdend sein kann. Wird hier k' unendlich großwerdend, positiv und reell vorausgesetzt gedacht, dann bietet der Ausdruck rechterhand die vollständige Auflösung des zweiten Theiles vorliegenden Doppelproblems dar; die Bedeutung dieser Gleichung aber, wenn k' endlich verbleibt, wie deren Zusammenhang mit der obigen (B), falls in derselben k endlich ist, werden wir gleichfalls in der folgenden Nr. zu Sprache bringen.

433. Die Gleichungen (B) und (B') in vorangehender Nr., wenn in denselben k und k' endliche und zwar positive reelle Werthe vorstellen, können, nach den gemachten Mittheilungen dieser Nr., folgendermaßen gedeutet werden.

Die Größe u in Gleichung (B) stellt den Werth des Doppelintegrals $\int\int \varphi(x, y)\, dy\, dx$, als Doppelsumme aufgefaßt, für jene reellen Werthe von x und y dar, die der Function:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 , \qquad (\zeta)$$

mitbegriffen den Nullwerth, nur positive Resultate beilegen; dabei wachsen aber diese Werthe von x und y nicht ins Unbestimmte, sondern weil k nunmehr als endliche Größe auftreten soll, erreicht x den größten numerischen Werth $a + k$, und da man gegenwärtig

$$\frac{y^2}{b^2} \leqq \frac{x^2}{a^2} - 1$$

hat, erreicht auch y einen numerisch größten Werth, nämlich den:

$$\frac{b}{a}\sqrt{2ak + k^2}.$$

Die Werthe von x und y also, die der Function in (ξ) sowohl positive Werthe beilegen, als auch dieselbe in Null umsetzen, sind respective an die äußersten Grenzwerthe:

$$a + k, \quad \frac{b}{a}\sqrt{2ak + k^2}$$

gebunden.

Ebenso stellt nach den Mittheilungen der vorangehenden Nr. die Größe u′ in der Gleichung (B′) den Werth desselben Doppelintegrals, gleichfalls als Doppelsumme aufgefaßt, über jene Werthe von x und y ausgedehnt dar, die der Function in (ξ), mitbegriffen den Nullwerth, negative Werthe beilegen; wobei jedoch, da wir auch k′ nunmehr endlich voraussetzen, die Werthe von y nicht mehr ins Unendliche wachsen, sondern an diesen endlichen Grenzwerth k′ gebunden sind. Berücksichtiget man die nunmehr gestellte Anforderung betreffend die Werthe von x und y, so wird auch die Variable x den endlichen Grenzwerth $\frac{a}{b}\sqrt{b^2 + k'^2}$ nicht übersteigen.

Sonach sind auch im vorliegenden Falle die Werthe von x und y, die der Function in (ξ), mitbegriffen den Nullwerth, nur negative Resultate beilegen, und über die die Doppelsumme sich erstreckt, nicht mehr ins Unendliche wachsend anzunehmen; sondern die numerischen Werthe derselben sind an bestimmte Grenzen gebunden, die respective:

$$\frac{a}{b}\sqrt{b^2 + k'^2}, \quad k'$$

sind.

Wird nun festgestellt, daß die äußersten Werthe der Integrationsvariabeln x und y in den beiden so eben besprochenen Fällen gleich groß seien, nämlich, daß der größte numerische Werth von x in dem ersten Falle, dem analogen in dem zweiten Falle gleich werde, und daß es ein gleiches Bewenden mit den größten numerischen Werthen von y habe; dann stellt das Summenergebniß von u und u′ der beiden Gleichungen (B) und (B′) vorangehender Nr. den Werth des Doppelintegrals $\int\int \varphi(x,y)\,dy\,dx$, gleichfalls als Doppelsumme aufgefaßt, über jene Werthe von x und y ausgedehnt dar, die in Beziehung auf x inner den folgenden Grenzen:

$$-(a+k) \text{ und } +(a+k)$$

und in Beziehung auf y inner diesen:

$$-k' \text{ und } +k'$$

enthalten sind; d. h., man hat bei Zugrundelegung der Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a+k &= \frac{a}{b}\sqrt{b^2+k'^2}\,, \\ k' &= \frac{b}{a}\sqrt{2ak+k^2}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (\eta)$$

von denen jede, wie man sich sehr bald überzeugt, eine Folge der andern ist, folgenden Zusammenhang:

$$u+u' = \int_{-(a+k)}^{+(a+k)} \int_{-k'}^{+k'} q(x,y)\,dy\,dx\,, \qquad (\vartheta)$$

wo u und u′ aus den Gleichungen (B) und (B′) der vorhergehenden Nr. zu bestimmen sind.

Von dieser Gleichung wird in besondern Fällen Gebrauch gemacht, um die für u und u′ nach den Gleichungen (B) und (B′) gewonnenen Ergebnisse zu verificiren, wie wir solches auch in der folgenden Nr. bei einem besondern Falle zeigen werden; außerdem führt dieselbe noch auf einen interessanten Zusammenhang unter zwei bestimmten Doppelintegralien, den wir noch in vorliegender Nr. entwickelnd mittheilen wollen.

Berücksichtiget man nämlich die folgenden zwei Gleichungen:

$$\int_{-a\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2}}}^{+a\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2}}} q(x,y)\,dx = \int_{0}^{a\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2}}} \Big\{ q(x,y)+q(-x,y) \Big\}\,dx\,,$$

$$\int_{-(a+k)}^{+(a+k)} \int_{-k'}^{+k'} \varphi(x,y)\,dy\,dx = \int_{0}^{a+k} \int_{-k'}^{+k'} \{\varphi(x,y) + \varphi(-x,y)\}\,dy\,dx,$$

so führt die Gleichung (S), wenn die Werthe von u und u′, statt aus den Gleichungen (B) und (B′), aus den Gleichungen (ε) und (ε′) der vorhergehenden Nr. eingeführt werden, und dann

$$\varphi(x,y) + \varphi(-x,y) \text{ durch } f(x,y)$$

ersetzt wird, auf folgenden Zusammenhang:

$$\int_{0}^{a+k} \int_{-k'}^{+k'} f(x,y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_{a}^{a+k} \int_{-b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}}^{+b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{-k'}^{+k'} \int_{0}^{a\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2}}} f(x,y)\,dx\,dy;$$

ferner bestehen auch folgende Gleichungen:

$$\int_{-k'}^{+k'} f(x,y)\,dy = \int_{0}^{k'} \{f(x,y) + f(x,-y)\}\,dy,$$

$$\int_{-b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}}^{+b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}} f(x,y)\,dy = \int_{0}^{b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}} \{f(x,y) + f(x,-y)\}\,dy,$$

$$\int_{-k'}^{+k'} \int_{0}^{a\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2}}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{0}^{k'} \int_{0}^{a\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2}}} \{f(x,y) + f(x,-y)\}\,dx\,dy,$$

daher geht der zuletzt aufgestellte Zusammenhang, wenn man:

$$f(x,y) + f(x,-y) \text{ durch } F(x,y)$$

ersetzt, in folgenden über:

$$\int_{0}^{a+k} \int_{0}^{k'} F(x,y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_{a}^{a+k} \int_{0}^{b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}} F(x,y)\,dy\,dx + \int_{0}^{k'} \int_{0}^{a\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2}}} F(x,y)\,dx\,dy,$$

aus dem auch folgende Gleichung gezogen wird:

$$\int_0^{k'}\int_{a\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2}}}^{a+k} F(x,y)\,dx\,dy = \int_a^{a+k}\int_0^{b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}} F(x,y)\,dy\,dx\,,$$

in welcher $F(x,y)$ irgend eine Function von x und y vorstellt, und die Größen k und k′ durch eine der Gleichungen in $(\eta)$ verbunden sind.

Eliminirt man nun aus dieser die Größe k, so stellt den oben angekündigten Zusammenhang die folgende Gleichung dar:

$$\int_0^{k'}\int_{a\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1+\frac{k'^2}{b^2}}} F(x,y)\,dx\,dy = \int_a^{a\sqrt{1+\frac{k'^2}{b^2}}}\int_0^{b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}} F(x,y)\,dy\,dx\,, \quad (I)$$

wo k′ jedes positiven reellen, endlichen oder unendlichen großwerdenden Werthes fähig ist. So gelangt man bei der Annahme $k' = \infty$ auf die Gleichung:

$$\int_0^{\infty}\int_{a\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2}}}^{\infty} F(x,y)\,dx\,dy = \int_a^{\infty}\int_0^{b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}} F(x,y)\,dy\,dx\,, \quad (II)$$

die für $a = 0$, wie auch für $b = \infty$ in eine identische übergeht.

434. Um einen besondern Fall der Ergebnisse beider vorhergehenden Nrn., namentlich wenn k und k′ endliche Werthe vorstellen und durch eine Gleichung $(\eta)$ verbunden sind, vorzuführen, erklären wir die Function $\varphi(x,y)$ in den Gleichungen (B) und (B′) der positiven Einheit gleich. Es bieten alsdann diese zwei Gleichungen folgende Bestimmungen für u und u′ dar:

$$u = 2b\int_{-1}^{+1}\int_a^{a+k}\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\,dx\,dy\,,$$

$$u' = a\int_{-1}^{+1}\int_{-k'}^{+k'}\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2}}\,dy\,dx\,;$$

und wenn die Integrationen vollzogen werden, ergeben sich folgende Bestimmungen:

$$u = 2\frac{b}{a}(a+k)\sqrt{2ak+k^2} - 2ab\log\left(\frac{a+k+\sqrt{2ak+k^2}}{a}\right),$$

$$u' = 2\frac{a}{b}k'\sqrt{b^2+k'^2} + 2ab\log.\left(\frac{k'+\sqrt{b^2+k'^2}}{b}\right).$$

Diese gewonnenen Bestimmungen für u und u′ stellen die Inhalte von Flächenstücken vor, die von Geraden und einer Hyperbel, deren Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ist, begrenzt sind. Erstere, u, mißt die durch die Querachse 2a getrennten hohlen Flächenstücke dieser Hyperbel, welche zwei Höhlungen durch zwei auf dieselbe Querachse geführten Perpendikel, jedes in demselben Abstande k vom zugehörigen Scheitelpunkte gezogen, begrenzt sind; letztere, u′, stellt das Maß des zusammenhängenden biconvexen Flächenstückes dieser Hyperbel dar, das von zwei zu beiden Seiten der Querachse mit derselben parallellen Geraden begrenzt ist, die beide den gleichen Abstand k′ mit der Querachse eingehen.

Lassen wir nun die endlich gedachten Größen k und k′ den durch eine der Gleichungen (η) ausgedrückten Zusammenhang eingehen, dann hat man nach der Gleichung (ϑ):

$$u + u' = \int_{-(a+k)}^{+(a+k)} \int_{-k'}^{+k'} dy\,dx = 4k'(a+k),$$

ein Ergebniß, auf das auch die obigen u und u′ darstellenden Gleichungen führen, wenn man gleichfalls die Gleichungen in (η) in Betracht zieht.

435. Zur fernern Uebung in der Bestimmung der Integrationsgrenzen von Doppelintegralien, falls solche als Doppelsummen, wie in Nr. 428 ausgesprochen ward, auftreten, befassen wir uns noch mit der Lösung des folgenden Doppelproblems.

Von dem Doppelintegrale:

$$\int\int q(x,y)\,dy\,dx$$

wird verlangt:

1) soll dasselbe als Doppelsumme in Bezug auf x und y in der Weise auftreten, daß sämmtliche reellen Werthe von x und y der Function:

$$f(x, y) = y^2 - px ,$$

mitbegriffen den Nullwerth, nur negative Werthe beilegen;

2) trete dasselbe Doppelintegrale als Doppelsumme nur jener reellen Werthe von x und y auf, die derselben so eben festgestellten Function f(x, y) bloß positive Resultate, mitbegriffen den Nullwerth, beilegen.

I. Nach der zuerst gestellten Anforderung dieses Doppelproblems hat man folgender Bedingung:

$$y^2 \leqq px$$

ein Genüge zu thun. Setzen wir nun den Coefficienten p als positive und reelle Zahlengröße voraus, so kann der gestellten Anforderung, für x und y reelle Zahlenwerthe zu erzielen, nur dann entsprochen werden, wenn negative Zahlenwerthe für x geradezu ausgeschlossen werden; und da der Nullwerth, wie auch jeder positive Werth für x in keinerlei Widerspruch zu der aufgestellten Bedingung steht: so ersehen wir vorerst, daß x aller positiven Werthe von 0 bis k fähig ist, wo k irgend eine positive Zahlengröße repräsentirt. Wird durch $x_1$ einer dieser Werthe von x vorgestellt, so entspricht demselben jeder Werth von y, der inner den Grenzen:

$$-\sqrt{px_1} \text{ und } +\sqrt{px_1} ,$$

mitbegriffen diese Grenzen, zu liegen kömmt; und wir folgern nunmehr, daß das vorgelegte Doppelintegrale zuerst nach y,

$$\text{von } y = -\sqrt{px} \text{ bis } y = +\sqrt{px}$$

und hierauf dann nach x,

$$\text{von } x = 0 \text{ bis } x = k$$

zu integriren ist. Stellt nun u den Werth dieses Doppelintegrals vor, so hat man:

$$u = \int_0^k \int_{-\sqrt{px}}^{+\sqrt{px}} q(x, y)\, dy\, dx , \qquad (\iota)$$

oder auch nach Nr. 426:

$$u = \int_{-1}^{+1} \int_{0}^{k} q(x, y\sqrt{px})\sqrt{px}\, dx\, dy . \qquad (C)$$

Mit der Größe k hat es in dieser Gleichung ein analoges Bewenden, wie mit derselben Größe in der Gleichung (B) in Nr. 432. Dieselbe ist nach dem eigentlichen Wortlaute des vorliegenden ersten Theiles des Doppelproblems eine unendlich großwerdende positive Größe; läßt man solche aber eine endliche Größe sein, dann stellt diese Gleichung die Lösung des gleichen Problems, mit der Beschränkung jedoch vor, daß diese endliche Größe k den größten Werth von x und diesem zufolge auch nunmehr $\sqrt{pk}$ den größten Werth von y vorstellt; — so daß die Doppelsumme nur jene Werthe von x und y noch beschlägt, die respective nicht größer als k und $\sqrt{pk}$ sind, und der Bedingung $y^2 \leqq px$ genügen.

II. Die zweite Anforderung des gegenwärtigen Doppelproblems verlangt die Angabe jener reellen Werthe von x und y, die folgender Bedingung:

$$y^2 \gtrless px$$

ein Genüge thun, welche, wenn, wie in dem vorausgehenden Falle, p positiv vorausgesetzt wird, das Ausschließen sämmtlicher negativen Werthe für x zur Folge hat. Stellt man diese Bedingung folgendermaßen dar:

$$x \leqq \frac{1}{p} y^2 ,$$

so ersieht man zunächst, daß y sämmtlicher positiven und negativen reellen Werthe, wie auch noch des Nullwerthes fähig ist. Wenn demnach $y_1$ einen dieser reellen Werthe repräsentirt, so ist x aller Werthe:

$$\text{von } 0 \text{ bis } \frac{1}{p} y_1^2$$

und $y_1$ sämmtlicher Werthe:

$$\text{von } -k' \text{ bis } +k'$$

fähig, wo k' einen beliebig reellen positiven Zahlenwerth vorstellt.

Das vorgelegte Doppelintegrale, wie gegenwärtig verlangt wird, als Doppelsumme dargestellt zu erhalten, integrire man solches zuerst partiell nach x,

$$\text{von } x = 0 \text{ bis } x = \frac{1}{p} y^2$$

und hierauf dann nach y,

$$\text{von } y = -k' \text{ bis } y = +k' .$$

Stellt man durch u' den Werth dieses Doppelintegrals dar, so hat man, dem eben Mitgetheilten zu Folge, folgende Gleichung:

$$u' = \int_{-k'}^{+k'} \int_{0}^{\frac{1}{p} y^2} q(x, y)\, dx\, dy , \qquad (\iota')$$

oder auch folgende:

$$u' = \frac{1}{p} \int_{0}^{1} \int_{-k'}^{+k'} q(\tfrac{1}{p} xy^2, y)\, y^2\, dy\, dx , \qquad (C')$$

wo, wie wir festgestellt haben, p eine reelle positive Zahl vorstellt, und über k' ein Aehnliches, was in dem vorhin betrachteten Falle über k, ausgesagt werden kann. Es wird nämlich k' eine unendlich großwerdende Größe vorstellen, damit dem zweiten Theile des vorliegenden Doppelproblems in aller Strenge entsprochen werde; sieht man aber dieselbe als eine endliche Größe an, dann lösen gleichfalls noch die eine oder die andere der letztern zwei Gleichungen denselben Theil des Doppelproblems, mit der Beschränkung jedoch, daß die Doppelsumme des Doppelintegrals keinen Werth von y beschlägt, der größer als k' ist und sonach auch keinen Werth von x, der die endliche Größe $\frac{1}{p} k'^2$ übertrifft.

Setzen wir nun die größten Werthe von x und y, in dem wir solche endlich voraussetzen, in den beiden Theilen des vorliegenden Doppelproblems respective gleich groß voraus; so stellt die Summe von u und u' den Werth des Doppelintegrals:

$$\int \int \varphi(x,y)\, dy\, dx ,$$

gleichfalls als Doppelsumme aufgefaßt, über jene Werthe von x und y ausgedehnt dar, die inner den Grenzen 0 und k für x und inner den $-k'$ und $+k'$ für y, die Grenzwerthe mitbegriffen, enthalten sind, d. i. man hat, bei Feststellung der Gleichungen:

$$k = \frac{1}{p} k'^2 \text{ und } k' = \sqrt{pk} , \qquad (\varkappa)$$

wo die eine eine Folge der andern ist, folgende Gleichung:

$$u + u' = \int_0^k \int_{-k'}^{+k'} \varphi(x, y)\, dy\, dx\,, \qquad (\lambda)$$

die analog zur Gleichung (ϑ) Nr. 433 und gleichwie diese zur Aufstellung einiger Relationen, wie solches in der folgenden Nr. wird gezeigt werden, wie auch zur Verificirung der für u und u′ jedesmal sich herausstellenden Ergebnisse unterlegt werden kann.

436. Berücksichtiget man die Bestimmungen von u und u′ nach den Gleichungen (ι) und (ι′) vorhergehender Nr., so geht die Gleichung (λ) daselbst in folgende über:

$$\int_0^k \int_{-\sqrt{px}}^{+\sqrt{px}} q(x, y)\, dy\, dx + \int_{-k'}^{+k'} \int_0^{\frac{1}{p}y^2} q(x, y)\, dx\, dy = \int_{-k'}^{+k'} \int_0^k q(x, y)\, dx\, dy\,, \qquad (\mu)$$

aus der wir, wie solches auch nothwendig ist, unter der Annahme des Bestandhabens einer der Gleichungen in (ϰ) vorhergehender Nr. einige Folgerungen mittheilen werden.

I. Bringt man das zweite Doppelintegrale linkerhand vom Gleichheitszeichen auf die entgegengesetzte Seite, so erhält man:

$$\int_0^k \int_{-\sqrt{px}}^{+\sqrt{px}} q(x, y)\, dy\, dx = \int_{-k'}^{+k'} \int_{\frac{1}{p}y^2}^k q(x, y)\, dx\, dy\,;$$

berücksichtiget man nun die folgenden zwei Gleichheiten:

$$\int_{-\sqrt{px}}^{+\sqrt{px}} q(x, y)\, dy = \int_0^{\sqrt{px}} \{q(x, y) + q(x, -y)\}\, dy\,,$$

$$\int_{-k'}^{+k'} \int_{\frac{1}{p}y^2}^k q(x, y)\, dx\, dy = \int_0^{k'} \int_{\frac{1}{p}y^2}^k \{q(x, y) + q(x, -y)\}\, dx\, dy\,,$$

und ersetzt man

$$q(x, y) + q(x, -y) \text{ durch } F(x, y)\,,$$

so geht die vorige Gleichung in folgende über:

$$\int_0^k \int_0^{\sqrt{px}} F(x, y)\, dy\, dx = \int_0^{k'} \int_{\frac{1}{p}y^2}^k F(x, y)\, dx\, dy\,,$$

in welcher F(x, y) irgend eine innerhalb der Integrationsgrenzen continuirliche Function von x und y vorstellt, und in der die positiven

Constanten k und k′ durch eine der Gleichungen in (ϰ) verbunden sind. Man erhält sonach, je nachdem die erste oder die zweite dieser Constanten eliminirt wird, die erste oder zweite der nun folgenden zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{p}k'^2}\int_0^{\sqrt{px}} F(x,y)\,dy\,dx &= \int_0^{k'}\int_{\frac{1}{p}y^2}^{\frac{1}{p}k'^2} F(x,y)\,dx\,dy\,,\\ \int_0^{k}\int_0^{\sqrt{px}} F(x,y)\,dy\,dx &= \int_0^{\sqrt{pk}}\int_{\frac{1}{p}y^2}^{k} F(x,y)\,dx\,dy\,,\end{aligned}\right\} \quad \text{(III)}$$

in denen nunmehr k und k′ beliebige positive reelle Werthe vorstellen.

Wird nun in ersterer k′ oder in letzterer k als unendlich großwerdende Größe vorausgesetzt, so ergiebt sich auch folgende Relation

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\sqrt{px}} F(x,y)\,dy\,dx = \int_0^{\infty}\int_{\frac{1}{p}y^2}^{\infty} F(x,y)\,dx\,dy\,, \quad \text{(IV)}$$

die identisch realisirt wird, wenn man p als eine unendlich großwerdende positive Größe voraussetzt.

II. Wird ferner in der am Eingange aufgestellten Relation ($\mu$) eine der Größen k und k′ unendlich großwerdend vorausgesetzt, dann wird solches auch vermöge der Gleichungen (ϰ) die andere, und man hat:

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\frac{1}{p}y^2} \varphi(x,y)\,dx\,dy + \int_0^{\infty}\int_{-\sqrt{px}}^{+\sqrt{px}} \varphi(x,y)\,dy\,dx\,;$$

wird hier über die Function $\varphi(x,y)$, wie folgende Gleichung zeigt, verfügt:

$$\varphi(x,y) = F(y)\,\mathrm{Cos.}x(z-y)\,,$$

wo also F(y) eine für alle reellen Werthe von y continuirliche Function dieser Größe vorstellt, dann hat man, nach Gleichung (IX) der Nr. 392,

$$F(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(y)\,\mathrm{Cos.}x(z-y)\,dy\,dx\,,$$

und die vorige Gleichung nimmt nunmehr folgende Form an:

$$F(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\frac{1}{p}y^2} F(y)\,\mathrm{Cos.}x(z-y)\,dx\,dy + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\sqrt{px}}^{+\sqrt{px}} F(y)\mathrm{Cos.}x(z-y)\,dydx;$$

vollzieht man noch im ersten Doppelintegrale rechterhand die angezeigte partielle Integration nach x; — so ergiebt sich endlich:

$$F(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(y)\,\frac{\mathrm{Sin.}\frac{y^2}{p}(z-y)}{z-y}\,dy + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\sqrt{px}}^{+\sqrt{px}} F(y)\mathrm{Cos.}x(z-y)dydx\,, \quad (V)$$

die, ähnlich der vorhin citirten Gleichung, jede für die reellen Werthe der allgemeinen Größe continuirliche Function dieser allgemeinen Größe durch bestimmte Integralien repräsentirt, und bei der Annahme $p = \infty$ sogar mit dieser citirten Gleichung zusammenfällt.

437. Bevor wir die Doppelintegralien verlassen, machen wir noch in der vorliegenden Nr. eine Mittheilung, die für die rein analytische Auffassung und Behandlung von Doppelintegralien nicht ohne Nutzen sein dürfte.

Zu einem Doppelintegrale, wie etwa folgendes:

$$\int_0^a\int_0^{my} \varphi(x, y)\,dx\,dy\,, \quad (\nu)$$

wo a und m Constante sind, kann, indem man auf den Ursprung desselben zurück geht, ein aequivalentes, der Form nach aber verschiedenes, Doppelintegrale hergestellt werden, das zu diesem in einer ähnlichen Beziehung steht, als es die Doppelintegralien in ($\varepsilon$) und ($\varepsilon'$) der Nr. 432, oder die in ($\iota$) und ($\iota'$) der Nr. 435 zu einander sind.

Da dieses vorgelegte Doppelintegrale, wenn nämlich dasselbe als Doppelsumme aufgefaßt wird, über sämmtliche Werthe von x sich erstreckt, die kleiner und höchstens noch gleich my sind, wo y sämmtliche von 0 bis und mit a enthaltenen Werthe durchläuft; und dieses soviel bedeutet als, das Doppelintegrale:

$$\int\int \varphi(x, y)\,dx\,dy\,, \quad (\xi)$$

als Doppelsumme aufgefaßt, soll sämmtliche Werthe von x und y beschlagen, die der Function:

$$x - my , \qquad (o)$$

mitbegriffen den Nullwerth, nur negative Werthe beilegen, wobei man jedoch den numerisch größten Werth von y durch a fixirt; — so ist auch die genau entgegengesetzte Anforderung zu stellen möglich, nämlich, dasselbe Doppelintegrale (ξ), gleichfalls als Doppelsumme aufgefaßt, soll über jene Werthe von x und y ausgedehnt werden, die derselben Function in (o), mitbegriffen den Nullwerth, nur positive Werthe beilegen.

Die Lösung dieses entgegengesetzten Falles verlangt die Realisirung folgender Bedingung:

$$y \leqq \frac{1}{m} x .$$

Stellt man nun den größten Werth, den x gegenwärtig annehmen soll, durch b, folglich den analogen von y durch $\frac{1}{m} b$, vor; so wird man, damit letzterer mit dem größten Werthe von y in (ν) übereinstimme, die Relation:

$$a = \frac{1}{m} b , \text{ oder } b = ma$$

haben, und folgendes bestimmte Doppelintegrale:

$$\int_0^{ma} \int_0^{\frac{1}{m}x} \varphi(x, y)\, dy\, dx ,$$

wird die Lösung des zuletzt erwähnten entgegengesetzten Falles vorstellen. Aus Gründen, ähnlich denen, so auf die Gleichung (ϑ) in Nr. 433 oder auf die Gleichung (λ) Nr. 435 geführt, wird man auch folgende Gleichung haben:

$$\int_0^a \int_0^{my} \varphi(x, y)\, dx\, dy + \int_0^{ma} \int_0^{\frac{x}{m}} \varphi(x, y)\, dy\, dx = \int_0^{ma} \int_0^a \varphi(x, y)\, dy\, dx, \qquad (\pi)$$

mittelst der die oben angedeutete Umsetzung des vorgelegten Doppelintegrals in (ν) bewirkt werden kann.

Wird nämlich das zweite Glied linkerhand auf die entgegengesetzte Seite gebracht, so hat man:

$$\int_0^a \int_0^{my} \varphi(x, y)\, dx\, dy = \int_0^{ma} \int_{\frac{x}{m}}^a \varphi(x, y)\, dy\, dx , \qquad \text{(VI)}$$

welche die verlangte Gleichung ist.

Eine mit dieser gleichbedeutende Gleichung erhält man, wenn in der vorhergehenden Gleichnng ($\pi$) das erste Glied linkerhand auf die entgegengesetzte Seite gebracht, und in dem Doppelintegrale rechterhand die Ordnungsfolge der partiellen Integrationen vertauscht wird. Diese ist:

$$\int_0^{ma}\int_0^{\frac{x}{m}} \varphi(x,y)\,dy\,dx = \int_0^{a}\int_{my}^{ma} q(x,y)\,dx\,dy\,. \qquad \text{(VII)}$$

Aus derselben Gleichung ($\pi$) zieht man auch eine zur Darstellung continuirlicher Functionen einer allgemeinen Größe durch bestimmte Doppelintegralien. — Wird nämlich in derselben a unendlich groß-werdend festgestellt, so erhält man:

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} q(x,y)\,dy\,dx = \int_0^{\infty}\int_0^{my} q(x,y)\,dx\,dy + \int_0^{\infty}\int_0^{\frac{x}{m}} q(x,y)\,dy\,dx$$

in welcher m nothwendig eine reelle positive Zahl vorstellt; trifft man hier die Annahme:

$$q(x,y) = F(y)\ \mathrm{Cos.}x(z-y)\,,$$

so hat man, nach Gleichung (VII) der Nr. 391, die Gleichheit:

$$F(z) = \tfrac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} F(y)\ \mathrm{Cos.}x(z-y)\ dy\ dx\,,$$

für alle angebbaren positiven Werthe von z, wenn nämlich die Function F(z) für dieselben Werthe von z continuirlich ist; hingegen hat man nach den Gleichungen (VIII) derselben citirten Nr., für $z = 0$, die Bestimmungsgleichung:

$$F(0) = \tfrac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} F(y)\ \mathrm{Cos.}xy\ dy\,dx\,.$$

Dieses vorausgesetzt, erhält man folgende drei Gleichungen:

$$F(z) = \tfrac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{my} F(y)\,\mathrm{Cos.}x(z-y)\,dx\,dy + \tfrac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{m} F(y)\,\mathrm{Cos.}x(z-y)\,dy\,dx\,,$$

$$F(0) = \tfrac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{my} F(y)\ \mathrm{Cos.}\,xy\ dx\,dy + \tfrac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\frac{x}{m}} F(y)\,\mathrm{Cos.}xy\ dy\,dx\,,$$

$$0 = \int_0^{\infty}\int_0^{my} F(y)\,\mathrm{Cos.}x(z+y)\,dx\,dy + \int_0^{\infty}\int_0^{\frac{x}{m}} F(y)\,\mathrm{Cos.}x(z+y)\,dy\,dx\,,$$

wo die Größe z in der ersten sowohl als in der letzten nur positive und von Null verschiedene Werthe vorstellen darf.

Vollzieht man in den ersten Theilen zur Rechten der Gleichheitszeichen die Integrationen nach x, so erhält man auch:

$$F(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty F(y)\,\frac{\mathrm{Sin.my(z-y)}}{z-y}\,dy + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^{\frac{x}{m}} F(y)\mathrm{Cos.x(z-y)}\,dy\,dx\,,$$

$$F(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F(y)\,\frac{\mathrm{Sin.my^2}}{y}\,dy + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^{\frac{x}{m}} F(y)\,\mathrm{Cos.xy}\,dy\,dx\,,$$

$$0 = \int_0^\infty F(y)\,\frac{\mathrm{Sin.my(z+y)}}{z+y}\,dy + \int_0^\infty\int_0^{\frac{x}{m}} F(y)\,\mathrm{Cos.x(z+y)}\,dy\,dx\,,$$

die, wie die vorhergehenden, für positive nicht Null werdende Werthe von z identisch bestehen, und in welchen für m jeder reelle nicht negative Zahlenwerth gesetzt werden darf; für $m = 0$ werden diese Ergebnisse durch das in Nr. 391 aufgestellte und begründete Theorem verificirt.

438. Wir wenden uns nunmehr den dreifachen Integralien dreier Variabeln zu, die wir in vorliegender und den folgenden Nrn. analogen Betrachtungen unterziehen werden, als wir solches bis anher mit den Doppelintegralien gethan.

Wenn im dreifachen Integralausdrucke:

$$\int\int\int q(x, y, z)\,dz\,dy\,dx$$

zuerst die Integration partiell nach z innerhalb veriabler Grenzen vollzogen werden soll, z. B.

$$\text{von } z = f(x, y) \text{ bis } z = f'(x, y)\,,$$

wo $f(x,y)$ und $f'(x,y)$ beliebige Functionen von x und y vorstellen; wenn hierauf das so gewonnene Ergebniß partiell nach y, gleichfalls innerhalb variabler Grenzen, z. B.

$$\text{von } y = X \text{ bis } y = X'\,,$$

wo X und X′ beliebige Functionen von x vorstellen, integrirt werden soll; wenn endlich von diesem Ergebnisse, das noch eine

Differenzialfunction von x sein wird, die Integralfunction innerhalb constanter Grenzen, z. B.

$$\text{von } x = a \text{ bis } x = A ,$$

herzustellen ist, d. h. wenn man eine Größe u aus folgender Gleichung:

$$u = \int_a^A \int_X^{X'} \int_{f(x,y)}^{f'(x,y)} \varphi(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

zu bestimmen hat; — so kann man die variabeln Integrationsgrenzen, durch Aenderung der Differenzialfunction, in constante umsetzen, wodurch die Bestimmung von u auf die eines in den Nrn. 325—335 behandelten dreifachen Integralausdruckes zurückgebracht, und auf welchen dann alle daselbst gemachten Mittheilungen ihre ungeschmälerte Anwendung finden.

Eine Art besagte Umsetzung zu bewerkstelligen ist folgende.

Zuerst ersetze man

$$z \text{ durch } \tfrac{1}{2}\{f'(x, y) + f(x, y)\} + \tfrac{1}{2}\{f'(x, y) - f(x, y)\}\, z ,$$

und folglich

$$dz \text{ durch } \tfrac{1}{2}\{f'(x, y) - f(x, y)\}\, dz ;$$

führt man nun zur Vereinfachung der Darstellung die Gleichungen ein:

$$\psi(x, y) = f'(x, y) - f(x, y) ,$$
$$\psi'(x, y) = f'(x, y) + f(x, y) ,$$

so stellt sich zunächst auch folgende Bestimmungsgleichung für u heraus:

$$u = \tfrac{1}{2} \int_a^A \int_X^{X'} \int_{-1}^{+1} \varphi\{x, y, \tfrac{1}{2}\psi'(x, y) + \tfrac{1}{2}\psi(x, y)z\}\psi(x, y)\, dz\, dy\, dx ,$$

aus der, da nunmehr die auf z Bezug habenden Integrationsgrenzen constant und, wie schon bis jetzt vorausgesetzt ward, die auf y bezüglichen Integrationsgrenzen von z unabhängig sind, die folgende gezogen wird:

$$u = \tfrac{1}{2} \int_a^A \int_{-1}^{+1} \int_X^{X'} \varphi\{x, y, \tfrac{1}{2}\psi'(x, y) + \tfrac{1}{2}\psi(x, y)z\}\psi(x, y)\, dy\, dz\, dx ,$$

die auch mit der folgenden gleichbedeutend ist:

$$u = \tfrac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{a}^{A} \int_{X}^{X'} \varphi\{x, y, \tfrac{1}{2}\psi'(x, y) + \tfrac{1}{2}\psi(x, y)z\}\, \psi(x, y)\, dy\, dx\, dz\,.$$

Behandelt man nun das Doppelintegrale in Bezug auf y und x, nämlich:

$$\int_{a}^{A} \int_{X}^{X'} \varphi\{x, y, \tfrac{1}{2}\psi'(x, y) + \tfrac{1}{2}\psi(x, y)z\}\, \psi(x, y)\, dy\, dx\,,$$

gleichwie das analoge in (1) der Nr. 426, d. h. läßt man hier

$$y \text{ in } \tfrac{1}{2}(X' + X) + \tfrac{1}{2}(X' - X)\, y$$

übergehen; dann erhält man auch für dasselbe eine, mit der in Gleichung (2) dieser citirten Nr. dargestellten, ganz analoge Umformung, welche in die vorhin für u aufgestellte Bestimmungsgleichung eingesetzt, diese Größe u von der Ausmittelung eines dreifachen Integrals der Form:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{a}^{A} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

abhängig herausstellt, das, wie wir uns vorgesetzt, in Bezug auf sämmtliche Integrationsvariabeln mit constanten Integrationsgrenzen versehen ist.

439. Zur Erläuterung des in vorhergehender Nr. mitgetheilten allgemeinen Verfahrens legen wir uns folgenden dreifachen Integralausdruck:

$$u = \int_{0}^{a} \int_{0}^{b\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^m\right]^{\frac{1}{n}}} \int_{0}^{c\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^m-\left(\frac{y}{b}\right)^n\right]^{\frac{1}{p}}} q(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

zur Umformung in einen mit constanten Integrationsgrenzen versehenen aequivalenten und analogen vor.

Vergleicht man diesen Integralausdruck mit dem allgemeinen vorhergehender Nr., so hat man daselbst:

a durch 0, A durch a, X durch 0, X′ durch $b\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^m\right]^{\frac{1}{n}}$,

f(x, y) durch 0 und f′(x, y) durch $c\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^m-\left(\frac{y}{b}\right)^n\right]^{\frac{1}{p}}$

zu ersetzen; dadurch geht eine der daselbst aufgestellten Gleichungen

in folgende über:

$$u = \frac{c}{2}\int_{-1}^{+1} v\,dz\,,$$

wo man:

$$v = \int_0^{a}\int_0^{b\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^m\right]^{\frac{1}{n}}} \varphi\left\{x, y, \tfrac{1}{2}c(1+z)\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^m-\left(\frac{y}{b}\right)^n\right]^{\frac{1}{p}}\right\}\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^m-\left(\frac{y}{b}\right)^n\right]^{\frac{1}{p}} dy\,dx$$

hat. Behandelt man den letztern Doppelintegralausdruck nach Nr. 427, II., führt die so für v gewonnene Bestimmung in die vorausgehende u darstellende Gleichung ein, ersetzt dann endlich z durch $2z-1$; so ergiebt sich folgende Bestimmungsgleichung für u:

$$u = abc\int_0^1\int_0^1\int_0^1 F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz\,,$$

wo man:

$$F(x, y, z) = \varphi\left\{ax, by(1-x^m)^{\frac{1}{n}}, cz(1-x^m)^{\frac{1}{p}}(1-y^n)^{\frac{1}{p}}\right\}(1-x^m)^{\frac{1}{n}+\frac{1}{p}}(1-y^n)^{\frac{1}{p}}$$

hat.

Wird hier noch die besondere Verfügung:

$$q(x,y,z) = x^{\alpha-1}y^{\beta-1}z^{\gamma-1}$$

getroffen, so ist:

$$u = a^\alpha b^\beta c^\gamma \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x^m)^{\frac{\beta}{n}+\frac{\gamma}{p}}\,dx \times \int_0^1 y^{\beta-1}(1-y^n)^{\frac{\gamma}{p}}\,dy \times \int_0^1 z^{\gamma-1}\,dz\,;$$

vollzieht man die angezeigten Integrationen wie bei dem analogen Falle in Nr. 427, II., so ergiebt sich alsbald:

$$u = \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{mnp}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{m}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{n}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{p}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}+\frac{\gamma}{p}\right)}\,,$$

d. h. man erhält folgende Integralbestimmung:

$$\int_0^a \int_0^{b\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^m\right]^{\frac{1}{n}}} \int_0^{c\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^m-\left(\frac{y}{b}\right)^n\right]^{\frac{1}{p}}} x^{\alpha-1}\, y^{\beta-1}\, z^{\gamma-1}\, dz\, dy\, dx =$$

$$= \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{m\,n\,p} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{m}\right)\,\Gamma\left(\frac{\beta}{n}\right)\,\Gamma\left(\frac{\gamma}{p}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}+\frac{\gamma}{p}\right)}, \qquad \text{(b)}$$

für alle reellen positiven Werthe von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, m, n und p; welche Gleichung zu der in (a) Nr. 427 analog und, gleichwie diese, zur Darstellung des am Eingange vorgelegten dreifachen Integralausdruckes benutzt werden kann, wenn die Function $\varphi(x, y, z)$ daselbst eine Entwickelung nach aufsteigenden Potenzen von x, y, z gestattet.

440. Auf dreifache Integralien dreier Variabeln mit variabeln Integrationsgrenzen hat man jene Probleme jedesmal zurückzubringen, die denen auf zwei Variabeln bezüglichen, in Nr. 428 näher bezeichnet wordenen, ganz analog sind. Mit der Vorführung und Lösung eines solchen Problems, wie auch mit der Reduction des dabei sich ergebenden dreifachen Integrals in ein aequivalentes mit constanten Integrationsgrenzen versehenes, befassen wir uns noch in vorliegender Nr.

Man bestimme das dreifache Integrale:

$$\int\int\int \varphi(x, y, z)\, dz\, dy\, dx,$$

als dreifache Summe jener reellen Werthe von x, y und z, die in die Function:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

gesetzt, derselben, Null mitbegriffen, reelle Resultate mit negativen Zeichen beilegen.

Die Lösung dieses Problems verlangt die Angabe jener reellen Werthe von x, y und z, die folgender Ungleichheit und Gleichheit:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \leqq 0,$$

welche mit folgender gleichbedeutend ist:

$$\frac{z^2}{c^2} \leqq 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \qquad (\varrho)$$

genügen. Setzen wir auch die Buchstabengrößen a, b, c reell voraus, so kann der eben gestellten Anforderung nur dann entsprochen werden, wenn die Variabeln x und y folgender Anforderung:

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \geqq 0 ,$$

die mit folgender:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leqq 0 \qquad (\sigma)$$

gleichbedeutend ist, nachkommen; nun haben wir in Nr. 429 die Werthe von x und y bereits fixirt, die dieser letztern Anforderung entsprechen, nämlich die von x erstrecken sich über alle, so innerhalb der Grenzen:

$$- a \text{ und } + a ,$$

diese mitbegriffen, enthalten sind, und die von y umfassen alle innerhalb der Grenzen:

$$- b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \text{ und } + b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

enthaltenen Werthe, dieselben mitbegriffen, die jedem der eben für x fixirten Werthe entsprechen: daher wird, wenn durch $x_1$ und $y_1$ ein der Anforderung in $(\sigma)$ entsprechendes zusammengehörendes Werthenpaar von x und y vorgestellt wird, der uns gesetzten Anforderung in $(\varrho)$ entsprochen, wenn man der Variabeln z sämmtliche Werthe von und mit:

$$- c\sqrt{1-\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}} \text{ bis und mit } + c\sqrt{1-\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}}$$

beilegt. — Dieses vorausgesetzt, stellt sich folgende Lösung des uns gesetzten Problems heraus: Die Variable z umfaßt sämmtliche Werthe:

$$\text{von } z = - c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \text{ bis } z = + c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} ,$$

die Variable y beschlägt in diesen Ausdrücken sämmtliche Werthe:

$$\text{von } y = - b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \text{ bis } y = + b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} ,$$

in welchen endlich die Variable x sämmtliche Werthe:

$$\text{von } x = -a \text{ bis } x = +a$$

durchläuft; d. h. das vorgelegte dreifache Integrale ist zuerst partiell nach z innerhalb der für z angewiesenen Grenzen zu integriren, hierauf ist das Ergebniß partiell nach y gleichfalls innerhalb der eben für diese Variable festgestellten Grenzen zu integriren, worauf dann endlich die Integration nach x von $x = -a$ bis $x = +a$ zu vollziehen ist. Stellt man sonach die verlangte dreifache Summe durch u vor, so hat man:

$$u = \int_{-a}^{+a} \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{+c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} q(x, y, z)\, dz\, dy\, dx\,, \qquad (t)$$

welche Gleichung die Lösung des uns gesetzten Problems von der eines dreifachen Integrals mit variabeln Integrationsgrenzen abhängig herausstellt.

Zur Umformung dieses dreifachen Integrals in ein analoges und aequivalentes, aber mit constanten Integrationsgrenzen versehenes, verfahren wir nach den allgemein gehaltenen Mittheilungen der zweitvorangehenden Nr. — Wird zuerst

$$z \text{ in } cz\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

umgesetzt, so erhalten wir:

$$u = c\int_{-1}^{+1} \int_{-a}^{+a} \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} q\left(x, y, cz\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right)\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\, dy\, dx\, dz\,;$$

wird hier ferner:

$$y \text{ durch } by\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,,$$

und hierauf dann x durch ax ersetzt; — so stellt sich zuletzt folgende Bestimmungsgleichung für u heraus:

$$u = abc \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \varphi(ax, by\sqrt{1-x^2}, cz\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})(1-x^2)\sqrt{1-y^2}\,dxdydz, \quad (D)$$

die die vollständige Lösung des uns am Eingange gesetzten Problems vorstellt.

441. Von den Ergebnissen der vorausgehenden Nr. wollen wir hier noch einige Anwendungen, unter besondern Verfügungen über die Natur der Function $\varphi(x, y, z)$, mittheilen.

I. Für die erste besondere Annahme:

$$\varphi(x, y, z) = (xyz)^0 = 1 ,$$

bietet die allgemeine Gleichung (D) folgende Bestimmung für u dar:

$$u = abc \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} (1-x^2)\sqrt{1-y^2}\,dx\,dy\,dz ;$$

vollzieht man die Integration zur Rechten, so erhält man:

$$u = \frac{4}{3}abc\,\pi ,$$

welcher Ausdruck der räumliche Gehalt eines dreiachsigen Ellipsoids vorstellt, dessen drei Achsen durch:

$$2a , \quad 2b , \quad 2c$$

vorgestellt sind.

II. Für eine zweite besondere Annahme, sei:

$$\varphi(x, y, z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 ,$$

wo $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ constante Größen sind.

Die allgemeine Gleichung (D) geht in folgende über:

$$u = abc \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} U(1-x^2)\sqrt{1-y^2}\,dx\,dy\,dz ,$$

wo wir:

$$U = \alpha a^2x^2 + \beta b^2(1-x^2)y^2 + \gamma c^2(1-x^2)(1-y^2)z^2$$

gesetzt haben. Diese Bestimmungsgleichung für u ist auch mit folgender gleichbedeutend:

$$u = 8abc \int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} U(1-x^2)\sqrt{1-y^2}\,dz\,dx\,dy ;$$

integrirt man hier nach z, so hat man:

$$u = 8\alpha a^3bc \int_0^1 \int_0^1 x^2(1-x^2)\sqrt{1-y^2}\,dx\,dy$$

$$+ 8\beta ab^3c \int_0^1 \int_0^1 (1-x^2)^2 y^2 \sqrt{1-y^2}\,dx\,dy$$

$$+ \frac{8}{3}\gamma abc^3 \int_0^1 \int_0^1 (1-x^2)^2 (1-y^2)\sqrt{1-y^2}\,dx\,dy;$$

wird hier ferner nach x integrirt, so ergiebt sich die Bestimmungsgleichung:

$$u = \frac{16}{15}\alpha a^3bc \int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy + \frac{64}{15}\beta ab^3c \int_0^1 y^2\sqrt{1-y^2}\,dy$$

$$+ \frac{64}{45}\gamma abc^3 \int_0^1 (1-y^2)\sqrt{1-y^2}\,dy,$$

die mit folgender gleichbedeutend ist:

$$u = \frac{16}{15} abc\,(\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2) \int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy;$$

vollzieht man endlich die Integration nach y: so stellt sich folgende Bestimmung für u heraus:

$$u = \frac{4}{15} abc\,\pi\,(\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2).$$

Wird hier erstens $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, zweitens $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, dann drittens $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$ angenommen; so erhält man in derselben Ordnung die Trägheitsmomente desselben dreiachsigen Ellipsoids in Bezug auf die drei Hauptachsen 2a, 2b, 2c desselben, wenn dessen Dichte constant und der Einheit gleich vorausgesetzt wird.

III. Für eine dritte besondere Annahme endlich, sei:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(\alpha-x)^2 + (\beta-y)^2 + (\gamma-z)^2}},$$

wo $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ constante reelle Größen sind, die positiv, negativ und auch

unendlich kleinwerdend sein können, so bietet die allgemeine Gleichung (D) folgende Bestimmung für u dar:

$$u = abc \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)\sqrt{1-y^2}\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{\{(\alpha-ax)^2+(\beta-by\sqrt{1-x^2})^2+(\gamma-cz\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})^2\}}} . \quad (1)$$

Die ersten partiellen Differenzialquotienten der hier dargestellten Größe u nach den Größen $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ genommen und mit entgegengesetzten Zeichen versehen, stellen die nach den Richtungen der drei Hauptachsen zerlegte Anziehungskraft des in Rede stehenden Ellipsoids (wenn nämlich das allgemein anerkannte Gravitationsgesetz zu Grunde gelegt wird) auf eine Masseneinheit vor, welche in einem Punkte concentrirt vorausgesetzt ist, dessen Coordinaten, wenn auf dieselben Achsen als das Ellipsoid bezogen, $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ sind.

Mit der Reduction dieses dreifachen Integrals in ein einfaches bestimmtes Integrale, wenn über $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ keine specielle Verfügung getroffen wird, werden wir uns in den folgenden Nrn. befassen, wobei wir uns jedoch auf die Bestimmung von u hingewiesen sehen werden, wenn man für $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ Nullwerthe festsetzt; und da die eben aufgestellte Gleichung, bei dieser speciellen Verfügung über $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, sehr bald zur Kenntniß von u (durch ein einfaches bestimmtes Integrale ausgedrückt) führt; — so befassen wir uns noch in vorliegender Nr. damit, nämlich, mit der Reduction des Werthes von u auf ein einfaches bestimmtes Integrale, wenn man $\alpha = 0$, $\beta = 0$ und $\gamma = 0$ voraussetzt.

Stellt man durch $u_0$ den Werth von u aus der oben aufgestellten Gleichung (1) vor, wenn man über $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, wie eben erwähnt wurde, verfügt; so hat man:

$$u_0 = abc \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)\sqrt{1-y^2}\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2(1-x^2)+c^2z^2(1-x^2)(1-y^2)}} ,$$

welche mit folgender gleichbedeutend ist:

$$u_0 = 8abc \int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} \frac{(1-x^2)\sqrt{1-y^2}\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2(1-x^2)+c^2z^2(1-x^2)(1-y^2)}} . \quad (2)$$

Vergleicht man dieses bestimmte dreifache Integrale mit dem viel allgemeinern in Nr. 333 behandelten, so wird das gegenwärtig in Rede stehende aus dem citirten gewonnen, wenn in demselben x mit z vertauscht, dann $a=0$, $b=0$, $c=0$ angenommen wird, und endlich $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ der Reihe nach durch c, b, a ersetzt werden; nimmt man nun diese Umsetzungen mit den Gleichungen (e) und (f) der citirten Nr. 333 vor, so hat man:

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-x^2)\sqrt{1-y^2}\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2(1-x^2)+c^2z^2(1-x^2)(1-y^2)}}=\frac{1}{abc}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{M} w\,\mathrm{Sin.u}\,dw\,dv\,du\,,$$

wo der Kürze wegen:

$$M=\frac{1}{\sqrt{\frac{\mathrm{Sin.u^2Sin.v^2}}{c^2}+\frac{\mathrm{Sin.u^2Cos.v^2}}{b^2}+\frac{\mathrm{Cos.u^2}}{a^2}}}$$

gesetzt wurde. Vollzieht man nun rechterhand die Integration nach w und führt dann das gewonnene Ergebniß in die Gleichung (2) ein; so hat man folgende Bestimmungsgleichung für $u_0$:

$$u_0=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{Sin.u}\,dv\,du}{\frac{\mathrm{Cos.u^2}}{a^2}+\frac{\mathrm{Sin.u^2Cos.v^2}}{b^2}+\frac{\mathrm{Sin.u^2Sin.v^2}}{c^2}}\,,$$

oder auch folgende:

$$u_0=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{\left(\frac{\mathrm{Cos.u^2}}{a^2}+\frac{\mathrm{Sin.u^2}}{c^2}\right)-\left(\frac{\mathrm{Sin.u^2}}{c^2}-\frac{\mathrm{Sin.u^2}}{b^2}\right)\mathrm{Cos.v^2}}\right\}\mathrm{Sin.u}\,du\,.$$

Vollzieht man die inner den Klammern angezeigte Integration mittelst der ersten oder der letzten der in Nr. 78 des ersten Bandes unter (130) zusammengefaßten drei Gleichungen, und zwar mittelst der ersten, wenn man $c<b$ annimmt, und mittelst der letzten bei der entgegengesetzten Annahme; so gelangt man auf folgende Bestimmungsgleichung für $u_0$:

$$u_0=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{Sin.u}\,du}{\sqrt{\frac{\mathrm{Cos.u^2}}{a^2}+\frac{\mathrm{Sin.u^2}}{b^2}}\sqrt{\frac{\mathrm{Cos.u^2}}{a^2}+\frac{\mathrm{Sin.u^2}}{c^2}}}\,, \qquad (2')$$

oder auch, wenn im bestimmten Integrale rechterhand

$$\text{Tang.u} = \frac{\sqrt{w}}{a}$$

angenommen wird, auf folgende:

$$u_0 = \pi \int_0^\infty \frac{dw}{\sqrt{1+\frac{w}{a^2}}\sqrt{1+\frac{w}{b^2}}\sqrt{1+\frac{w}{c^2}}}, \qquad (2'')$$

welche, gleichwie die vorausgehende (2'), den Werth von $u_0$, wie wir oben behauptet haben, nur noch von dem Werthe eines einfachen bestimmten Integrals abhängig darstellt.

**442.** Nach einer höchst genialen Bemerkung von Dirichlet läßt sich die durch die allgemeine Gleichung (D) Nr. 440 dargestellte Größe u durch ein vierfaches bestimmte Integrale darstellen; dieses kann in gar vielen Fällen, zu denen auch der in III. vorangehender Nr. besprochene allgemeine Fall der Gleichung (1) gehört, in ein fünffaches bestimmte Integrale umgesetzt werden; welches letztere dann durch eine Vertauschung der Ordnungsfolge der partiellen Integrationen, in den meisten Fällen und auch in dem eben erwähnten Falle vorangehender Nr., auf ein einfaches bestimmte Integrale einer Variabeln zurückgebracht werden kann.

Das Wesen dieser Bemerkung stützt sich auf die Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin.}\alpha v}{v}\, dv = \pm \tfrac{\pi}{2},$$

die wir in Nr. 388 (Gl. 6) begründet haben, in der das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem $\alpha$ eine positive oder eine negative reelle und angebbare Zahl vorstellt. — Bedenkt man nämlich die Gleichheit:

$$\text{Sin.v Cos.g v} = \tfrac{1}{2}\,\text{Sin.}(1-g)v + \tfrac{1}{2}\,\text{Sin.}(1+g)v,$$

vermöge welcher man:

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin.v}}{v}\,\text{Cos.gv}\,dv = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\text{Sin.}(1-g)\,v}{v}\,dv + \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\text{Sin.}(1+g)v}{v}\,dv$$

hat: so bietet die oben zu Grunde gelegte Gleichung, erstens:

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin.v}}{v}\,\text{Cos.g v}\,dv = 0,$$

für sämmtliche reellen Werthe von g dar, die numerisch die Einheit übertreffen; zweitens hat man:

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin.v}}{\text{v}} \text{Cos.g v dv} = \tfrac{\pi}{2},$$

wenn der numerische Werth der reellen Größe g um ein Angebbares von der Einheit übertroffen wird; endlich hat man drittens:

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin.v}}{\text{v}} \text{Cos.g v dv} = \tfrac{\pi}{4},$$

wenn der numerische Werth der reellen Größe g entweder gleich der Einheit oder um eine unendlich kleinwerdende Größe von derselben abweicht. Hieraus folgt nun daß der Integralausdruck:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Sin.v}}{\text{v}} \text{Cos.}[f(x, y, z, \ldots)\, v]\, dv, \qquad \text{(VIII)}$$

in welchem $f(x,y,z,..)$ irgend eine Function von $x,y,z,..$ vorstellt, für alle Werthe von x, y, z, . . ., für welche $f(x,y,z,..)<1$ ist, die Einheit vorstellt, für Werthe von x, y, z, . . ., die $f(x,y,z,...)=1$ geben, die Hälfte der Einheit oder $\frac{1}{2}$ vorstellt, und endlich für Werthe von x, y, z, . . . die $f(x,y,z,...)>1$ herausstellen, jedesmal in Null übergeht.

Diese folgenreiche Bemerkung ist es nun, von der wir am Eingange dieser Nr. gesprochen und die wir auf den in Rede stehenden Fall der Nr. 440 und hierauf dann auf den besondern Fall desselben, III. vorhergehender Nr., in den folgenden Nrn. zur Anwendung bringen werden.

443. Hat man, wie solches in Nr. 440 verlangt worden ist, das dreifache Integrale:

$$\int\int\int q(x, y, z)\, dz\, dy\, dx,$$

dasselbe als dreifache Summe aufgefaßt, über jene reellen Werthe von x, y und z auszudehnen, für welche die Function:

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

sowohl kleiner, als auch gleich der reellen und positiven Einheit ver-

bleibt, und bezeichnet man durch u den Werth desselben; so hat man, vermöge der Bedeutung des Ausdruckes in (VIII) vorangehender Nr., folgende Bestimmungsgleichung für u:

$$u=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{0}^{\infty}\mathrm{Cos.}\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)v\right]\frac{\mathrm{Sin.}\,v}{v}\,dv\right\}\varphi(x,y,z)\,dz\,dy\,dx+R,\quad(\iota')$$

wo die beigesetzte Größe R, über deren Bestimmung wir uns sofort aussprechen werden, in den meisten Fällen eine unendlich kleinwerdende Größe vorstellt, und sonach alsdann auch unbeachtet oder vernachläßiget werden darf. — Vermöge der Eigenthümlichkeit des citirten Ausdruckes in (VIII) geht nämlich, in dieser Bestimmungsgleichung für u, der inner den Klammern enthaltene Integralusdruck in Null über, wenn x, y, z Werthe annehmen, die der Ungleichheit:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}>1$$

entsprechen; derselbe Ausdruck stellt aus gleichem Grunde den Werth $\frac{\pi}{2}$, daher mit $\frac{2}{\pi}$ multiplicirt, die positive Einheit dar, wenn die Werthe von x, y, z in demselben folgender Ungleichheit

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}<1$$

genügen; multiplicirt man ferner denselben Ausdruck mit $\frac{2}{\pi}$, so bietet solcher den Werth $\frac{1}{2}$ dar, wenn die Werthe von x, y, z folgender Gleichung gemäß:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

bestimmt werden. Nun erscheint besagter Ausdruck in der That mit $\frac{2}{\pi}$ und überdieß noch mit:

$$q(x, y, z)\ dz\ dy\ dx$$

multiplicirt, wo vermöge der beigesetzten Integrationsgrenzen der Variabeln x, y und z dieselben sämmtliche reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen; — daher wird die Summe aller dieser Produkte den Werth des dreifachen Integrals:

$$\int\int\int q(x, y, z)\ dz\ dy\ dx\ ,$$

über alle Werthe von x, y und z ausgedehnt darstellen, die der Ungleichheit:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1$$

genügen, und überdieß noch die Hälfte desselben dreifachen Integrals, wenn in demselben die Variabeln alle Werthe, die der Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

entsprechen, durchlaufen. Wir haben aber in Nr. 440 unter u den Werth desselben dreifachen Integrals vorgestellt, wenn in demselben x, y und z sämmtliche Werthe durchlaufen, die folgender Ungleichheit und Gleichheit:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqq 1$$

genügen: — sonach ergiebt sich für R folgende Bestimmungsgleichung:

$$R = \tfrac{1}{2} \int\int\int q(x, y, z)\ dz\ dy\ dx\ ,$$

wo die dreifache Integration über alle Werthe von x, y und z sich erstreckt, die der Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

genügen, d. h. in der Differenzialfunction:

$$q(x, y, z)\ dz\ dy\ dx\ ,$$

hat man für x, y und z alle Werthe zu setzen, die der eben aufgestellten Gleichung ein Genüge thun, und die halbe Summe aller dieser Ergebnisse stellt dann den Werth von R in der obigen u darstellenden Gleichung $(\tau')$ vor.

Man wird also, wenn:

$$dx = \omega\ ,\quad dy = \omega'\ ,\quad dz = \omega''$$

gesetzt wird, durch Differenziation der obigen Gleichung zwischen x, y und z folgenden Zusammenhang unter diesen unendlichklein werdenden Größen haben:

$$\frac{x}{a^2}\omega + \frac{y}{b^2}\omega' + \frac{z}{c^2}\omega'' = 0\ ,$$

aus welchem

$$\omega'' = -\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z}\omega - \frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z}\omega'$$

gezogen wird; führt man diese Bestimmung für $\omega''$ in die Differenzialfunction:

$$\tfrac{1}{2}\,\varphi(x,y,z)\,dz\,dy\,dx \text{ oder } \tfrac{1}{2}\,\varphi(x,y,z)\,\omega''\,\omega'\,\omega$$

ein, wodurch dieselbe in:

$$-\tfrac{1}{2}\,\varphi(x,y,z)\left\{\frac{c^2}{a^2}\,\frac{x}{z}\,\omega\,\omega\,\omega' + \frac{c^2}{b^2}\,\frac{y}{z}\,\omega\,\omega'\,\omega'\right\}$$

übergeht, so wird man, nach dem man noch z als Function von x und y mittelst der obigen Gleichung ersetzt haben wird, diesen Ausdruck in Bezug auf jene Werthe von x und y zu summiren oder zu integriren haben, die folgender Anforderung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1$$

nachkommen, d. h. man hat:

$$R = -\tfrac{1}{2}\frac{c^2}{a^2}\omega\int\int\varphi(x,y,z)\frac{x}{z}\,dy\,dx - \tfrac{1}{2}\frac{c^2}{b^2}\omega'\int\int\varphi(x,y,z)\frac{y}{z}\,dy\,dx, \quad (v)$$

wo die Doppelintegralien, nach dem aus denselben z mittelst der Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

eliminirt worden ist, über jene Werthe von x und y sich erstrecken, die der Bedingung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1$$

nachkommen. Nun sind diese Doppelintegralien, mit den unendlich kleinwerdenden Faktoren $\omega$ und $\omega'$ zu multipliciren; — daher wird, wenn besagte Doppelintegralien in die Klasse jener fallen, die wir in Nr. 314 als Repräsentanten mathematischer Größen erklärt haben, die Größe R in der obigen u darstellenden Gleichung vernachläßiget werden dürfen; im entgegengesetzten Falle aber wird R eine unbestimmte Größe vorstellen, in welchem Falle die obige Gleichung $(\tau')$, als durchaus unbrauchbar zur Darstellung der Größe u erklärt werden muß. Sehen wir also von dem letztern dieser Fälle ab: so geht die obige Gleichung $(\tau')$ über in:

$$u = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty}\varphi(x,y,z)\,\mathrm{Cos.}\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)v\right]\frac{\mathrm{Sin.}\,v}{v}\,dv\,dz\,dy\,dx,$$

die auch mit folgender gleichbedeutend ist:

$$u=\frac{2abc}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty}\varphi(ax,by,cz)\,\mathrm{Cos.}[(x^2+y^2+z^2)v]\frac{\mathrm{Sin.}v}{v}\,dv\,dz\,dy\,dx,\ (D')$$

die, wie vorhin gezeigt wurde, insofern die Lösung des am Eingange vorliegender Nr. oder des in Nr. 440 uns gesetzten Problems darstellt, als die Doppelintegralien in der obigen Gleichung $(v)$, in der oben beschriebenen Weise als Doppelsummen aufgefaßt, Repräsentanten mathematischer Größen sind. Dieses trifft, wie bei so mancher andern Annahme, auch bei der:

$$\varphi(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{(\alpha-x^2)+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2}}$$

ein, welche Annahme den in Nr. 441 unter III. behandelten Fall beschlägt, mit welchem, wie wir daselbst angekündiget haben, wir uns in den folgenden Nrn. näher befassen werden.

444. Wird in der allgemeinen Gleichung (D′) vorangehender Nr. über die Function $\varphi(x,y,z)$ in der Ausgangs derselben Nr. erwähnter Weise verfügt; so hat man, wenn überdieß noch die Ordnungsfolge der partiellen Integrationen vertauscht wird, folgende Gleichung:

$$u=\frac{2abc}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{Cos.}[(x^2+y^2+z^2)v]}{\sqrt{(\alpha-ax)^2+(\beta-by)^2+(\gamma-cz)^2}}\frac{\mathrm{Sin.}v}{v}\,dz\,dy\,dx\,dv\ ,\ (1')$$

welche die in (1) Nr. 441 aufgestellte Gleichung ersetzt, aus der wir für u ein einfaches bestimmtes Integrale ziehen werden.

Wir haben im ersten Bande, in Nr. 166, folgende zwei Gleichungen begründet:

$$\frac{1}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{Cos.}bw}{\sqrt{w}}\,dw\ ,\quad \frac{1}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{Sin.}bw}{\sqrt{w}}\,dw,$$

die aus den Gleichungen (77) a. a. O. fließen und für alle positiven reellen, jedoch angebbaren Werthe von b bestehen; aus diesen Gleichungen zieht man auch sehr leicht die folgende:

$$\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{bw\sqrt{-1}}\frac{dw}{\sqrt{w}}\ ,$$

die, gleichwie die vorhergehenden, wenn b reell ist, nur für angebbare positive Werthe dieser Größe Bestand hat.

Setzt man nun in dieser Gleichheit:

$$b = (\alpha - ax)^2 + (\beta - by)^2 + (\gamma - cz)^2 ,$$

wo, zur Rechten vom Gleichheitszeichen, a, b, c, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ reelle Größen vorstellen, so verbleibt derselbe Ausdruck rechterhand bei jeder reellen Verfügung über x, y und z angebbar und positiv, wenn nur nicht $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ zugleich Nullwerthe annehmen; unter dieser Verfügung über $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ geht sonach die obige Gleichung (1′) in folgende über:

$$u = \frac{2abc}{\pi\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty S \frac{\text{Sin.}v}{v\sqrt{w}} \, dv \, dw ,$$

in der wir zur Vereinfachung der Darstellung:

$$S = e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{w[(\alpha-ax)^2+(\beta-by)^2+(\gamma-cz)^2]\sqrt{-1}} \text{Cos.}v(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

gesetzt haben. Umsetzt man in diesen Gleichungen w in $\frac{v}{w}$, so hat man auch:

$$u = \frac{2abc}{\pi\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty S' \frac{\text{Sin.}v}{w\sqrt{w}\sqrt{v}} \, dv \, dw , \qquad (1'')$$

und

$$S' = e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{v}{w}[(\alpha-ax)^2+(\beta-by)^2+(\gamma-cz)^2]\sqrt{-1}} \text{Cos.}v(x^2+y^2+z^2)dxdydz . \quad (3)$$

Um aus dieser Gleichung (1″) den Werth von u zu erhalten, haben wir uns zuvörderst mit der Ausmittelung der eben aufgestellten Größe S′ zu befassen, die, wie aus dem Vorausgeschickten erhellet, nothwendig einen reellen Werth darbieten muß. — Dieselbe zu bestimmen, schlagen wir das bei andern analogen Fällen mit Erfolg angewandte Verfahren ein, nämlich, wir setzen noch die Gleichung fest:

$$T' = e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{v}{w}[(\alpha-ax)^2+(\beta-by)^2+(\gamma-cz)^2]\sqrt{-1}} \text{Sin.}v(x^2+y^2+z^2)dxdydz, \quad (4)$$

wo aus gleichen Gründen auch T′ einen reellen Werth vorstellen wird, und bestimmen dann den Ausdruck:

$$S' + T' \sqrt{-1};$$

der reelle Theil dieser Bestimmung wird $S'$ und der Faktor von $\sqrt{-1}$ in derselben wird den Werth von $T'$ darbieten.

Werden nun der Kürze wegen folgende Gleichungen festgestellt:

$$A = 1 + \frac{a^2}{w}, \quad B = 1 + \frac{b^2}{w}, \quad C = 1 + \frac{c^2}{w},$$

$$D = -\frac{a\alpha}{w}, \quad E = -\frac{b\beta}{w}, \quad F = -\frac{c\gamma}{w},$$

$$G = \frac{1}{w}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2);$$

so haben wir zur Bestimmung von $S'$ und $T'$ die Gleichung:

$$S' + T' \sqrt{-1} =$$

$$= e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(Ax^2+By^2+Cz^2+2Dx+2Ey+2Fz+G)v\sqrt{-1}}\, dx\, dy\, dz, \quad (5)$$

wo, wie aus der Gleichung (1″) zu entnehmen ist, w keinen negativen Werth vorstellt, daher dann auch die Größen A, B und C reelle, angebbar positive Werthe repräsentiren.

Obgleich die dreifache Integration rechterhand dieser Gleichung sehr leicht vollzogen werden kann, ziehen wir es gleichwohl vor, dieselbe als speciellen Fall eines viel allgemeinern dreifachen Integrals anzusehen, welches wir in der folgenden Nr. uns vorlegen, und auf ein einfaches bestimmtes Integrale zurückzubringen lehren werden.

**445.** Das allgemeine dreifache Integrale, dessen Ausgangs vorhergehender Nr. Erwähnung geschah, ist folgendes:

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dx + 2Ey + 2Fz + G)\, dx\, dy\, dz,$$

wo $\varphi$ irgend ein Functionszeichen vorstellt, A, B, C, D, E, F, G reelle Constanten sind, worunter die drei erstern, nämlich:

$$A, \quad B, \quad C$$

angebbare positive Werthe repräsentiren.

Ersetzt man die Integrationsvariabeln x, y und z der Reihe nach durch:

$$x - \frac{D}{A}, \quad y - \frac{E}{B}, \quad z - \frac{F}{C},$$

so hat man, wenn auch keine der Größen D, E und F unendlich großwerdend ist, folgende:

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(Ax^2 + By^2 + Cz^2 + H)\, dx\, dy\, dz\,,$$

wo man zur Vereinfachung:

$$H = G - \frac{D^2}{A} - \frac{E^2}{B} - \frac{F^2}{C}$$

gesetzt hat; diese, die Größe U darstellende Gleichung, ist, weil in derselben die Integrationsvariabeln nur in geraden Potenzen vorkommen, mit folgender gleichbedeutend:

$$U = 8\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \varphi(Ax^2 + By^2 + Cz^2 + H)\, dx\, dy\, dz\,;$$

und da diese, wenn, wie solches am Eingange vorausgesetzt wurde, die Coefficienten A, B und C in derselben von Null verschieden und positiv sind, nach Gleichung ($\alpha$) Nr. 334, mit der folgenden:

$$U = \frac{2\pi}{\sqrt{ABC}}\int_0^{\infty} \varphi(x + H)\sqrt{x}\, dx$$

gleichbedeutend ist: so besteht folgende allgemeine Umformungsgleichung:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dx + 2Ey + 2Fz + G)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{ABC}}\int_0^{\infty} \varphi\left(x + G - \frac{D^2}{A} - \frac{E^2}{B} - \frac{F^2}{C}\right)\sqrt{x}\, dx\,, \quad \text{(IX)}$$

die bei jeder Verfügung über die Function $\varphi$, und bei der gegenwärtig festgestellten Annahme eines Reellseins der Coefficienten A, B, C D, E und F nur insofern Bestand hat, als die drei erstern, A, B und C, positiv und angebbar, und die drei letztern, D, E und F, nicht unendlich großwerdend sind.

Vermöge der Willkührlichkeit der Function $\varphi$ ist man nunmehr auch zur Aufstellung folgender Umformungsgleichung berechtiget:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\{\mu(Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dx + 2Ey + 2Fz + G)\}\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{ABC}}\int_0^{\infty} \varphi\left\{\mu\left(x + G - \frac{D^2}{A} - \frac{E^2}{B} - \frac{F^2}{C}\right)\right\}\sqrt{x}\, dx\,, \quad \text{(X)}$$

in der die Coefficienten A, B, C, . . . denselben Beschränkungen, als in der vorausgehenden Gleichung unterliegen, die Function $\varphi$ gleichfalls wie in der vorhergehenden völlig willkührlich verbleibt, und endlich $\mu$ eine willkührliche Constante vorstellt, die reell oder imaginär, positiv oder negativ u. s. w. sein kann. Von dieser Gleichung (X) werden wir bei der Umformung der Gleichung (5) vorausgehender Nr. Gebrauch machen.

446. Wird über die willkührliche Function $\varphi$ der Gleichung (X) vorhergehender Nr. dergestalt verfügt, daß für irgend eine allgemeine Größe $\xi$:

$$\varphi(\xi) = e^{\xi}$$

werde, und setzt man überdieß noch:

$$\mu = \nu\sqrt{-1};$$

so hat man, wenn A, B, C, D, E, F, G dieselben Bedeutungen, wie in der Gleichung (5) Nr. 444 haben, statt dieser Gleichung (5), die folgende:

$$S' + T'\sqrt{-1} =$$

$$= \frac{2\pi w \sqrt{w}\, e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}}{\sqrt{a^2+w}\,\sqrt{b^2+w}\,\sqrt{c^2+w}} \int_0^{\infty} e^{\left(x+\frac{\alpha^2}{a^2+w}+\frac{\beta^2}{b^2+w}+\frac{\gamma^2}{c^2+w}\right)\nu\sqrt{-1}} \sqrt{x}\,dx,$$

die mit der folgenden gleichbedeutend ist:

$$S' + T'\sqrt{-1} =$$

$$= \frac{2\pi w \sqrt{w}}{\sqrt{a^2+w}\,\sqrt{b^2+w}\,\sqrt{c^2+w}} e^{\left\{\left(\frac{\alpha^2}{a^2+w}+\frac{\beta^2}{b^2+w}+\frac{\gamma^2}{c^2+w}\right)\nu-\frac{\pi}{4}\right\}\sqrt{-1}} \int_0^{\infty} e^{\nu x\sqrt{-1}} \sqrt{x}\,dx,$$

in der also, vermöge der Deduction derselben, die Größen $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ weder zugleich unendlich kleinwerdend noch unendlich großwerdend sein dürfen. Ersetzt man aber in den Gleichheiten (1) Nr. 416

a durch $\frac{3}{2}$ und b durch $\nu$,

multiplicirt die zweite mit $\sqrt{-1}$ und nimmt dann die Summe derselben, so hat man:

$$\int_0^\infty e^{vx\sqrt{-1}}\sqrt{x}\,dx = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{v\sqrt{v}}\,e^{\frac{3\pi}{4}\sqrt{-1}},$$

oder auch, mit Beachtung der Gleichungen ($\beta$) und ($\xi$) der Nrn. 220 und 221 des ersten Bandes, die folgende:

$$\int_0^\infty e^{vx\sqrt{-1}}\sqrt{x}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2v\sqrt{v}}\,e^{\frac{3\pi}{4}\sqrt{-1}};$$

es geht demnach die vorige Gleichung über in:

$$S' + T'\sqrt{-1} = \pi\sqrt{\pi}\,\frac{w\sqrt{w}}{v\sqrt{v}}\cdot\frac{e^{\left\{\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\alpha^2}{a^2+w}+\frac{\beta^2}{b^2+w}+\frac{\gamma^2}{c^2+w}\right)v\right\}\sqrt{-1}}}{\sqrt{a^2+w}\,\sqrt{b^2+w}\,\sqrt{c^2+w}},$$

aus der:

$$S' = -\pi\sqrt{\pi}\,\frac{w\sqrt{w}}{v\sqrt{v}}\,\frac{\text{Sin.}\left(\frac{\alpha^2}{a^2+w}+\frac{\beta^2}{b^2+w}+\frac{\gamma}{c^2+w}\right)v}{\sqrt{a^2+w}\,\sqrt{b^2+w}\,\sqrt{c^2+w}}, \qquad (3')$$

$$T' = +\pi\sqrt{\pi}\,\frac{w\sqrt{w}}{v\sqrt{v}}\,\frac{\text{Cos.}\left(\frac{\alpha^2}{a^2+w}+\frac{\beta^2}{b^2+w}+\frac{\gamma^2}{c^2+w}\right)v}{\sqrt{a^2+w}\,\sqrt{b^2+w}\,\sqrt{c^2+w}} \qquad (4')$$

gefolgert wird, wo $S'$ und $T'$ die durch die Gleichungen (3) und (4) der Nr. 444 festgestellten Bedeutungen beibehalten.

Wird nun diese für $S'$ gewonnene Bestimmung in die Gleichung ($1''$) der eben citirten Nr. eingesetzt, so stellt sich folgende Bestimmungsgleichung für u heraus:

$$u = -2\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\text{Sin.}\left[v\left(\frac{\alpha^2}{a^2+w}+\frac{\beta^2}{b^2+w}+\frac{\gamma^2}{c^2+w}\right)\right]\text{Sin.}v}{\sqrt{1+\frac{w}{a^2}}\,\sqrt{1+\frac{w}{b^2}}\,\sqrt{1+\frac{w}{c^2}}}\cdot\frac{dv\,dw}{v^2},$$

die mit Ausnahme eines gleichzeitigen Bestandhabens folgender Gleichungen:

$$\alpha = 0,\quad \beta = 0,\quad \gamma = 0,$$

wie der folgenden:

$$\alpha = \infty,\quad \beta = \infty,\quad \gamma = \infty,$$

die Lösung des uns unter III. in Nr. 441 gesetzten Problems darstellt.

Wie nun weiter zu verfahren sei, um aus dieser Gleichung die

Größe u durch ein einfaches Integrale dargestellt zu bekommen, werden wir in folgender Nr. zeigen.

447. Die Ausgangs vorhergehender Nr. aufgestellte Bestimmungsgleichung für u läßt sich, wenn der Kürze wegen

$$W = \frac{\alpha^2}{a^2+w} + \frac{\beta^2}{b^2+w} + \frac{\gamma^2}{c^2+w}$$

gesetzt wird, auch folgendermaßen darstellen:

$$u = -\int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos.}(1-W)v - \mathrm{Cos.}(1+W)v}{v^2} dv \right\} \frac{dw}{\sqrt{1+\frac{w}{a^2}}\sqrt{1+\frac{w}{b^2}}\sqrt{1+\frac{w}{c^2}}}, \quad (1''')$$

aus der wir hier, nach dem wir das innerhalb der Klammern enthaltene bestimmte Integrale ermittelt haben werden, die gesuchte Größe u, durch ein einfaches bestimmtes Integrale ausgedrückt, ziehen werden.

Behufs der Ausmittelung des eben erwähnten bestimmten Integrals multipliciren wir die in Nr. 388 aufgestellte Gleichung (5) mit dp und integriren dann solche, nach dem man noch in derselben $\alpha$ in v umgesetzt hat, von $p = M$ bis $p = N$; dadurch erhalten wir zunächst die Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos.}Mv - \mathrm{Cos.}Nv}{v^2} e^{-mv} dv = \int_M^N \mathrm{Arctang.} \frac{p}{m} dp,$$

und wenn zur Rechten die Integration vollzogen wird die folgende:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos.}Mv - \mathrm{Cos.}Nv}{v^2} e^{-mv} dv =$$

$$= N \,\mathrm{Arctang.} \frac{N}{m} - M \,\mathrm{Arctang.} \frac{M}{m} + \frac{m}{2} \log. \frac{m^2+M^2}{m^2+N^2}, \quad (a)$$

aus der, wenn man:

$$M = 1 - W \text{ und } N = 1 + W$$

setzt, die folgende gezogen wird:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos.}(1-W)v - \mathrm{Cos.}(1+W)v}{v^2} e^{-mv} dv =$$

$$= (1+W) \,\mathrm{Arctang.} \frac{1+W}{m} - (1-W) \,\mathrm{Arctang.} \frac{1-W}{m} + \frac{m}{2} \log. \frac{m^2+(1-W)^2}{m^2+(1+W)^2},$$

aus der endlich, je nach der Größenbeschaffenheit von W, das in Rede stehende bestimmte Integrale, wie folgt, ermittelt wird. Versetzen wir nämlich in derselben die positive Größe m in den Zustand des unendlichen Abnehmens, so erhalten wir, da nach dem Vorausgeschickten W nothwendig positive reelle Werthe darbietet, je nachdem $W < 1$ oder $W = 1$ oder endlich $W > 1$ ist, in derselben Ordnung folgende drei Bestimmungsgleichungen:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos.}(1-W)v - \mathrm{Cos.}(1+W)v}{v^2}\,dv = (1+W)\tfrac{\pi}{2} - (1-W)\tfrac{\pi}{2} = W\pi\,,$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos.}(1-W)v - \mathrm{Cos.}(1+W)v}{v^2}\,dv = (1+1)\tfrac{\pi}{2} = \pi\,,$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos.}(1-W)v - \mathrm{Cos.}(1+W)v}{v^2}\,dv = (1+W)\tfrac{\pi}{2} + (1-W)\tfrac{\pi}{2} = \pi\,;$$

d. h. wir haben:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos.}(1-W)v - \mathrm{Cos.}(1+W)v}{v^2}\,dv = W\pi\,, \quad \text{wenn } W \leqq 1\,, \\ &\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos.}(1-W)v - \mathrm{Cos.}(1+W)v}{v^2}\,dv = \pi\,, \quad \text{wenn } W \geqq 1 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

ist. Dieses doppelte Ergebniß für den innerhalb der Klammern in Gleichung (1‴) enthaltenen bestimmten Integralausdruck macht eine abgesonderte Behandlung dieser Gleichung nach den diesen Ergebnissen entsprechenden Annahmen nothwendig; wozu wir nunmehr auch übergehen.

I. Betrachten wir zuerst den Fall der Gleichung (1‴), wenn man:

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} < 1 \qquad (7)$$

hat. — Bei dieser Annahme hat man:

$$W = \frac{\alpha^2}{a^2+w} + \frac{\beta^2}{b^2+w} + \frac{\gamma^2}{c^2+w} < 1\,, \quad \text{von } w = 0 \text{ bis } w = \infty\,;$$

und da in der That die auf w Bezug habenden Integrationsgrenzen der Gleichung (1‴) sämmtliche reellen nicht negativen Werthe von w beschlagen: so geht, vermöge der erstern der Gleichheiten in (6),

der Ausdruck zur Rechten in Gleichung (1‴) in folgenden über:

$$-\pi\int_0^\infty \frac{\frac{\alpha^2}{a^2+w}+\frac{\beta^2}{b^2+w}+\frac{\gamma^2}{c^2+w}}{\sqrt{1+\frac{w}{a^2}}\sqrt{1+\frac{w}{b^2}}\sqrt{1+\frac{w}{c^2}}}\,dw\,.$$

Dieser Ausdruck stellt den Werth der gegenwärtig in Rede stehenden Größe u vor, wenn $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ der Ungleichheit in (7) entsprechen, mit Ausschließung jedoch des Falles, wenn $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ zugleich Nullwerthe vorstellen, welche Annahme gleichfalls noch der Ungleichheit in (7) entspricht. Stellt man nun durch J den Werth von u vor, der allen reellen Werthen von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ entspricht, die der Ungleichheit in (7) genügen, sonach auch jenen der Annahme:

$$\alpha = 0\,,\quad \beta = 0 \text{ und } \gamma = 0\,;$$

so wird man:

$$J = C - \pi\int_0^\infty \frac{\frac{\alpha^2}{a^2+w}+\frac{\beta^2}{b^2+w}+\frac{\gamma^2}{c^2+w}}{\sqrt{1+\frac{w}{a^2}}\sqrt{1+\frac{w}{b^2}}\sqrt{1+\frac{w}{c^2}}}\,dw$$

setzen müssen, wo C eine von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ independente Größe darstellt, die folgendermaßen bestimmt wird.

Nimmt man in dieser Gleichung $\alpha = 0$, $\beta = 0$ und $\gamma = 0$ an, so verschwindet das bestimmte Integrale rechterhand und die Größe J zur Linken stellt dann genau die in Nr. 441 durch Gleichung (2″) ausgedrückte Größe $u_0$ vor; dadurch gewinnt man die Gleichung:

$$\pi\int_0^\infty \frac{dw}{\sqrt{1+\frac{w}{a^2}}\sqrt{1+\frac{w}{b^2}}\sqrt{1+\frac{w}{c^2}}} = C\,,$$

und folglich:

$$J = \pi\int_0^\infty \frac{1-\left(\frac{\alpha^2}{a^2+w}+\frac{\beta^2}{b^2+w}+\frac{\gamma^2}{c^2+w}\right)}{\sqrt{1+\frac{w}{a^2}}\sqrt{1+\frac{w}{b^2}}\sqrt{1+\frac{w}{c^2}}}\,dw\,, \qquad (8)$$

welche Größe J den Werth von u aus Gleichung (1) Nr. 441 für alle reellen Werthe von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ darstellt, die der Ungleichheit in (7) nachkommen.

II. Betrachten wir nun den zweiten zu dem oben behandelten genau im Gegensatze stehenden Fall, wenn nämlich die reellen Werthe von $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ folgender Ungleichheit nachkommen:

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} > 1 . \qquad (7')$$

Da die Größe W, als Function von w, für sämmtliche nicht negativen Werthe von w continuirlich und beständig positiv verbleibt; und da dieselbe Function, nach der eben festgestellten Ungleichheit, für $w = 0$ größer als Eins, hingegen für $w = \infty$ den Nullwerth annimmt: so muß es einen positiven Werth für w geben und zwar, weil beim Uebergange von $w = 0$ bis $w = \infty$ die Function W beständig abnimmt, nur einen einzigen, der in die Function W statt w gesetzt, erstere der Einheit gleich macht. Stellen wir diesen einzigen Werth von w durch $w_1$ vor, so wird solcher aus der Gleichung:

$$\frac{\alpha^2}{a^2+w_1} + \frac{\beta^2}{b^2+w_1} + \frac{\gamma^2}{c^2+w_1} = 1 \qquad (9)$$

zu bestimmen sein, und man wird haben:

$$W > 1 \text{ für } w < w_1 , \text{ und } W < 1 \text{ für } w > w_1 ;$$

ferner kann der Ausdruck zur Rechten in Gleichung (1‴) auch, wie folgt:

$$-\int_0^{w_1} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{Cos.}(1-W)v - \mathrm{Cos.}(1+W)v}{v^2} dv \right\} \frac{dw}{\sqrt{1+\frac{w}{a^2}}\sqrt{1+\frac{w}{b^2}}\sqrt{1+\frac{w}{c^2}}}$$

$$-\int_{w_1}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{Cos.}(1-W)v - \mathrm{Cos.}(1+W)v}{v^2} dv \right\} \frac{dw}{\sqrt{1+\frac{w}{a^2}}\sqrt{1+\frac{w}{b^2}}\sqrt{1+\frac{w}{c^2}}} ,$$

gestellt werden: daher geht derselbe, mit Beachtung der Gleichungen in (6), über in:

$$-\pi \int_0^{w_1} \frac{dw}{\sqrt{1+\frac{w}{a^2}}\sqrt{1+\frac{w}{b^2}}\sqrt{1+\frac{w}{c^2}}} - \pi \int_{w_1}^{\infty} \frac{\frac{\alpha^2}{a^2+w} + \frac{\beta^2}{b^2+w} + \frac{\gamma^2}{c^2+w}}{\sqrt{1+\frac{w}{a^2}}\sqrt{1+\frac{w}{b^2}}\sqrt{1+\frac{w}{c^2}}} dw .$$

Dieser Ausdruck stellt die in Rede stehende Größe u der Gleichung

(1) Nr. 441, bei Annahme des Bestandhabens der Ungleichheit in (7′) vor, mit alleiniger Ausschließung jedoch der Annahme:

$$\alpha = \infty\,, \quad \beta = \infty \quad \text{und} \quad \gamma = \infty\,,$$

welche Annahme noch in voller Uebereinstimmung mit dieser Ungleichheit in (7′) ist. Wird nun durch A der Werth von u vorgestellt, der allen reellen Verfügungen über $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$, so der Ungleichheit in (7′) nachkommen, entspricht; so wird man:

$$A = C' - \pi \int_0^{w_1} \frac{dw}{\sqrt{1+\frac{w}{a^2}}\sqrt{1+\frac{w}{b^2}}\sqrt{1+\frac{w}{c^2}}} - \pi \int_{w_1}^{\infty} \frac{\frac{\alpha^2}{a^2+w} + \frac{\beta^2}{b^2+w} + \frac{\gamma^2}{c^2+w}}{\sqrt{1+\frac{w}{a^2}}\sqrt{1+\frac{w}{b^2}}\sqrt{1+\frac{w}{c^2}}} dw$$

zu setzen haben, wo C′ eine von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ independente Constante vorstellen wird, welche wir in folgender Weise bestimmen.

Setzt man nämlich in dieser Gleichung die Größen $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ als unendlich großwerdende voraus, so zeigt die Gleichung (9) für $w_1$ einen unendlich großwerdenden Werth an, wodurch der Ausdruck rechterhand der eben aufgestellten Bestimmungsgleichung für A folgende Form annimmt:

$$C' - \pi \int_0^{\infty} \frac{dw}{\sqrt{1+\frac{w}{a^2}}\sqrt{1+\frac{w}{b^2}}\sqrt{1+\frac{w}{c^2}}}\,;$$

anderseits bietet der Ausdruck rechterhand in Gleichung (1) Nr. 441, wenn gleichfalls $\alpha$, $\beta$, und $\gamma$ unendlich großwerdend angenommen werden, den Nullwerth dar: folglich hat man:

$$0 = C' - \pi \int_0^{\infty} \frac{dw}{\sqrt{1+\frac{w}{a^2}}\sqrt{1+\frac{w}{b^2}}\sqrt{1+\frac{w}{c^2}}}\,,$$

aus der C′ bestimmt werden kann. Wird das Ergebniß dieser Bestimmung in die obige A darstellende Gleichung gesetzt; so ergiebt sich:

$$A = \pi \int_{w_1}^{\infty} \frac{1 - \left(\frac{\alpha^2}{a^2+w} + \frac{\beta^2}{b^2+w} + \frac{\gamma^2}{c^2+w}\right)}{\sqrt{1+\frac{w}{a^2}}\sqrt{1+\frac{w}{b^2}}\sqrt{1+\frac{w}{c^2}}} dw\,, \qquad (8')$$

wo $w_1$ den der aus der Gleichung (9) zu folgernden positiven Werth darstellt. Es stellt sonach diese Größe A den Werth von u aus Gleichung (1) Nr. 441 für alle reellen Werthe von $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ vor, die der Ungleichheit (7′) entsprechen.

Wir fügen noch die Bemerkung hinzu, daß die Gleichungen (8) und (8′), die Ausdrücke zur Rechten derselben nämlich, zusammenfallen, wenn die Ungleichheiten in (7) und (7′) in folgende Gleichung

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 1$$

übergehen; es bietet nämlich bei dieser Annahme die Gleichung (9) für $w_1$ den Nullwerth dar, woraus dann die Richtigkeit dieser Aussage hervorgeht.

Nach der in Nr. 441, III. gemachten Mittheilung haben wir, um die nach den Hauptachsen des Ellipsoids zerlegten Anziehungskräfte desselben auf einer in einem Punkte concentrirten Masseneinheit zu erfahren, die eben gewonnenen Ergebnisse für J und A partiell nach $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ zu differenziren. Betreffend nun die partiellen Differenzialquotienten von J, werden solche aus der Gleichung (8) nach einem bereits im ersten Theile der Integralrechnung begründeten Satze sehr leicht hergestellt; die Herstellung der partiellen Differenzialquotienten von A hingegen dürfte deswegen etwelche Schwierigkeit darbieten, indem das bestimmte Integrale der Gleichung (8′) als untere Integrationsgrenze die Größe $w_1$ hat, und diese, wie die Gleichung (9) zeigt, selbst eine Function von $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ ist. Allerdings ließe sich durch eine Umformung dieses Integrals, z. B. wenn die Integrationsvariable w in demselben durch $w_1 + w$ ersetzt würde, für A ein ganz analoges Integrale, wie das für J in (8′) herstellen; allein die Vollständigkeit, mit der wir die bestimmten einfachen und mehrfachen Integralien behandelt haben, verlangt, daß wir auch diesen Gegenstand, die partielle Differenziation eines Integralausdruckes nach einer von den Integrationsvariabeln unabhängigen Größe, wenn die Integrationsgrenzen Functionen derselben sind, allgemein in Untersuchung ziehen und die Endergebnisse unter den einfachsten Formen mittheilen; womit wir uns auch in den zwei folgenden Schlußnummern dieses Bandes noch befassen werden.

448. Hat man die Gleichung:

$$u = \int_a^A \varphi(x, \alpha)\, dx \qquad (1)$$

vorgelegt, wo a und A als Functionen von $\alpha$ auftreten; so bietet den Differenzialquotienten von u nach $\alpha$ zunächst die Gleichung:

$$\frac{du}{d\alpha} = \int_a^A \frac{d\varphi(x, \alpha)}{d\alpha}\, dx + \left(\frac{du}{d\alpha}\right) \qquad (2)$$

dar, wo $\left(\frac{du}{d\alpha}\right)$ den Differenzialquotienten von u nach $\alpha$ vorstellt, der bloß von den Integrationsgrenzen a und A, insofern solche Functionen von $\alpha$ sind, herrührt. Bedenkt man ferner, daß die vorgelegte Gleichung auch folgendermaßen gestellt werden kann:

$$u = \int_0^A \varphi(x, \alpha)\, dx - \int_0^a \varphi(x, \alpha)\, dx\,; \qquad (3)$$

so haben wir, zur Kenntniß von $\left(\frac{du}{d\alpha}\right)$ zu gelangen, den Differenzialquotienten eines Integralausdruckes der Form:

$$\int_0^{f(\alpha)} F(x)\, dx$$

nach $\alpha$ zu bestimmen, in welchem F(x) von $\alpha$ independent, und $f(\alpha)$ irgend eine Function von $\alpha$ ist.

Sei nun, diesen Differenzialquotienten herzustellen,

$$v = \int_0^{f(\alpha)} F(x)\, dx\,,$$

so ist:

$$\frac{dv}{d\alpha} = \frac{1}{\omega}\left\{\int_0^{f(\alpha+\omega)} F(x)\, dx - \int_0^{f(\alpha)} F(x)\, dx\right\},$$

wo $\omega$ eine unendlich kleinwerdende Größe repräsentirt; diese Gleichung ist auch mit folgender gleichbedeutend:

$$\frac{dv}{d\alpha} = \frac{1}{\omega}\cdot\int_{f(\alpha)}^{f(\alpha+\omega)} F(x)\, dx\,,$$

und diese mit folgender:

$$\frac{dv}{d\alpha} = \frac{1}{\omega} \int_{0}^{f(\alpha+\omega) - f(\alpha)} F[x + f(\alpha)]\, dx\,,$$

oder auch mit der folgenden:

$$\frac{dv}{d\alpha} = \frac{1}{\omega} \int_{0}^{\omega f_1(\alpha)} F[x + f(\alpha)]\, dx\,,$$

wo $f_1(\alpha)$ den Differenzialquotienten von $f(\alpha)$ nach $\alpha$ vorstellt; wird hier endlich $x$ durch $\omega x$ ersetzt: so ergiebt sich:

$$\frac{dv}{d\alpha} = \int_{0}^{f_1(\alpha)} F[\omega x + f(\alpha)]\, dx\,,$$

aus der für alle Werthe von $\alpha$, für welche $f_1(\alpha)$ nicht unendlich großwerdend wird, folgende Bestimmungsgleichung gezogen wird:

$$\frac{dv}{d\alpha} = F(f(\alpha)) \int_{0}^{f_1(\alpha)} dx = F(f(\alpha))\, f_1(\alpha)\,.$$

Mit Beachtung dieses Ergebnisses nun, zieht man aus der Gleichung (3) folgende:

$$\left(\frac{du}{d\alpha}\right) = q(A, \alpha)\frac{dA}{d\alpha} - \varphi(a, \alpha)\,\frac{da}{d\alpha}\,,$$

welche, in Verbindung mit den Gleichungen (1) und (2), auf folgende Bestimmungsgleichung führt:

$$\frac{d.\int_{a}^{A} q(x, \alpha)\, dx}{d\alpha} = \int_{a}^{A} \frac{d.q(x, \alpha)}{d\alpha}\, dx + \frac{dA}{d\alpha}\,\varphi(A, \alpha) - \frac{da}{d\alpha}\,\varphi(a, \alpha)\,, \quad (I)$$

welche als Gleichheit für alle Werthe von $\alpha$ besteht, für welche die Differenzialquotienten $\frac{dA}{d\alpha}$ und $\frac{da}{d\alpha}$ nicht unendlich großwerdend ausfallen.

Daß man mittelst dieser Gleichheit (I) die partiellen Differenzialquotienten von J und A aus den Gleichungen (8) und (8′) vorhergehender Nr. nach $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ sehr leicht herstellen kann, leuchtet ohneweiters ein; wir verweilen jedoch nicht dabei, dieselben noch herzustellen, sondern übergehen zur Schlußnummer, um auch ähnliche Gleichheiten wie (I) für zwei- und dreifache Integralien abzuleiten.

449. Es sei:

$$u = \int_b^B \int_a^A \varphi(x, y, \alpha)\, dx\, dy\,, \qquad (4)$$

so wollen wir, unter der Voraussetzung daß die Integrationsgrenzen b, B, a und A Functionen von $\alpha$ sind, den Differenzialquotienten von u nach $\alpha$ ableiten.

Vorerst hat man die Gleichung:

$$\frac{du}{d\alpha} = \int_b^B \int_a^A \frac{d.\varphi(x, y, \alpha)}{d\alpha}\, dx\, dy + \left(\frac{du}{d\alpha}\right), \qquad (5)$$

wo $\left(\frac{du}{d\alpha}\right)$ den Theil des Differenzialquotienten von u nach $\alpha$ vorstellt, der bloß von den Integrationsgrenzen, insofern solche Functionen von $\alpha$ sind, herrührt.

Sei nun, diesen Theil zu erhalten,

$$v = \int_b^B \int_a^A F(x, y)\, dx\, dy\,,$$

wo wir $F(x, y)$ unabhängig von $\alpha$ voraussetzen; so wird man mit Zuziehung der Gleichheit (I) vorhergehender Nr. und mit Beachtung des Umstandes, daß A und a Functionen von $\alpha$ sind, zunächst folgende Gleichung haben:

$$\frac{dv}{d\alpha} = \int_b^B \frac{d.\int_a^A F(x, y)\, dx}{d\alpha}\, dy + \frac{dB}{d\alpha}\int_a^A F(x, B)\, dx - \frac{db}{d\alpha}\int_a^A F(x, b)\, dx\,;$$

nach derselben Gleichheit (I) hat man aber, unter der getroffenen Voraussetzung über die Function $F(x, y)$, auch folgende:

$$\frac{d.\int_a^A F(x, y)\, dx}{d\alpha} = \frac{dA}{d\alpha} F(A, y) - \frac{da}{d\alpha} F(a, y)\,;$$

folglich hat man:

$$\frac{dv}{d\alpha} = \frac{dA}{d\alpha}\int_b^B F(A,y)dy - \frac{da}{d\alpha}\int_b^B F(a,y)dy + \frac{dB}{d\alpha}\int_a^A F(x,B)dx - \frac{db}{d\alpha}\int_a^A F(x,b)dx\,.$$

Mit Zuziehung dieses Ergebnisses stellt sich beachtend die Gleichungen (4) und (5) folgende Bestimmungsgleichung heraus:

$$\frac{\mathrm{d}.\int_b^B\int_a^A \varphi(x,y,\alpha)\,dx\,dy}{d\alpha} =$$

$$= \int_b^B\int_a^A \frac{\mathrm{d}.\varphi(x,y,\alpha)}{d\alpha}\,dx\,dy + \frac{dA}{d\alpha}\int_b^B \varphi(A,y,\alpha)dy - \frac{da}{d\alpha}\int_b^B \varphi(a,y,\alpha)dy$$

$$+ \frac{dB}{d\alpha}\int_a^A \varphi(x,B,\alpha)dx - \frac{db}{d\alpha}\int_a^A \varphi(x,b,\alpha)dx, \quad \text{(II)}$$

die, gleichwie (I) vorhergehender Nr., für alle Werthe von $\alpha$ als Gleichheit besteht, für welche die Differenzialquotienten $\frac{dA}{d\alpha}$, $\frac{da}{d\alpha}$, $\frac{dB}{d\alpha}$ und $\frac{db}{d\alpha}$ keine unendlich wachsenden Werthe vorstellen.

Ganz in ähnlicher Weise erhält man mit Zuziehung der Gleichheiten in (I) und (II) folgende Bestimmungsgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}.\int_c^C\int_b^B\int_a^A \varphi(x,y,z,\alpha)\,dx\,dy\,dz}{d\alpha} =$$

$$= \int_c^C\int_b^B\int_a^A \frac{\mathrm{d}.\varphi(x,y,z,\alpha)}{d\alpha}\,dx\,dy\,dz$$

$$+ \frac{dA}{d\alpha}\int_c^C\int_b^B \varphi(A,y,z,\alpha)\,dy\,dz - \frac{da}{d\alpha}\int_c^C\int_b^B \varphi(a,y,z,\alpha)\,dy\,dz$$

$$+ \frac{dB}{d\alpha}\int_a^A\int_c^C \varphi(x,B,z,\alpha)\,dz\,dx - \frac{db}{d\alpha}\int_a^A\int_c^C \varphi(x,b,z,\alpha)\,dz\,dx$$

$$+ \frac{dC}{d\alpha}\int_b^B\int_a^A \varphi(x,y,C,\alpha)\,dx\,dy - \frac{dc}{d\alpha}\int_b^B\int_a^A \varphi(x,y,c,\alpha)\,dx\,dy, \quad \text{(III)}$$

in der gleichfalls die Integrationsgrenzen A, a, B, b, C, c Function von $\alpha$ sind, und die identisch für jene Werthe von $\alpha$ Statt hat, für welche die Differenzialquotienten $\frac{dA}{d\alpha}$, $\frac{da}{d\alpha}$, $\frac{dB}{d\alpha}$, $\frac{db}{d\alpha}$, $\frac{dC}{d\alpha}$, $\frac{dc}{d\alpha}$ nicht ohne Ende wachsende Werthe annehmen.

---

Ende der ersten Abtheilung des zweiten Theiles der Differenzial- und Integralrechnung.

# Verzeichniß einiger Druckfehler.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Seite | 2 | Zeile | 10 | von oben | statt: einer | soll stehen: eine |
| „ | 26 | „ | 9 | „ unten | „ setzen | „ „ setzten |
| „ | 28 | „ | 14 | „ „ | „ $x$ | „ „ $y$ |
| „ | 128 | „ | 4 | „ „ | „ $X_2 y^{n-2}$ | „ „ $X_2 y^{n-3}$ |
| „ | 151 | „ | 5 | „ oben | „ Zwecken | „ „ Zweck |
| „ | 161 | „ | 5 | „ unten | „ $\sqrt{c^2(1+u^2)-v^2}$ | „ „ $\sqrt{c^2(1+u^2)-v^2}$ |
| „ | 189 | „ | 12 | „ oben | „ Nr. 329 | „ „ Nr. 330 |
| „ | 285 | „ | 20 | „ unten | „ dieselben | „ „ dieselbe |
| „ | 336 | „ | 4 | „ „ | „ $x = A$ | „ „ $x' = A$ |
| „ | 417 | „ | 4 | „ oben | „ $= {}^{\pi} \log \ldots$ | „ „ $= \frac{\pi}{2} \log \ldots$ |
| „ | 419 | „ | 9 | „ unten | „ $= {}_{\pi} \int \ldots$ | „ „ $= \frac{\pi}{2} \int \ldots$ |
| „ | 423 | „ | 1 | „ oben | „ $+ {}^{\pi} \int \ldots$ | „ „ $= \frac{\pi}{2} \int \ldots$ |
| „ | 423 | „ | 2 | „ unten | „ in (15) | „ „ in (16) |
| „ | 426 | „ | 3 | „ „ | „ $\frac{1-x^2}{1-c^2x^2}$ | „ „ $\sqrt{\frac{1-x^2}{1-c^2x^2}}$ |
| „ | 431 | „ | 5 | „ „ | „ $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a^2+1-c^2}}} \ldots$ | „ „ $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a^2(1-c^2)}}} \ldots$ |
| „ | 432 | „ | 3 | „ oben | „ $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a^2+1-c^2}}} \ldots$ | „ „ $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a^2(1-c^2)}}} \ldots$ |

# Nachträgliche Berichtigungen zum ersten Bande.

Seite 5 Zeile 11 von oben soll „erstere“ mit „letztere“ vertauscht werden.

„ 26 „ 12 „ „ am Schlusse dieser Zeile soll $\binom{n-1}{n-k}$ stehen.

„ 57 In den auf den Zeilen 6—9 von unten enthaltenen Gleichungen sind die Ausdrücke rechterhand der Gleichheitszeichen mit den genau entgegengesetzten Vorzeichen zu nehmen.

„ 58 In den beiden Gleichungen (54) und (55) sind die Ausdrücke rechterhand gleichfalls mit entgegengesetzten Vorzeichen zu nehmen.

„ 70 Zeile 6 von unten soll (78) durch (79) ersetzt werden.

„ 79 „ 9 „ oben, der Zähler im Integralausdrucke linkerhand ist, wie folgt, abzuändern.

$$\mathrm{Cos.}\, m\lambda \pm x\, \mathrm{Cos.}(m+1)\lambda$$

Seite 98 Zeile 18 von unten soll es heißen: von der Variabeln

„ 102 „ 5 „ oben, dem Ausdrucke inner den Klammern zur Linken vom Gleichheitszeichen ist ein Integralzeichen vorzusetzen.

„ 126 „ 1 „ oben, zur Rechten vom Gleichheitszeichen ist dx in dy umzusetzen.

„ 180 „ 12 „ unten, soll „denn" durch „den" ersetzt werden.

„ 184 „ 7 „ oben soll „absteht" durch „übertroffen wird" ersetzt werden.

„ 230 „ 14 „ oben. Im Zähler rechterhand soll stehen: $(2p + 1)\,2p$

„ 249 Dem Ausdrucke rechterhand vom Gleichheitszeichen in (57) ist das Doppelzeichen $\pm$ vorzusetzen; das obere Zeichen gilt, wenn die Größe $\alpha$ in besagter Gleichung positiv, das untere, wenn dieselbe Größe $\alpha$ negativ ist.

„ 250 Die Zeile 11 von unten ist folgendermaßen abzuändern: Die hier aufgestellten Gleichungen (58)—(60) bestehen u. s. w.

„ 286 Zeile 6 von unten, zur Rechten vom Gleichheitszeichen ist das Vorzeichen — zu setzen.

„ 287 „ 1 „ oben, auch hier ist rechterhand das Zeichen — vorzusetzen.

„ 306 „ 3 „ unten, inner den Klammern ist $-\frac{1}{2}$ durch $\frac{1}{2}$ zu ersetzen.

„ 308 „ 5 „ „ Der Nenner des Bruches rechterhand lautet:

$$e^{\frac{a\pi}{2}} - e^{-\frac{a\pi}{2}}$$

„ 310 „ 1 „ oben. Der Ausdruck linkerhand lautet: $\frac{1}{2}(-1)^k(\frac{\pi}{2})^{2k}V_{2k}$

„ 342 Alles von Zeile 2 bis und mit Zeile 10 ist zu streichen, und an dessen Statt Folgendes zu setzen: „bei Zugrundelegung der letzten „unter den Gleichungen (48) Nr. 156 stellt sich nämlich der Werth „besagten Integrals für jeden Werth von a, als unendlich großwerdend „heraus, während aus dem Verfolge dieser Nr. auf eine unzweideu„tige Weise hervorgeht, daß besagtes bestimmte Integrale einen end„lichen Werth darbietet."

„ 345 Zeile 8 von unten. In dem auf das erste Summenzeichen folgenden Ausdrucke soll $\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^{2k-1}$ stehen.

„ 353 „ 14 „ unten, das Zeichen — ist durch + zu ersetzen.

„ 360 In den auf den Zeilen 9 und 12 von oben enthaltenen Gleichungen ist jedem der Ausdrücke rechterhand das Zeichen — vorzusetzen.

„ 377 Zeile 3 von unten, soll es heißen: Die Größen ꝛc.

„ 412 „ 6 „ oben, soll das Glied $-\frac{1}{3}S_3 a$ abgeändert werden in $-\frac{1}{3}S_3 a^3$

„ 414 „ 7 „ unten, soll „vielfache" durch „Produkte" ersetzt werden.

„ 460 „ 3 „ „ soll es heißen: $h_2 < \frac{224}{1000}$.

Bayerische Staatsbibliothek München

D. Knode.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Raabe, Joseph Ludwig,

Die Differenzial- und Integralrechnung

Bd.: 2,1

Zürich (1843)

Math.p. 448 t-2,1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082628-2